Ю. А. Игнатов, Корни из единицы как несвободные точки комплексной плоскости,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 5, 825–827

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 5 (1980)

КОРНИ ИЗ ЕДИНИЦЫ КАК НЕСВОБОДНЫЕ ТОЧКИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. А. Игнатов

Точка μ комплексной плоскости называется свободной относительно образующих

$$A=\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad u \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix},$$

если дробно-линейные преобразования A и B порождают свободную группу ранга 2.

Ю. И. Мерзляков выдвинул проблему: выяснить, какие точки свободны [1, проблема 4.41]. В частности, в [2] он выделил подвопрос 3.1.2: являются ли все комплексные корни из 1 несвободными точками. М. Ньюмен [3] показал, что $\sqrt[q]{1}$ является несвободной точкой, если $q = 2^r$ или $q = p^r$, где p — простое нечетное число и 2 — первообразный корень по модулю p^r. В настоящей статье доказывается, что все корни из 1 являются несвободными точками.

ТЕОРЕМА. *Дробно-линейные преобразования*

$$A=\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad u \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix},$$

где $\mu = \sqrt[k]{1}$, *порождают несвободную группу* G.

Доказательство. Определим, как в [3], матрицы K_m рекурсивно следующим образом:

$$K_1 = B, \quad K_{m+1}= K_m A^{-1} K_m^{-1}. \tag{1}$$

Тогда если $K_m = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}$, то получаем

$$a_{m+1} = 1 + \mu a_m c_m, \quad c_{m+1} = \mu c_m^2, \tag{2}$$
$$\operatorname{tr} K_m = \operatorname{tr} A^{-1} = 2,$$

откуда

$$a_m = \mu^{2^m} \sum\nolimits_{i=1}^{m} \mu^{-2^i}, \quad c_m = \mu^{2^m-1}, \quad d_m = 2 - a_m. \tag{3}$$

Теперь зафиксируем m и определим рекурсивно матрицы $T_{m,n}$:

$$T_{m,0} = K_m, \quad T_{m,n+1} = T_{mn} A\, T_{mn}^{-1}. \tag{4}$$

Если

$$T_{mn} = \begin{pmatrix} a_{mn} & b_{mn} \\ c_{mn} & d_{mn} \end{pmatrix},$$

то, подставив в формулы (2) $-\mu$ вместо μ, получаем

$$a_{m,n+1} = 1 - \mu a_{mn} c_{mn}, \quad c_{m,n+1} = -\mu c_{mn}^2, \tag{5}$$
$$\operatorname{tr} T_{mn} = \operatorname{tr} A = 2,$$

откуда при $n \geqslant 1$

$$d_{mn} = \mu^{2^{m+n}} \left(-\sum\nolimits_{i=1}^{m} \mu^{-2^i} + \sum\nolimits_{i=m+1}^{m+n} \mu^{-2^i} \right) =$$
$$= \mu^{2^{m+n}} \left(-\sum\nolimits_{i=1}^{m} \mu^{-2^i} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mu^{-2^{m+i}} \right), \tag{6}$$
$$c_{mn} = -\mu^{2^{m+n}-1}, \quad d_{mn} = 2 - a_{mn}.$$

Теперь доказательство распадается на три случая. Мы считаем, что μ является первообразным корнем k-й степени из 1.

Первый случай. k — нечетное число, $k > 1$. Пусть α — показатель, которому 2 принадлежит по модулю k. Так как $2^\alpha \equiv 1 \pmod{k}$, то $\mu^{2^\alpha} = \mu$ и $\mu^{2^{\alpha+i}} = \mu^{2^i}$. Возьмем $m = \alpha$ и $n = \alpha + 1$. Тогда в матрице T_{mn} получаем по формулам (6)

$$a_{mn} = \mu^{2^{2\alpha+1}} \left(-\sum\nolimits_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^i} + \sum\nolimits_{i=1}^{\alpha+1} \mu^{-2^{\alpha+i}} \right) =$$
$$= \mu^2 \left(-\sum\nolimits_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^i} + \sum\nolimits_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^i} + \mu^{-2} \right) = 1;$$
$$c_{mn} = -\mu^{2^{2\alpha+1}-1} = -\mu^2 \cdot \mu^{-1} = -\mu;$$
$$d_{mn} = 2 - a_{mn} = 1,$$

откуда $b_{mn} = 0$. Следовательно, $T_{mn} = B^{-1}$, и мы получили в группе G нетривиальное соотношение.

Второй случай. $k = 2^l r$, r — нечетное число, $r > 1$, $l > 0$. Пусть α — показатель, которому 2 принадлежит по модулю r. В матрице K_l имеем по формулам (3)

$$a_l = \mu^{2^l} \sum_{i=1}^{l} \mu^{-2^i}, \quad c_l = \mu^{2^l-1}.$$

С другой стороны, в матрице $T_{l+\alpha,\alpha}$

$$a_{l+\alpha,\,\alpha} = \mu^{2^{l+2\alpha}} \left(-\sum_{i=1}^{l+\alpha} \mu^{-2^i} + \sum_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^{l+\alpha+i}}\right) =$$
$$= \mu^{2^l} \left(-\sum_{i=1}^{l} \mu^{-2^i} - \sum_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^{l+i}} + \sum_{i=1}^{\alpha} \mu^{-2^{l+i}}\right) =$$
$$= \mu^{2^l} \left(-\sum_{i=1}^{l} \mu^{-2^i}\right) = -a_l;$$

$$c_{l+\alpha,\,\alpha} = -\mu^{2^{l+2\alpha}} = -\mu^{2^l} = -c_l.$$

Тогда

$$V = K_l^{-1} T_{l+\alpha,\,\alpha} = \begin{pmatrix} * & * \\ -c_l & a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_l & * \\ -c_l & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

откуда

$$W = V^{-1} A V = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перестановочно с A, и опять имеем в группе G нетривиальное соотношение.

Третий случай. $k = 2^l$. Для этого случая теорема доказана М. Ньюменом. Здесь получаем соотношение $(AK_{l-1})^6 = 1$.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Тульский государственный педагогический институт

Поступило 23.II.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Коуровская тетрадь, Новосибирск, 1973.
[2] Мерзляков Ю. И., Линейные группы, Сб. Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники), 16 (1978), 35—89.
[3] Newman M., A conjecture on a matrix group whith two generators, J. Res. Nat. Bur. Stand., B78, № 2 (1974), 69—70.