Т. А. Гиллеспи, С. Потт, С. Треиль, А. Вольберг, Метод переноса в оценках векторных операторов Ганкеля, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 6, 178–193

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 6

МЕТОД ПЕРЕНОСА В ОЦЕНКАХ ВЕКТОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГАНКЕЛЯ

© Т. А. Гиллеспи, С. Потт, С. Треиль, А. Вольберг

Рост констант (с ростом размерности) в матричной теореме вложения Карлесона связывается с ростом констант в оценках норм векторных операторов Ганкеля через некую ВМО-норму их символа. Мы показываем, что каждая зхорошая« матричная мера с зплохой« константой вложения порождает ганкелев оператор с зхорошей« оценкой на пробных функциях, но с зплохой« оценкой нормы. Для этого используется метод переноса. Отметим, что возможен и обратный переход (от ганкелевых операторов к векторным мерам). Это было сделано в [11].

Среди прочего, из указанной взаимосвязи вытекает существование операторного веса W, удовлетворяющего операторному условию A_2, но такого, что преобразование Гильберта не ограничено в $L^2(W)$.

§1. Введение

Через B всюду ниже мы обозначаем матрицу-функцию размера $n \times n$ на окружности $\mathbb{T}$. Обычно предполагается, что она принимает самосопряженные значения: $B = B^*$. Введем пространство $\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}$ матриц-функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_J \langle \|(B - \langle B\rangle_J)e\|^2\rangle_J \le C\|e\|^2, \quad e \in \mathbb{C}^n\,, \tag{1}$$

где J пробегает все дуги окружности $\mathbb{T}$, а $\langle\cdot\rangle_J$ обозначает среднее по дуге J. (Индекс "so" указывает на слова "strong operator"). Квадратный корень из наилучшей постоянной C в (1) будет называться нормой функции B и обозначаться через $\|B\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}}$. Соответствующая диадическая ВМО-норма (когда

Ключевые слова: теорема вложения Карлесона, векторные операторы Ганкеля, операторное условие A_2.

Работа выполнена при частичной поддержке NSF, грант DMS 9622936, израильско-американского научного фонда (грант BSF 00030) и научной программы MSRI (осень 1997 г.). Второй автор благодарит за поддержку зСовместную федерально-земельную программу для высшей школы III« (через посредство Немецкой службы академического обмена, DAAD) и вместе с первым автором Университет Эдинбурга и EPSRC.

верхняя грань берется по всем диадическим дугам) будет обозначаться через $\|B\|_{\mathrm{BMO}^d_{so}}$. Отметим, что мы смотрим на $\mathbb{C}^n$ просто как на n-мерное пространство типа l^2. Можно вообще писать l^2 вместо $\mathbb{C}^n$ (размерность, как правило, будет ясна из контекста). При таком соглашении можно сказать, что BMO_{so} состоит из операторнозначных функций, для которых Be лежит в $\mathrm{BMO}(l^2)$ равномерно по всем $e \in l^2$. То же определение можно использовать для функций, значения которых суть операторы в бесконечномерном пространстве l^2.

В этой статье мы преследуем три цели. Во-первых, мы хотим сравнить нормы неких векторных операторов Ганкеля $[H, B]$ с нормами неких парапроизведений π_B иного вида. Подобная процедура восходит к теореме Бургейна [1], утверждающей, что если преобразование Гильберта ограничено в $L^p(X)$, то X — UMD-пространство (т.е. в $L^2(X)$ действуют мартингальные преобразования). Как и в [1], мы используем метод переноса. К сожалению, наше доказательство сложно технически и не дает возможности непосредственно сравнить нормы $\|\pi_B\|$ и $\|[H, B]\|$.

Тем не менее это доказательство ведет ко второй цели статьи — именно нетривиальной оценке снизу для нормы ганкелева оператора $[H, B]$ через размерность n и величину $\|B\|_{\mathrm{BMO}_{so}}$. Эта оценка неточна (точная оценка была получена в [11]).

Однако, как отмечалось в [4, 5], норма $\|B\|_{\mathrm{BMO}_{so}}$ соответствует матричной $\mathbb{A}_2$-постоянной некоторого матричного веса W, а величина $\|[H, B]\|$ — норме преобразования Гильберта в весовом пространстве в $L^2(W)$. Это ведет к третьей цели — именно построению операторного веса W, удовлетворяющего операторному условию $\mathbb{A}_2$, однако такого, что преобразование Гильберта не ограничено в $L^2(W)$. Стало быть, матричный результат типа теоремы Ханта–Макенхаупта–Видена [16] не переносится на операторнозначные веса.

Напомним, что ограниченность гильбертова преобразования H в $L^2(W)$ — важная составная часть в описании регулярности стационарных процессов в терминах их спектральных мер (см., например, [15, 9, 13, 16]). Теория векторных (multivariate) стационарных процессов со значениями в гильбертовом пространстве была основана Колмогоровым и Винером в начале 50-х годов (см., например, [17, 10]).

В [16] были охарактеризованы n-мерные процессы, у которых положителен угол между прошлым и будущим. Было показано, что положительно-определенная матрица-функция W размера $n \times n$ является спектральной плотностью такого процесса тогда и только тогда, когда W удовлетворяет матричному условию $\mathbb{A}_2$:

$$\|W\|_{\mathbb{A}_2} := \sup_J \|\langle W\rangle_J^{1/2} \langle W^{-1}\rangle_J^{1/2}\| < \infty.$$

Настоящая работа показывает, что для бесконечномерных процессов (т.е. процессов со значениями в l^2 бесконечной размерности) такая характеризация уже неверна.

Сформулируем основные результаты статьи. Определение парапроизведения π_B выписано в начале §2.

Теорема 1.1. *Существуют постоянные c_1, c_2, $C > 0$ такие, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и всякой матрицы-функции B размера $n \times n$ на $\mathbb{T}$ существует матрица-функция $\widetilde{B}$ того же размера, для которой*

$$\|\pi_B\| \leqslant c_1 \|[H, \widetilde{B}]\| + c_2 \|B\|_{\mathrm{BMO}^d_{\mathrm{so}}}, \quad \text{но } \|\widetilde{B}\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}} \leqslant C\|B\|_{\mathrm{BMO}^d_{\mathrm{so}}}.$$

Теорема 1.2. *Существует постоянная $a > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется самосопряженная матрица-функция B размера $n \times n$ на $\mathbb{T}$, для которой $\|B\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}} \leq 1$, но*

$$\|HB - BH\|_{L^2(\mathbb{C}^n, dt) \to L^2(\mathbb{C}^n, dt)} \geq a \cdot (\log n)^{1/2}. \tag{2}$$

Теорема 1.3. *Существуют абсолютные постоянные A, $a > 0$ такие, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется положительно-определенная матрица-функция W размера $n \times n$, для которой $\|W\|_{\mathbb{A}_2} \leq A$, но*

$$\|H\|_{L^2(W) \to L^2(W)} \geq a \cdot (\log n)^{1/2}.$$

Оценка $a \cdot (\log n)^{1/2}$ неточна. В теореме 1.2 точная оценка порядка $a \cdot (\log n)$ была получена в [11]. В теореме 1.3 точная оценка неизвестна. Однако в этой статье мы более озабочены ростом (вместе с размерностью) как таковым, а не его конкретной скоростью. Кроме того, нас занимает возможность свести нижние оценки для операторов Ганкеля к нижним оценкам для парапроизведений. Сведéние в обратном направлении описано в [11].

В [5] подобные результаты были получены для так называемых диадических операторов Ганкеля и мартингальных преобразований. „Непрерывный случай", представленный в настоящей статье („непрерывный" в том смысле, что вместо мартингальных преобразований в игру вступает преобразование Гильберта H, а вместо диадических ганкелевых операторов — обычные, т.е. коммутаторы умножения на B с оператором H), значительно более труден. Нам понадобится новый ингредиент (представление веса W в бесконечном множестве шкал), основные черты которого появились еще в упомянутом доказательстве теоремы Бургейна в [1]. В том рассуждении была получена оценка снизу для нормы преобразования Гильберта через нормы мартингальных преобразований. Мы собираемся действовать похожим образом. С первого взгляда это кажется невозможным: в построениях из [1] весьма существенной была инвариантность нормы при вращениях, в то время как норма в $L^2(W)$ не такова. Трудность обходится с помощью линеаризации изучаемой весовой задачи, что ведет к векторным операторам Ганкеля (коммутаторам $[H, B]$). Именно так связаны теоремы 1.2 и 1.3. Идея линеаризации восходит к [4].

§2. От канторова множества к бесконечномерному тору

Обозначим через $\mathcal{D}$ совокупность всех диадических дуг на $\mathbb{T}$. Пусть h_J — функция Хаара, отвечающая дуге $J \in \mathcal{D}$. Для каждой матрицы-функции $B = \Sigma_{J\in\mathcal{D}} B_J\, h_J(t)$ оператор

$$\pi_B(f)(t) = \Sigma_{J\in\mathcal{D}} B_J \, \langle f\rangle_J \cdot h_J(t)$$

называется *диадическим парапроизведением*.

Напомним, что в [12, 5] была построена самосопряженная матрица-функция B размера $n \times n$, лежащая в $\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}$ и имеющая там норму 1, а также вектор $f \in L^2(l^2, dt)$, $\|f\| = 1$, для которых

$$\|\pi_B f\| \geq a \cdot (\log n)^{1/2}. \tag{3}$$

Следовательно, теорема 1.2 сразу получается из теоремы 1.1. Напомним еще раз, что оценка $a \cdot (\log n)^{1/2}$ неточна, однако к теореме 1.1 вопрос о точности не имеет отношения. Мы приступаем к доказательству теоремы 1.1 — нашего основного результата.

Доказательство. Обозначим через Σ канторово множество $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$. Пусть B — матрица-функция размера $n \times n$, а f — вектор-функция на $\mathbb{T}$ такая, что $\|f\| = 1$, $\|\pi_B f\| = \|\pi_B\|$. Мы будем думать о B и f как о функциях на Σ. Для этого запишем

$$\begin{aligned} B(t) &= B_{-1} + \sum_{J\in\mathcal{D}} B_J\, h_J(t) = B_{-1} + \sum_{k\geqslant 0} \sum_{J\in\mathcal{D}, |J| = 2^{-(k)}} B_J h_J(t) \\ &= B_{-1} + \sum_{k\geqslant 0} B_k(r_1(t), \ldots, r_k(t)) r_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где через $r_1, r_2, \ldots$ обозначены функции Радемахера. В соответствии с этим, можем еще написать

$$B = B_{-1} + \sum_{k\geq 0} B_k \varepsilon_{k+1}, \quad B_{-1} = \mathrm{const},$$

где B_k есть функция от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \geqslant 1} \in \Sigma$, и

$$B_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \langle B \rangle_{I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, +1}} - \langle B \rangle_{I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}} \quad \text{для } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k.$$

Здесь через $I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$ обозначен диадический интервал с диадическим адресом $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$.

Введем отображение $\sigma : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \to \Sigma$ формулой $\sigma(\theta) := (r_1(\theta_1), r_2(\theta_2), \dots)$, $\theta \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. С помощью σ пересадим B с Σ на $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= B_{-1} + \Sigma_{k \geq 0} M_k(\theta_1, \dots, \theta_k) r_{k+1}(\theta_{k+1}) \\ &:= B_{-1} + \Sigma_{k \geq 0} (B_k \circ \sigma)(\theta_1, \dots, \theta_k) r_{k+1}(\theta_{k+1}). \end{aligned}$$

Можно положить $B_{-1} = 0$. Кандидат на роль матрицы B из (2) строится с помощью очень быстро растущей последовательности натуральных чисел

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots, \quad \alpha_{i+1} = N_i \cdot \alpha_i.$$

Для каждого $\theta \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ и каждого набора знаков $(\delta_k)_{k \geqslant 1} \in \Sigma$ напишем

$$b_{\theta,\delta}(\psi) := \Sigma_{k \geq 0} \delta_k M_k(\theta_1 + \alpha_1 \psi, \dots, \theta_k + \alpha_k \psi) \cdot r_{k+1}(\theta_{k+1} + \alpha_{k+1} \psi). \tag{4}$$

Об этой сумме можно думать как о конечной.

Тем же способом можно пересадить с $\mathbb{T}$ на $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ функцию f. Снова сначала рассмотрим f как функцию на Σ (можно также считать, что $\int_{\mathbb{T}} f = 0$). Как и ранее, запишем

$$f = \Sigma_{k \geq 0} f_k \cdot \varepsilon_{k+1},$$

где $f_k = f_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \langle f \rangle_{I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, +1}} - \langle f \rangle_{I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}}$. Пусть

$$f^{(k)} = f_0 \cdot \varepsilon_1 + \dots + f_k \cdot \varepsilon_{k+1}.$$

Для всех $\theta \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ напишем

$$g(\theta) = \Sigma_{k \geq 0}\, g_k(\theta) \cdot r_{k+1}(\theta_{k+1}) := \Sigma_{k \geq 0} (f_k \circ \sigma)(\theta) \cdot r_{k+1}(\theta_{k+1}) \tag{5}$$

и рассмотрим „сдвиг“

$$g_\theta(\psi) = \Sigma_{k \geq 0}\, g_k(\theta_1 + \alpha_1 \psi, \dots, \theta_k + \alpha_k \psi) \cdot r_{k+1}(\theta_{k+1} + \alpha_{k+1} \psi),$$

где снова о сумме можно думать как о конечной.

Теперь обозначим через H преобразование Гильберта по переменной ψ. Мы хотим оценить снизу величину

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \|(Hb_{\theta,\delta}(\psi)\, g_\theta(\psi))(\phi) - b_{\theta,\delta}(\phi)(Hg_\theta(\psi))(\phi)\|^2_{L^2(l^2,d\phi)}\, d\theta.$$

Приступая к этой оценке, предположим пока, что суммы в (4) и (5) содержат K членов. Опуская индексы θ, δ, получим

$$\begin{aligned} b = b^{(K)} &= b^{(K-1)} + \delta_K M_K(\theta_1 + \alpha_1\psi, \ldots, \theta_K + \alpha_K\psi) \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi), \\ g = g^{(K)} &= g^{(K-1)} + g_K(\theta_1 + \alpha_1\psi, \ldots, \theta_K + \alpha_K\psi) \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &Hbg - bHg \\ &\quad = Hb^{(K-1)}g^{(K-1)} - b^{(K-1)}Hg^{(K-1)} \\ &\qquad + (H(b^{(K-1)}g_K \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi)) \\ &\qquad - b^{(K-1)}H(g_K \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi))) \\ &\qquad + \delta_K(H(M_K \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi)g^{(K-1)}) \\ &\qquad - M_K \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi)Hg^{(K-1)}) \\ &\qquad + \delta_K(HM_Kg_K - M_K \cdot r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi)H(r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\psi)g_K)) \\ &\quad =: t_1 + t_2 + \delta_K t_3 + \delta_K t_4. \end{aligned} \tag{6}$$

Нам понадобится следующая хорошо известная лемма.

Лемма 2.1. *Пусть m — тригонометрический полином от k переменных $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{T}^k$, а r — тригонометрический полином от одной переменной, причем $\int_{\mathbb{T}} r(\theta)\, dm(\theta) = 0$. Если число N достаточно велико, то*

$$\begin{aligned} &(Hm(\theta_1 + \alpha_1\psi, \ldots, \theta_k + \alpha_k\psi) \cdot r(\theta_{k+1} + N\psi))(\phi) \\ &\qquad = m(\theta_1 + \alpha_1\phi, \ldots, \theta_k + \alpha_k\phi) \cdot (Hr)(\theta_{k+1} + N\phi). \end{aligned}$$

Лемма 2.2. *Выбрав α_{K+1} большим, можно добиться того, чтобы член t_2 в (6) не превосходил 2^{-K}.*

Доказательство. Все слагаемые в формулах для g_K и $b^{(K-1)}$ приблизим тригонометрическими полиномами, а функцию r_{K+1} — тригонометрическим полиномом с нулевым средним. Затем применим лемму 2.1. •

Лемма 2.3. *Норма члена t_4 в (6) в пространстве $L^2(l^2, d\psi d\theta)$ ограничена сверху величиной* $2\|f_k\|_{L^2(l^2,dt)}\|B\|_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$.

Доказательство. Оператор H — изометрия пространства $L^2(l^2, d\psi)$. Нормы операторнозначных функций M_k поточечно ограничены числом $\|B\|_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$. Действительно, для всех $e \in l^2$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|M_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)e\|^2 = \|B_k(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)e\|^2 \\
&= \frac{1}{|I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}|} \int\limits_{I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}} \|B_k(r_1(t), \ldots, r_k(t)) r_{k+1}(t)e\|^2 dt \\
&= \frac{1}{|I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}|} \int\limits_{I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}} \|(\langle B\rangle_{I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}} - B(t))e\|^2 dt \\
&\leqslant \|e\|^2 \|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\|g_K(\theta_1 + \alpha_1\psi, \ldots, \theta_K + \alpha_K\psi)\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} = \int\limits_{\mathbb{T}^K} \|g_K(\theta_1, \ldots, \theta_K)\|^2 \, d\theta \\
&= \int\limits_{\Sigma} \|f_K(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)\|^2 d\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{T}} \|f_K(r_1(t), \ldots, r_K(t)) r_{K+1}(t)\|^2 dt \\
&= \|f_K\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь мы просто используем инвариантность нормы пространства $L^2(l^2, d\theta)$ при вращениях, а $d\varepsilon$ обозначает естественную меру-произведение на Σ (она нагружает все цилиндрические множества „длины“ K одной и той же массой 2^{-K}).

Лемма 2.4. *Неравенство*

$$\|Hbg - bHg\|_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} \geq \|t_1\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} + \|t_3\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} - 2^{-K} - 2\|f_K\|^2$$

справедливо, если число α_{K+1} достаточно велико, а знак δ_K выбран должным образом.

Доказательство. Выберем $\delta_K = +1$ или $\delta_K = -1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|t_1 + \delta_K t_3\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} \geq \|t_1\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)} + \|t_3\|^2_{L^2(l^2, d\psi d\theta)}.$$

После этого воспользуемся леммами 2.2 и 2.3. •

Наша следующая цель — получить подходящую нижнюю оценку для $\|t_3\|^2_{L^2(l^2,d\psi d\theta)}$. В силу леммы 2.1, если число α_{K+1} достаточно велико, то

$$\begin{aligned} t_3 &= M_K g^{(K-1)} \cdot (Hr_{K+1})(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\phi) \\ &\quad - r_{K+1}(\theta_{K+1} + \alpha_{K+1}\phi) \cdot M_K H g^{(K-1)} + \eta_K, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\|\eta_K\|_{L^2(l^2,d\psi d\theta)} < 2^{-K}$.

Заметим, что функции $M_K g^{(K-1)}$ и $M_K H g^{(K-1)}$ зависят от ϕ и $\theta_1, \dots, \theta_K$, но не от θ_{K+1}. В частности, первый и второй члены в (7) ортогональны в $L^2(l^2, d\phi d\theta)$, поскольку функции $(Hr_{K+1})(\theta_{K+1})$ и $r_{K+1}(\theta_{K+1})$ ортогональны в $L^2(d\theta_{K+1})$. Поэтому из (7) следует оценка

$$\|t_3\|^2_{L^2(l^2,d\psi d\theta)} \geq \|M_K g^{(K-1)}\|^2_{L^2(l^2,d\psi d\theta)} = \|M_K g^{(K-1)}\|_{L^2(l^2,d\theta)}. \tag{8}$$

Это получается потому, что, если мы проинтегрируем любую функцию вида $\mathcal{H}(\theta_1 + \alpha_1\psi, \dots, \theta_K + \alpha_K\psi)$ сначала по θ, результат не будет зависеть от $\psi \in \mathbb{T}$. Стало быть, дальнейшее интегрирование по ψ не меняет ничего.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|M_K g^{(K-1)}\|_{L^2(l^2,d\theta)} &= \|B_K(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K) f^{(K-1)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K)\|^2_{L^2(l^2,d\varepsilon)} \\ &= \Sigma_{I\in\mathcal{D},|I|=2^{-K}} \|B_I\langle f\rangle_I\|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Если число α_{K+1} достаточно велико, то, соединив лемму 2.4 с (8) и (9), получим оценку

$$\begin{aligned} &\|Hb^{(K)}g^{(K)} - b^{(K)}Hg^{(K)}\|^2 \\ &\quad \geq \|Hb^{(K-1)}g^{(K-1)} - b^{(K-1)}Hg^{(K-1)}\|^2 \\ &\qquad + \Sigma_{I\in\mathcal{D},|I|=2^{-K}} \|B_I\langle f\rangle_I\|^2 - 2^{-K} - 2\|f_K\|^2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}. \end{aligned}$$

Повторяя ту же процедуру с K вместо $K+1$ (на этом шаге выбирается α_K) и т.д., приходим к неравенству (см. (3))

$$\|Hbg - bHg\|^2_{L^2(d\psi d\theta)} \geq \Sigma_{I\in\mathcal{D},|I|\geq 2^{-K}} \|B_I\langle f\rangle_I\|^2 - 1 - 2\|f\|^2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}.$$

Следовательно,

$$\|Hbg - bHg\|^2_{L^2(d\psi d\theta)} \geq \|\pi_B f\|^2 - 1 - 2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$$

и

$$\|\pi_B\|^2 \leqslant c_1\|Hbg - bHg\|^2_{L^2(d\psi d\theta)} + c_2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}, \tag{10}$$

поскольку $\|f\|^2 = 1 = \|g_\theta(\psi)\|^2_{L^2(d\psi d\theta)}$.

Вспомним, что $b = b_\theta(\psi)$ и $g = g_\theta(\psi)$. По крайней мере для одного θ верно неравенство

$$\|g_\theta(\psi)\|^2_{L^2(d\psi)}\|\pi_B\|^2 \leqslant c_1\|Hb_\theta(\psi)g_\theta(\psi) - b_\theta(\psi)Hg_\theta(\psi)\|^2_{L^2(d\psi)} + c_2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}, \tag{11}$$

так как из (10) следует, что (11) превращается в верное неравенство после усреднения по θ.

Нам остается доказать, что $b_\theta(\psi) \in \mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}$, а точнее, что функцию $b_\theta(\psi)$ можно изменить (с сохранением неравенства (11)) так, чтобы норма получившейся функции в $\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}$ контролировалась в терминах нормы функции B в $\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}$.

Рассуждение будет техническим, но оно основано на простом соображении. Для краткости обозначим $\delta_k M_k(\theta_1+\alpha_1\psi,\dots,\theta_k+\alpha_k\psi)r_{k+1}(\theta_{k+1}+\alpha_{k+1}\psi)$ через $b_{\theta,k}(\psi)$. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{|I|}\int_I \|(b_\theta(\psi) - \langle b_\theta\rangle_I)e\|^2 d\psi = \frac{1}{|I|}\int_I \left\|\sum_{k\geqslant 1}(b_{\theta,k}(\psi) - \langle b_{\theta,k}\rangle_I)e\right\|^2 d\psi. \tag{12}$$

Если бы концы дуги I были точками скачка функции $r_{j+1}(\theta_{j+1}+\alpha_{j+1}\psi)$ от -1 к $+1$, все $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ были постоянны на I и, вдобавок, все $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$, $k > j$, были попарно ортогональны на I, то мы бы могли просто использовать $\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}$-свойство функции B на диадическом интервале с адресом $(r_1(\theta_1+\alpha_1\psi),\dots,r_j(\theta_j+\alpha_j\psi))$ и получить необходимую оценку.

Но в общем случае функции $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ действительно почти ортогональны попарно на I при больших k (т.е. когда $2^k\alpha_k \gg \frac{1}{|I|}$), ибо $r_{k+l}(\theta_{k+l}+\alpha_{k+l}\psi)$ колеблется очень быстро в сравнении с $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$.

Однако малый интервал I может содержать точки скачка для многих функций $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ при $2^k\alpha_k < \frac{1}{|I|}$. Эти точки порождают две трудности. Во-первых, из-за них выражение $(b_{\theta,k}(\psi) - \langle b_{\theta,k}\rangle_I)e$ вносит большой вклад в (12) при $2^k\alpha_k < \frac{1}{|I|}$. Собственно, именно из-за таких членов скалярные пространства BMO и $\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}$ не совпадают. Во-вторых, точки скачка затрагивают и $b_{\theta,k}(\psi)$ с $2^k\alpha_k > \frac{1}{|I|}$, делая невозможным сравнение с исходной функцией B на некотором диадическом интервале.

Чтобы обойти эти трудности, мы изменим должным образом функцию b_θ около точек скачка, а затем покажем, что измененная функция попадает в $\mathrm{BMO}_{\mathrm{so}}$ и допускает нужную оценку нормы. Если последовательность $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$

растет очень быстро, то лишь относительно немногие интервалы, определенные соседними точками, в которых функция $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ претерпевает скачок от -1 до $+1$, содержат точки скачка для функции $r_l(\theta_l+\alpha_l\psi)$ при $l<k$. Это позволит нам провести доказательство. Наконец, надо будет проверить, что неравенство (11) сохранится.

Для упрощения обозначений назовем точки, где функция $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ претерпевает скачек, *точками скачка k-го уровня*; если скачек происходит от -1 к $+1$, будем говорить о *четной точке скачка k-го уровня*. *Интервал уровня k* — это интервал между двумя соседними точками скачка уровня k.

На $\mathbb{T}$ введем функции s_k, $k>1$, следующим образом. Положим $s_1(\psi)=r_1(\theta_1+\alpha_1\psi)$, $\psi\in\mathbb{T}$. Чтобы определить s_k при $k\geqslant 2$, возьмем интервал уровня k и соседние с ним интервалы той же длины. Если на этих трех интервалах нет точек скачка функции $r_l(\theta_l+\alpha_l\psi)$ ни для какого $l\leqslant k-1$, на среднем интервале зададим функцию $s_k(\psi)$ как $r_k(\theta+\alpha_k\psi)$, в противном же случае положим ее там равной нулю.

Пусть теперь

$$\widetilde{b}=\sum_{k\geqslant 1}\delta_k M_k(\theta_1+\alpha_1\psi,\dots,\theta_k+\alpha_k\psi)s_{k+1}(\psi).$$

Мы запишем то же самое в виде $\widetilde{b}=\sum_{k\geqslant 1}\widetilde{b}_k$. Надо доказать, что $\|\widetilde{b}\|_{\mathrm{BMO}_{so}}\leqslant C\|B\|_{\mathrm{BMO}^d_{so}}$, где постоянная C не зависит от размерности, а также, что (11) верно с заменой функции b_θ на $\widetilde{b}$.

Чтобы проследить за нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_{so}}$, рассмотрим выражение

$$\frac{1}{|I|}\int_I\langle\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\rangle d\psi=\frac{1}{|I|}\int_I\langle\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e\rangle d\psi \tag{13}$$

при $j>l$. Пусть число j_0 таково, что $\frac{1}{\alpha_{j_0+1}2^{j_0+1}}\leqslant|I|<\frac{1}{\alpha_{j_0}2^{j_0}}$. Это означает, что при любом $k\leqslant j_0$ интервал I содержит не более одной точки скачка k-го уровня.

Предположим сначала, что $j>j_0$. Пусть J — интервал уровня $j+1$, содержащийся в I. Если на J нет точек скачка для функций $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ с $k\leqslant j$, то

$$\int_J\langle\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e\rangle d\psi=0, \tag{14}$$

ибо в подынтегральной функции не является постоянным лишь множитель s_{j+1}. Если же для некоторого $k\leqslant j$ интервал J содержит точку скачка для $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$, то s_{j+1} обращается в нуль на J по построению, и мы снова получаем (14).

Итак, вклад в (13) вносят лишь два интервала J_1, J_2, определенные концами интервала I и ближайшими к ним четными точками скачка уровня $j+1$ в I. Ясно, что длины интервалов J_1, J_2 меньше длины интервалов уровня $j+1$, которая равна $2^{-j}\alpha_{j+1}^{-1}$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{J_1}\langle(\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e\rangle d\psi\right|\leqslant\frac{1}{2^j\alpha_{j+1}}2\,\|\widetilde{b}_l e\|_\infty\|\widetilde{b}_j e\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^{j-1}\alpha_{j+1}}\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}},$$

и та же оценка справедлива для J_2.

(Разумеется, из $\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}$-условия для B следует, что $\|B_k\,e\|_\infty\leqslant\|B\|_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$, откуда $\|\widetilde{b}_k\,e\|_\infty\leqslant\|b_{\theta,k}\,e\|_\infty\leqslant\|B_k\,e\|_\infty$ при всех θ).

Мы пришли к оценке

$$\sum_{j>j_0}\sum_{l<j}\left|\int\limits_I\langle(\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e\rangle d\psi\right|$$
$$\leqslant\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}\sum_{j>j_0}\sum_{l<j}\frac{1}{2^{j-2}\alpha_{j+1}}=C_1\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}.$$

Заставив (с самого начала) последовательность (α_k) расти достаточно быстро, мы получим конечную постоянную C_1 (ее величина зависит лишь от скорости роста упомянутой последовательности).

Теперь рассмотрим случай, когда $j=j_0$. Тогда выражение (13) отлично от нуля, лишь если функция $\widetilde{b}_l$ непостоянна на I, т.е. для некоторого $k\leqslant l+1$ функция $r_k(\theta_k+\alpha_k\psi)$ претерпевает скачок на I. Если $k\leqslant l$, то $\widetilde{b}_l$ обращается в нуль на I по построению. Поэтому в сумме

$$\sum_{l<j_0}\left|\frac{1}{|I|}\int\limits_I\langle(\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_{j_0}(\psi)e\rangle d\psi\right|$$

отлично от нуля разве что одно слагаемое, которое снова не превосходит $2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$.

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{j<j_0}\sum_{l<j}\left|\frac{1}{|I|}\int\limits_I\langle(\widetilde{b}_l(\psi)e-\langle\widetilde{b}_l\rangle_I e,\widetilde{b}_j(\psi)e\rangle d\psi\right|.$$

Если на I нет точек скачка k-го уровня при $k\leqslant j_0$, то эта сумма равна нулю. В противном случае, пусть k — наименьшее натуральное число, для которого I содержит точку скачка k-го уровня. Тогда в скалярном произведении под интегралом первый сомножитель равен нулю при всех $l < k-1$, а второй — при всех $j \geqslant k$. Следовательно, сумма равна нулю.

Остается проконтролировать сумму $\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{|I|}\int_I\|\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi$. Сначала рассмотрим частичную сумму $\sum_{j\geqslant 1}^{j_0}\frac{1}{|I|}\int_I\|\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi$. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что в сумме $\sum_{j\geqslant 1}^{j_0-1}$ не более одного ненулевого члена. Еще может возникнуть вклад от члена с номером j_0. Это дает мажоранту $4\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$ для указанной частичной суммы.

Теперь рассмотрим остаток $\sum_{j>j_0}\frac{1}{|I|}\int_I\|\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi$. Для его оценки понадобятся чуть более тонкие рассуждения.

Лемма 2.5. *Справедлива оценка*

$$\sum_{j>j_0}\frac{1}{|I|}\int\limits_I\|\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi\leqslant C\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}},$$

где постоянная C зависит лишь от скорости роста последовательности (α_k).

Более того, пусть $G\in\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}$, пусть (β_k) — достаточно быстро растущая последовательность положительных чисел и пусть (θ_k) — последовательность точек окружности $\mathbb{T}$. Представим G в виде $G(\psi)=\sum_{k\geqslant 1}G_k(r_1(\psi),\dots,r_k(\psi))r_{k+1}(\psi)$ и положим $G_{\theta,\beta}(\psi)=\sum_{k\geqslant 1}G_k(r_1(\theta_1+\beta_1\psi),\dots,r_k(\theta_k+\beta_k\psi))r_{k+1}(\theta_{k+1}+\beta_{k+1}\psi)=\sum_{k\geqslant 1}G_{\theta,\beta,k}$. Пусть L — дуга на $\mathbb{T}$, а число k_0 таково, что $\frac{1}{\beta_{j_0+1}2^{j_0+1}}\leqslant|L|<\frac{1}{\beta_{k_0}2^{k_0}}$. Тогда

$$\sum_{k>k_0}\frac{1}{|L|}\int\limits_L\|G_{\theta,\beta,k}(\psi)-\langle G_{\theta,\beta,k}\rangle_L e\|^2d\psi\leqslant\widetilde{C}\|G\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}},$$

где постоянная C зависит от скорости роста последовательности (β_k), но не от θ.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\widetilde{b}$ и I (как выше). Пусть J — интервал уровня j_0+2, содержащийся в I и не содержащий точек скачка k-го уровня при $k<j_0+2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j>j_0}\int\limits_J\|\widetilde{b}_j(\psi)e-\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant\Big(\sum_{j>j_0}\int\limits_J\|\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2d\psi\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{j>j_0}\int\limits_J\|\widetilde{b}_j(\psi)e\|^2d\psi\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant|J|^{1/2}\Big(\sum_{j>j_0}\|\langle\widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{j>j_0}\int\limits_{\widetilde{J}}\|b_{0,j}(\psi)e\|^2d\psi\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

для некоторого диадического интервала $\widetilde{J}$ такого, что $|\widetilde{J}| = |J|$. Здесь через $b_{0,j}$ обозначена „неповернутая“ функция $\delta_j M_j(\alpha_1\psi, \ldots, \alpha_j\psi)r_{j+1}(\alpha_{j+1})$. Легко видеть, что

$$\sum_{j>j_0} \int_{\widetilde{J}} \|b_{0,j}(\psi)e\|^2 d\psi \leqslant |\widetilde{J}|\,\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}.$$

Поэтому $\sum_{j>j_0} \int_J \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2 d\psi \leqslant 2|J|\,\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$. Обозначим объединение таких интервалов J через E_{j_0+1}.

Введем еще множество F_{j_0+1}, включив в него все подинтервалы J, содержащие точку скачка j-го уровня ни для какого $j < j_0+2$, а также два интервала, определяемых концами дуги I и ближайшими к ним точками скачка уровня j_0+2.

Теперь рассмотрим подинтервалы уровня j_0+3 в I. Пусть J' — такой интервал, не содержащийся в E_{j_0+1}. Если на J' нет точек скачка k-го уровня при $k < j_0+3$, то те же рассуждения, что и выше, ведут к оценке $\sum_{j>j_0+1} \int_{J'} \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2 d\psi \leqslant 2|J'|\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}$. В этом случае, в частности, интервал J' не пересекается с E_{j_0+1}. Обозначим объединение всех указанных интервалов J' через E_{j_0+2}. В множество F_{j_0+2} включим все интервалы J', которые содержат точку скачка, но не содержатся в E_{j_0+1}, а также два интервала, ограниченные концами дуги I и ближайшими к ним четными точками скачка уровня j_0+3.

Продолжая ту же процедуру, для каждого $k > j_0$ обозначим через E_k объединение всех подинтервалов уровня $k+1$ в I, которые не содержатся ни в каком из E_j, $k > j > j_0$, и не содержат точек скачка j-го уровня при $j \leqslant k$. В множество F_k включим все подинтервалы уровня $k+1$, содержащие точку скачка, а также два интервала, определяемые концами дуги I и ближайшими к ним четными точками скачка уровня $k+1$.

Тогда $I = F_k \cup \bigl(\bigcup_{j>j_0}^{k} E_j\bigr)$ при всех $k > j_0$. Получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j>j_0} \int_I \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2 d\psi \\
&\quad = \sum_{k\geqslant j_0+1} \biggl(\int_{F_k} \|\widetilde{b}_k(\psi)e - \langle \widetilde{b}_k\rangle_I e\|^2 d\psi + \int_{E_k} \sum_{j\geqslant k} \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j\rangle_I e\|^2 d\psi \biggr) \\
&\quad \leqslant 2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{so}} \sum_{k\geqslant j_0+1} |F_k| + 2\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{so}} \sum_{k\geqslant j_0+1} |E_k|.
\end{aligned}$$

Отметим, что по построению множества E_k дизъюнктны. Для каждого $j \leqslant j_0$ на дуге I имеется не более одной точки скачка j-го уровня, а для каждого

$j > j_0 + 1$ — не более $|I|\alpha_j 2^j + 1$ точек. Отсюда получается следующая оценка для $\sum_{k \geqslant j_0+1} |F_k|$:

$$\sum_{k \geqslant j_0+1} |F_k| \leqslant \sum_{k \geqslant j_0+1} \Big(j_0 + 3 + \sum_{j_0 < j \leqslant k} |I|\alpha_j 2^j \Big) \frac{1}{\alpha_{k+1} 2^k} \leqslant C_2 |I|,$$

где постоянная C_2 конечна, если последовательность (α_k) растет достаточно быстро. В частности, C_2 не зависит от размера n матрицы и от (θ_k). Приходим к оценке

$$\frac{1}{|I|} \int_I \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle b_j \rangle_I e\|^2 d\psi \leqslant 2(C_2 + 1)\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}}.$$

Отметим, что в этом рассуждении мы никак не использовали характер переделки функции b_θ в $\widetilde{b}$. То же самое доказательство проходит и для функций $G_{\theta,\beta}$ из формулировки леммы. •

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|} \int_I \|\widetilde{b}(\psi)e - \langle \widetilde{b} \rangle_I e\|^2 d\psi &= \frac{1}{|I|} \int_I \Big\| \sum_{j \geqslant 1} \widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j \rangle_I e \Big\|^2 d\psi \\
&\leqslant \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{|I|} \int_I \|\widetilde{b}_j(\psi)e - \langle \widetilde{b}_j \rangle_I e\|^2 d\psi + 2\sum_{j \geqslant 1} \sum_{l < j} \Big| \frac{1}{|I|} \int_I \langle \widetilde{b}_l(\psi)e - \langle \widetilde{b}_l \rangle_I e, \widetilde{b}_j(\psi)e \rangle d\psi \Big| \\
&\leqslant 4\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}} + 2(C_2 + 1)\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}} + 2C_1\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}} + 4\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}} \\
&\leqslant C\|B\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{so}}},
\end{aligned}$$

где постоянная C зависит лишь от скорости роста последовательности (α_k), но не от θ.

Надо еще показать, что проведенная модификация не влияет на основную оценку (11). Здесь не нужно тонких рассуждений. Предположим, что разложения по системе Хаара нашей матрицы-функции B (размера $n \times n$) и вектор-функции f содержат лишь конечное число членов. Тогда можно считать, что B, f, „повернутые“ функции b_θ, g_θ, а также измененные функции $\widetilde{b}_\theta(t)$ ограничены в L^∞ равномерно по θ. Разумеется, мажоранта здесь сильно зависит от размерности n и числа K членов в рядах Хаара.

Однако мера множества $E = \{t \in \mathbb{T} : \widetilde{b}_\theta(t) - b_\theta(t) \neq 0\}$ стремится к нулю равномерно по θ, если мы заставляем набор $\alpha_1, \dots, \alpha_{K+1}$ возрастать все быстрее и быстрее. В точных терминах

$$|\{t \in \mathbb{T} : \widetilde{b}_\theta(t) - b_\theta(t) \neq 0\}| \leqslant 6 \sum_{k \geqslant 1} \sum_{k > j \geqslant 1} \frac{\alpha_j 2^j}{\alpha_k 2^k}.$$

Потребовав, например, чтобы $\alpha_{j+1} \geqslant A^j \alpha_j$, где $A > 0$ — большая постоянная, мы видим, что число $\|H(\widetilde{b}_\theta - b_\theta)g_\theta\|$ можно сделать сколь угодно малым. Что касается второго члена, напишем

$$\|(\widetilde{b}_\theta - b_\theta)Hg_\theta\|^2 \leqslant \sum_{i\geqslant 1} \|\widetilde{b}_\theta - b_\theta\|_\infty^2 \int_E \|Hg_\theta^{(i)}\|^2 dt,$$

где $g_\theta^{(i)}$ — i-я компонента вектор-функции g_θ в $\mathbb{C}^n$.

Вспомним, что $Hg_\theta^{(i)}$ — скалярные BMO-функции с BMO-нормами, ограниченными равномерно по i и θ. Следовательно,

$$\int_E \|Hg_\theta^{(i)}\|^2 dt \leqslant \gamma(|E|) \int_{\mathbb{T}} \|Hg_\theta^{(i)}\|^2 dt$$

при всех i, θ, где $\gamma(|E|) \to 0$ при $|E| \to 0$ (пользуемся теоремой Джона–Ниренберга). Поэтому член $\|(\widetilde{b}_\theta - b_\theta)Hg_\theta\|$ тоже можно сделать сколь угодно малым.

Теперь, если B и f — функции общего вида, приблизим их конечными хааровскими суммами $B^{(K)}$ и $f^{(K)}$ так, чтобы $\|\pi_{B^{(K)}} f^{(K)}\| \geqslant 1/2\|\pi_B\|$, $\|B^{(K)}\|_{\mathrm{BMO}^d_{so}} \geqslant 1/2\|B\|_{\mathrm{BMO}^d_{so}}$, а затем применим вышеприведенное рассуждение к $B^{(K)}$. Это завершает доказательство теорем 1.1 и 1.2. •

§3. Весовые оценки

Теорема 1.3 теперь получается легко. Рассмотрим следующую матрицу-функцию размера $2n \times 2n$:

$$V = \begin{pmatrix} I & \widetilde{b} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Введем матричный вес $W := V^*V$. Из [4, 5] следует, что $\|H\|_{L^2(W)\to L^2(W)} \geqslant \|[H, \widetilde{b}]\|$ и что $\mathbb{A}_2$-постоянная для веса W равна $\|\widetilde{b}\|^2_{\mathrm{BMO}_{so}} + 1$. Таким образом, вес W удовлетворяет требованиям теоремы 1.3.

Благодарность. Мы признательны Ф. Назарову за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] Bourgain J., *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ark. Mat. **21** (1983), no. 2, 163–168.

[2] Burkholder D. L., *A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions*, Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Vol. 1, 2 (Chicago, IL, 1981), Wadsworth, Belmont, CA, 1983, pp. 270–286.

[3] Garnett J. B., *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., vol. 96, Academic Press, Inc., New York-London, 1981; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1984.

[4] Gillespie T. A., Pott S., Wilson J., *BMO-sequences and trigonometrically well-bounded matrix-weighted shifts*, Preprint, Univ. of Edinburgh, 1998.

[5] Gillespie T. A., Pott S., Treil S., Volberg A., *Logarithmic growth for matrix martingale transforms*, J. London Math. Soc. (в печати).

[6] Gillespie T. A., Pott S., Treil S., Volberg A., *Logarithmic growth for weighted Hilbert transforms and vector Hankel operators*, Preprint, Michigan State Univ., 1999.

[7] Helson H., Sarason D., *Past and future*, Math. Scand. **21** (1967), 5–16 (1968).

[8] Hunt R. A., Muckenhoupt B., Wheeden R. L., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.

[9] Ибрагимов И. А., *Вполне регулярные многомерные стационарные процессы с дискретным временем*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **111** (1970), сс. 224–251.

[10] Masani P., Wiener N., *On bivariate stationary processes and the factorization of matrix-valued functions*, Теория вероятностей и ее применения **4** (1959), №3, 322–331.

[11] Nazarov F., Pisier G., Treil S., Volberg A., *Sharp estimates in vector Carleson imbedding theorem and for vector paraproducts*, Preprint, Michigan State Univ., 1999.

[12] Nazarov F., Treil S., Volberg A., *Counterexample to the infinite-dimensional Carleson embedding theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **325** (1997), 383–388.

[13] Peller V. V., *Hankel operators and multivariate stationary processes*, Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Part 1 (Durham, NH, 1988), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 51, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 357–371.

[14] Petermichl S., *Dyadic shifts and a logarithmic estimate for Hankel operators with matrix symbol*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **330** (2000), no. 6, 455–460.

[15] Пеллер В. В., Хрущев С. В., *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы*, Успехи мат. наук **37** (1982), №1, 53–124.

[16] Treil S., Volberg A., *Wavelets and the angle between past and future*, J. Funct. Anal. **143** (1997), 269–308.

[17] Wiener N., Masani P., *The prediction theory of multivariate stochastic processes. I. The regularity condition*, Acta Math. **98** (1957), 111–150.

Department of Mathematics and Statistics
University of Edinburgh
Edinburgh EH9 3JZ, Scotland, UK

Поступило 25 апреля 2000 г.

Department of Mathematics and Statistics
University of Edinburgh
Edinburgh EH9 3JZ, Scotland, UK

Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing, Michigan 48824, USA

Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing, Michigan 48824, USA