# Обобщенные тождества с обратными переменными в подкольцах артиновых колец*

**И. З. ГОЛУБЧИК**
*Уфимский педагогический институт*

УДК 512.544.6+512.552.4

**Ключевые слова:** группа обратимых элементов кольца, элементарная подгруппа, обобщенное тождество с обратными переменными.

**Аннотация**

Пусть $R$ — первичное подкольцо с 1 в кольце матриц $D_k$ над телом $D$ при $k \geqslant 1$, центр $C$ кольца $R$ бесконечен и элементы из $C$ лежат в центре кольца $D_k$, $G$ — элементарная абсолютно неприводимая подгруппа в группе $U(R)$ обратимых элементов кольца $R$, в которой выполнено ненулевое обобщенное тождество с обратными переменными $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$. Тогда $R$ — $PI$-кольцо.

**Abstract**

*I. Z. Golubchik, Generalized identities with invertible variables for subrings of artinian rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* **1**(1995), 1101–1105.

Let $R$ be a prime subring with 1 of the matrix ring $D_k$ over a skew field $D$, $k \geqslant 1$. Suppose that the center $C$ of $R$ is infinite and elements of $C$ belong to the center of $D_k$. Let $G$ be an elementary absolute irreducible subgroup of the group $U(R)$ of invertible elements of $R$ with a nonzero generalized identity with invertible variables $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$, then $R$ is a $PI$-ring.

Данная работа — продолжение темы обобщенных групповых тождеств в классических группах над телами, которой посвящены статьи И. З. Голубчика и А. В. Михалёва [1], [2].

**Определение 1.** Пусть $R$ — первичное кольцо с 1 и бесконечным центром $C$ и $U(R)$ — группа обратимых элементов кольца $R$, $G$ — подгруппа в $U(R)$. Для $a \in R$ положим $C_G(a) = \{\lambda \in C \mid 1 + \lambda a \in G\}$, $E_G(a) = \{1 + \lambda a \mid \lambda \in C_G(a)\}$. Подгруппу $G$ назовем *элементарной*, если она порождается однопараметрическими подмножествами $E_G(a)$, для которых число элементов в $C_G(a)$ бесконечно.

**Определение 2.** Пусть $G$ — подгруппа в $U(R)$, $C$ — центр $R$. Скажем, что группа $G$ *абсолютно неприводима*, если $C$ — подалгебра в $R$, порожденная группой $G$, — содержит $d \cdot R \cdot d$, где $d$ — некоторый неделитель нуля в $R$.

**Определение 3.** Пусть $R$ — первичное ассоциативное кольцо с 1, $Q(R)$ — его полное правое кольцо частных, $P$ — центр кольца $Q(R)$, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество переменных, $P\langle X, X^{-1}\rangle$ — кольцо некоммутативных многочленов от переменных $x_i, x_i^{-1}$ с соотношениями $x_i \cdot x_i^{-1} = x_i^{-1} \cdot x_i = 1$, $H$ —

*Работа была поддержана грантом INTAS.

*Фундаментальная и прикладная математика* 1995, **1**, № 4, 1101–1105.
© 1995 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом "Открытые системы"*

подкольцо в $Q(R)$, порожденное $P$, $R\langle X, X^{-1}\rangle$ — подкольцо в свободном произведении $P$-алгебр $H$ и $P\langle X, X^{-1}\rangle$ с коэффициентами из $R$, $R\langle X\rangle$ — подкольцо в $R\langle X, X^{-1}\rangle$, зависящее только от $x_i$. Пусть $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ и $G$ — подгруппа в $U(R)$. Скажем, что *тождество* $f = 0$ *выполнено в* $G$, если $\pi(f) = 0$ для любого кольцевого гомоморфизма $\pi$: $R\langle X, X^{-1}\rangle \to R$, тождественного на $R$ и такого, что $\pi(x_i) \in G$, $(\pi(x_i))^{-1} = \pi(x_i^{-1})$ для всех $x_i \in X$.

Основной в работе является следующая

**Теорема 4.** *Пусть $R$ — первичное подкольцо с 1 в кольце матриц $D_k$ над телом $D$, $k \geqslant 1$, центр $C$ кольца $R$ бесконечен и элементы из $C$ лежат в центре кольца $D_k$. Далее, пусть $G$ — элементарная, абсолютно неприводимая подгруппа в $U(R)$ и в $G$ выполнено некоторое ненулевое тождество $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$. Тогда $R$ — PI-кольцо.*

**Замечание 5.** Если $R$ — первичное PI-кольцо и $F$ — поле частных центра $C$ кольца $R$, то $R \otimes_C F$ — конечномерная простая $F$-алгебра (см. [5], стр. 284).

Из замечания 5 получаем, что если $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ — тождество в подгруппе $G$ группы $U(R)$ и $R$ — первичное PI-кольцо, $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля $F$, то $R \otimes_C \bar{F}$ — кольцо матриц над полем $\bar{F}$ и тождество $f = 0$ выполнено в алгебраической группе $\bar{G}$, являющейся замыканием группы $G$. Обобщенным групповым тождеством в алгебраических группах над полями посвящена работа Г. М. Томанова [3]. Заметим, что в теореме 4 тело $D$ может быть бесконечномерным над своим центром. В доказательстве теоремы 4 будет использоваться работа К. И. Бейдара [4] о полупервичных кольцах с обобщенным полиномиальным тождеством.

**Замечание 6.** Если группа $H$ содержит $G$ и тождество $f = 0$ не выполнено в $G$, то оно не выполнено и в группе $H$. В частности, если в условии теоремы 4 группа $U(R)$ содержит элементарную, абсолютно неприводимую подгруппу $G$ и $R$ — не PI-кольцо, то в группе $U(R)$ не выполнено никакое ненулевое обобщенное тождество из $R\langle X, X^{-1}\rangle$.

## § 1 Доказательство теоремы 4

Пусть $A_G = \{a \in R \mid C_G(a) \text{ бесконечно}\}$. Многочлен $h \in R\langle X\rangle$ назовем *полилинейным*, если каждая переменная $x_i$ входит в любой одночлен $h_j$ из $h$ не более одного раза.

**Предложение 7.** *Пусть в условии теоремы 4 $g(x_1) \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ и $g(x_1) = 0$ — тождество в $G$. Для одночлена*

$$g_k = b_1 x_1^{\varepsilon_1} \dots b_k x_1^{\varepsilon_k} \cdot b_{k+1},$$

*где $\varepsilon_j = \pm 1$, положим $dg_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j} b_1 \dots b_j y \cdot b_{j+1} \dots b_{k+1}$. Далее, $h = d(g) = \sum d(g_k)$, где $g = \sum g_k$. Тогда $h(y) = 0$ — тождество на множестве $A_G$.*

**Доказательство.** Пусть $a \in A_G$. По условию $g(1+\lambda\cdot a)=0$ для всех $\lambda \in C_G(a)$. Далее, $g(1+\lambda a)$ — это элемент из кольца многочленов $D(\lambda)_k$, где тело $D(\lambda)$ — это кольцо частных кольца многочленов $D[\lambda]$. Тогда $g(1+\lambda a) = g_1(\lambda)\cdot(g_2(\lambda))^{-1}$, где $g_1(\lambda)\in D[\lambda]_k$, $g_2(\lambda)\in D[\lambda]$ и $g_1(\lambda)=0$ для всех $\lambda\in C_G(a)$. Поскольку множество $C_G(a)$ бесконечно и коммутирует с элементами многочлена $g_1(\lambda)$ и по условию теоремы 4 $\lambda$ из $C_G(a)\setminus\{0\}$ обратимы в $D_k$, то, применяя определитель Вандермонда, получим, что все коэффициенты многочлена $g_1(\lambda)$ равны нулю. Значит, дифференцируя $g(1+\lambda a)$ по $\lambda$, получим нуль, и $h(a)\left.\frac{dg(1+\lambda a)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=0$.

Предложение 7 доказано.

**Предложение 8.** *Пусть в условии теоремы 4 в группе $G$ выполнено ненулевое тождество $f=0$, $f\in R\langle X,X^{-1}\rangle$. Тогда существует ненулевой полилинейный многочлен $h\in R\langle X\rangle$ и $h=0$ — тождество на множестве $A_G$.*

**Доказательство.** Пусть $x_i, x_i^{-1}$ — переменные, входящие в $f$, и

$$\sum_{j=1}^{m} a_{j1}x_{i1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{jm}x_{im}^{\varepsilon_m}a_{j,m+1} \text{ —} \tag{1}$$

ненулевая однородная компонента максимальной длины в $f$, то есть набор $L_1,\varepsilon_1,\ldots,L_m,\varepsilon_m$ постоянен и тензор констант над $P$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{j1}\otimes\ldots\otimes a_{j,m+1} \text{ ненулевой.} \tag{2}$$

Подставляя вместо $x_i$ произведение $x_{2i}\cdot x_{2i+1}$, получаем, что в (1), если $i_k=i_{k+1}$, то $\varepsilon_k=-\varepsilon_{k+1}$ и

$$1\notin L(a_{1k},\ldots,a_{nk}), \tag{3}$$

где $L(a_{1k},\ldots,a_{nk})$ — линейная оболочка над $P$ элементов $a_{1k},\ldots,a_{nk}$. Пусть $T_i=\{k\mid i_k=i\}$. Положим, $V_i=\prod_{k\in T_i}(1+\lambda_k\cdot Y_k)$ — произведение в порядке возрастания $k$, и положим $x_i=V_i\cdot Z_i\cdot V_i^{-1}$. Продифференцируем $f(x_i)$ один раз по каждому $\lambda_j$, $1\leqslant j\leqslant m$, подставим затем $\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$. По предложению 7 получим многочлен $g(Y_j,Z_i,Z_i^{-1})$, который равен нулю при всех $Y_j\in A_G$, $Z_i\in G$. Покажем, что однородная компонента многочлена $g(Y_j,Z_i,Z_i^{-1})$ для монома

$$Y_1,Z_{i1}^{\varepsilon_1},\ldots,Y_m,Z_{im}^{\varepsilon_m} \tag{4}$$

ненулевая. Действительно, если переменная $x_i$ на месте $k$ дифференцируется по $\lambda$ более двух раз, либо $i_k\neq i_{k+1}$ и два раза, то моном (4) не получится. Если

для каждого $k$ переменная $x_i$ на каждом месте дифференцируется по одному разу, то в однородной компоненте с мономом (4) получится сумма

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j1} Y_1 Z_{i1}^{\varepsilon_1} \dots a_{jm} Y_m Z_{im}^{\varepsilon_m} a_{j,m+1}, \tag{5}$$

а если два раза, то $i_k = i_{k+1}$, $\varepsilon_k = -\varepsilon_{k+1}$ и для всех таких $k$ в (5) вместо $a_{j,k+1} \cdot Y_{k+1}$ будет стоять $-Y_{k+1} \cdot a_{j,k+1}$. Индукцией по числу таких $k$ из (3) и (2) получаем, что тензор констант при мономе (4) ненулевой и, значит, однородная компонента для него ненулевая и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{l} c_{j1} Y_1 b_{j1} Z_{i1}^{\varepsilon_1} \dots c_{jm} Y_m b_{jm} Z_{im}^{\varepsilon_m} \cdot c_{j,m+1} \neq 0. \tag{6}$$

Заметим, что мы делали подстановку $x_i = x_{2i} \cdot x_{2i+1}$, поэтому если в различных однородных компонентах все $\varepsilon_k$ положить равными 1, то все равно получаются неоднородные мономы. Положим в $g(Y_j, Z_i, Z_i^{-1})$ $Z_i = \prod_{k \in T_i} (1 + \lambda_k \cdot U_k)$, опять продифференцируем $g$ один раз по каждому $\lambda_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, и подставим затем $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. По предложению 7 получим полилинейный многочлен $h(Y_j, U_j)$, который равен нулю для всех $Y_j$ и $U_j$ из $A_G$. Осталось проверить, что многочлен $h$ ненулевой. Найдем однородную компоненту многочлена $h$ для монома

$$Y_1, U_1, \dots, Y_m, U_m. \tag{7}$$

Если на месте $k$ переменная $Z_i$ дифференцируется по $\lambda$ более одного раза, то $U_j$ и $U_t$ стоят рядом и монома (7) не будет. Если один раз, но дифференцируемый моном не лежит в компоненте (6), то, как замечено выше, отбрасыванием $\varepsilon_i$ моном (7) все равно не получится. Значит, однородная компонента ненулевая, ибо из (6) тензор констант $\sum_{j=1}^{l} c_{j1} \otimes b_{j1} \otimes \dots \otimes c_{j,m+1} \neq 0$. Итак, $h \neq 0$, и предложение 8 доказано.

**Предложение 9.** *Пусть в условии теоремы 4 $h \in R\langle X \rangle$ — ненулевое полилинейное тождество, выполненное на $A_G$. Тогда $R$ — PI-кольцо.*

**Доказательство.** Пункт 1. Пусть $a_j, b_j \in R$ и $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x \cdot b_j = 0$ для всех $x \in A_G$. Тогда существует неделитель нуля $a \in R$, не зависящий от $a_j, b_j$, для которого для всех $y, z \in R$ $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot a(za^2y - ya^2z)a \cdot b_j = 0$. Действительно, если $x, y \in A_G$, то $(1 + \lambda y) \cdot x \cdot (1 + \lambda y)^{-1} \in A_G$ для всех $\lambda \in C_G(y)$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_j (1 + \lambda y) \cdot x \cdot (1 + \lambda y)^{-1} \cdot b_j = 0$ и по предложению 7 $\sum_{j=1}^{n} a_j (yx - xy) b_j = 0$. Аналогично, для $z \in A_G$ $\sum_{j=1}^{n} a_j z \cdot x \cdot y b_j = \sum_{j=1}^{n} a_j y \cdot z \cdot x b_j$ и т. д. Получаем, что для $C$-подалгебры $S$, порожденной произведениями нескольких элементов из $A_G$, и любых $x_1, x_2 \in S$ у нас $\sum_{j=1}^{n} a_j (x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_1) b_j = 0$. По определению 2 $S \supseteq a \cdot R \cdot a$, $a$ — неделитель нуля в $R$, и значит, $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot a(za^2y - ya^2z) \cdot a \cdot b_j = 0$ для всех $y, z \in R$. Пункт 1 завершен.

Пусть $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1 \dots a_{mj}x_m a_{m+1,j}$ — однородная компонента $h(X)$ и тензор

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \otimes \dots \otimes a_{m+1,j} \quad \text{ненулевой.} \tag{8}$$

По пункту 1, подставляя $x_i = a \cdot (u_i a^2 v_i - v_i a^2 u_i) \cdot a$, получаем тождество $g(u_i, v_i)$, выполненное в кольце $R$, причем оно содержит однородную компоненту, порожденную произведениями элементов из $A_G$ $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} a u_1 a^2 v_1 a \dots u_n a^2 v_n a \cdot a_{n+1,j}$. Так как $a$ — неделитель нуля в $R$, то из (8) следует, что тензор $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} a \otimes a^2 \otimes \dots \otimes a \cdot a_{nj} \cdot a \otimes a^2 \otimes a \cdot a_{nj}$ ненулевой и, значит, тождество $g(u_i, v_i)$ ненулевое. Далее, $R$ лежит в кольце матриц $D_k$, значит, индексы нильпотентных элементов кольца $R$ ограничены, $R$ первично и в $R$ выполнено ненулевое обобщенное полиномиальное тождество $g(u_i, v_i)$. Значит, по теореме 8 из [4] $R$ — PI-кольцо.

Предложение 9 доказано.

Теорема 4 следует из предложений 8 и 9.

Автор выражает признательность за внимание к работе А. В. Михалёву.

# Литература

[1] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Обобщенные групповые тождества в классических группах // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 6. — С. 155–156.

[2] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Обобщенные групповые тождества в классических группах // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1982. — Т. 114. — С. 96–119.

[3] Томанов Г. М. Обобщенные групповые тождества в линейных группах // Докл. АН БССР — 1982. — Т. 26, № 1. — С. 9–12.

[4] Бейдар. К. И. Полупервичные кольца с обобщенным тождеством. — Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 4. — С. 249–250.

[5] Бахтурин. Ю. А. Основные структуры современной алгебры. — М.: Наука, 1990. — 318 с.

*Статья поступила в редакцию в апреле 1995 г.*