Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. С. Никольский, Чж. Пэн, Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике,
*Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 11, 1923–1927

https://www.mathnet.ru/de8489

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.168
25 апреля 2025 г., 03:03:09

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.977.1

М. С. НИКОЛЬСКИЙ, ЧЖ. ПЭН

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НАРУШЕНИЕМ В ДИНАМИКЕ

Настоящая работа продолжает исследования [1, 2] по задачам управления с возможными нарушениями в динамике управляемой системы.

Рассмотрим линейную дифференциальную игру, в ходе которой возможно появление нарушения в механизме преследующего игрока, например: помехи, ослабление тяги двигателя или даже поломка управляющего блока на некоторое время. В настоящей статье рассмотрим последний случай. Пусть игра описывается следующим уравнением и начальным условием:

$$\dot{x}=Ax-\alpha_\theta(t)u+v,\ x(0)=x_0, \tag{1}$$

где $x$ — вектор, принадлежащий $n$-мерному евклидову арифметическому пространству $R^n$; $A$ — $(n\times n)$-матрица; $u$ и $v$ — управления, подчиненные соответственно догоняющему и убегающему игрокам, причем $u\in P$, $v\in Q$, где $P$ и $Q$ суть непустые выпуклые компакты из $R^n$; скалярная функция $\alpha_\theta(t)$ определяется формулой

$$\alpha_\theta(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\notin[\theta,\theta+h], \\ 0 & \text{при } t\in[\theta,\theta+h], \end{cases}$$

где $h>0$ — константа, характеризующая длительность нарушения у догоняющего игрока. Величина $\theta$ обозначает момент появления нарушения: при $t\in[\theta,\theta+h]$ догоняющий теряет контроль над динамической системой (1), а через определенное время $h$ этот контроль восстанавливается (предполагается, что догоняющий игрок всегда может справиться с нарушением за время $h$). В $R^n$ задано непустое выпуклое замкнутое множество $M$ — терминальное множество.

Предполагается, что догоняющий игрок знает матрицу $A$, выпуклые компакты $P$, $Q$, начальное состояние $x_0$, терминальное множество $M$ и функцию $v_t(\cdot)=\{v(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ при $t\geqslant 0$.

Считается, что начальный момент нарушения догоняющему неизвестен и что о его наступлении он узнает в момент $\theta\geqslant 0$.

Цель догоняющего игрока — выведение точки $x(t)$ на терминальное множество $M$ из начальной точки $x_0$ за конечное время при произвольном $\theta\geqslant 0$ и произвольной измеримой функции $v(t)\in Q$, $t\geqslant 0$.

Введем класс $\mathfrak{C}$ управлений догоняющего с памятью.

Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{C}$ однопараметрическое семейство отображений $\mathscr{F}(t, v_t(\cdot))$ в множество $P$, определенных $\forall t>0$ на множестве измеримых функций $v(s)\in Q$, $0\leqslant s\leqslant t$, и обладающих свойством суперпозиционной измеримости: функция $u(t)=\mathscr{F}(t, v_t(\cdot))$ измерима при $t\geqslant 0$ для произвольной измеримой функции $v(s)\in Q$, $s\geqslant 0$.

В качестве допустимых стратегий догоняющего будем рассматривать пары $\mathscr{U}=(\mathscr{F}_1(\cdot), \mathscr{F}_2^\theta(\cdot))$, где $\mathscr{F}_1(\cdot)\in\mathfrak{C}$, $\mathscr{F}_2^\theta(\cdot)\in\mathfrak{C}$ $\forall\theta\geqslant 0$. Решение задачи Коши (1) при фиксированных $\mathscr{U}$, $\theta\geqslant 0$ и измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, понимается так. При $0 \leqslant t \leqslant \theta$ оно совпадает с решением $y(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{y} = Ay - \mathscr{F}_1(t, v(\cdot)) + v(t), \tag{2}$$

$$y(0) = x_0. \tag{3}$$

При $t \geqslant \theta$ оно совпадает с решением $z(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{z} = Az - \alpha_\theta(t) \mathscr{F}_2^\theta(t, v_t(\cdot)) + v(t), \tag{4}$$

$$z(\theta) = y(\theta). \tag{5}$$

В силу сделанных соглашений любая тройка $\mathscr{U}$, $\theta \geqslant 0$ и измеримая функция $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, однозначно определяют момент первого попадания соответствующего решения $x(t, \mathscr{U}, \theta, v(\cdot))$ задачи Коши (1) на терминальное множество $M$, его мы обозначим через $T(x_0, \mathscr{U}, \theta, v(\cdot))$ (если $x(t, \mathscr{U}, \theta, v(\cdot)) \notin M$ при всех $t \geqslant 0$, то полагаем $T(x_0, \mathscr{U}, \theta, v(\cdot)) = +\infty$).

Займемся следующей задачей. Найти начальные точки $x_0$, из которых игра преследования может быть закончена за конечное время на терминальном множестве $M$ при произвольных $\theta \geqslant 0$ и измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, т. е.

$$\inf_{\mathscr{U}} \sup_{\theta \geqslant 0} \sup_{v(\cdot)} T(x_0, \mathscr{U}, \theta, v(\cdot)) < +\infty. \tag{6}$$

Такую задачу иногда называют задачей качества.

Здесь дадим достаточные условия, при которых для данного $x_0 \notin M$ выполняется (6).

Используемый нами метод решения задачи качества основывается на формуле Коши для решения уравнения (1) при начальном условии $x(0) = x_0$ и измеримых $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$ и $\theta \geqslant 0$:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (-\alpha_\theta(s) u(s) + v(s)) ds.$$

В дальнейшем будут использоваться операции интегрирования многозначных отображений (см., например, [3]), алгебраического суммирования множеств «$+$», геометрической разности «$\overset{*}{-}$» множеств [4, 5] и альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина [4, 5] в нестационарном варианте (см. [6]).

Алгебраической суммой множеств $A$ и $B$ называется множество $A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}$. Если $A$ и $B$ непусты, замкнуты и выпуклы, причем одно из них компактно, то $A + B$ суть непустое выпуклое замкнутое множество.

Геометрической разностью множеств $A$ и $B$ называется множество $A \overset{*}{-} B = \{c\colon c + B \subset A\}$. Если $A$ и $B$ непусты, замкнуты и выпуклы, то $A \overset{*}{-} B$ будет выпуклое замкнутое множество.

Пусть $\Omega$ — многозначное отображение из $R^1$ в множество всех непустых компактных подмножеств из $R^n$. Интегралом от многозначного отображения $\Omega(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ называется множество $G = \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \colon f(t) \in \Omega(t) \right\}$. Здесь в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным суммируемым ветвям $f(t)$ многозначного отображения $\Omega(t)$. О свойствах этого интеграла см., например, [3].

Перейдем к определению альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина [4, 5] в нестационарном варианте (см. [6]).

Пусть на отрезке $[p, q]$, где $p < q$, заданы измеримые многозначные отображения $U(t)$, $V(t)$ [3], равномерно ограниченные на $[p, q]$, т. е. $U(t) \subset S_R(0)$, $V(t) \subset S_R(0)$ $\forall t \in [p, q]$, где $S_R(0) = \{x \in R^n \colon |x| \leqslant R\}$, $R > 0$ — достаточно большая константа. Пусть в $R^n$ фиксировано некоторое непустое замкнутое выпуклое множество $B$ — концевое множество интегрирования.

Рассмотрим рациональное разбиение $\omega$ отрезка $[p, q]$: $p=\tau_0<\tau_1<\ldots$ $\ldots<\tau_k=q$, где $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ — рациональные числа. Ему поставим в соответствие следующее множество:

$$\Sigma_\omega=(\ldots(B+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(\tau)d\tau \overset{*}{-} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} V(\tau)d\tau)+$$

$$+\int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} U(\tau)d\tau \overset{*}{-} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} V(\tau)d\tau)+\ldots+\int_{\tau_0}^{\tau_1} U(\tau)d\tau \overset{*}{-} \int_{\tau_0}^{\tau_1} V(\tau)d\tau,$$

где порядок выполнения операций $+$, $\overset{*}{-}$ определяется скобками в направлении изнутри вовне. Множество $\Sigma_\omega$ называется альтернированной суммой. Заметим, что $\Sigma_\omega$ может оказаться пустым множеством.

Определение 2. Будем называть пересечение множеств $\Sigma_\omega$ по всем возможным рациональным разбиениям $\omega$ альтернированным интегралом Л. С. Понтрягина. Обозначим его символом

$$\int_p^{B,q} [U(\tau)d\tau * V(\tau)d\tau]. \tag{7}$$

Используя известные свойства операций $+$, $*$ (см. [4, 5]) и свойства многозначных отображений (см. [3]), можно показать, что если $\bigcap\limits_\omega \Sigma_\omega$ непусто, то альтернированный интеграл является замкнутым выпуклым множеством.

Аналогично работе [6] без больших изменений доказывается следующий факт. Пусть рассматриваемый альтернированный интеграл (см. (7)) непуст. Тогда $\forall \varepsilon>0$, где $p+\varepsilon\leqslant q$, справедливо следующее включение:

$$\int_p^{B,q} [U(\tau)d\tau * V(\tau)d\tau] \subset (\int_{p+\varepsilon}^{B,q} [U(\tau)d\tau * V(\tau)d\tau]+$$

$$+\int_p^{p+\varepsilon} U(\tau)d\tau) * \int_p^{p+\varepsilon} V(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Теперь вернемся к исходной задаче. Построим альтернированный интеграл

$$W_\theta(t, \tau)=\int_t^{M,\tau} [e^{(\tau-s)A}\alpha_\theta(s)Pds * e^{(\tau-s)A}Qds], \tag{9}$$

где $0\leqslant t\leqslant\tau$, $\theta\geqslant 0$.

Положим

$$W(t, \tau)=\bigcap_{\theta\in[t,\tau]} W_\theta(t, \tau). \tag{10}$$

Оказывается, справедлива

Теорема. *Пусть для некоторого* $x_0\notin M$ *существует такое* $\tau_0>0$, *при котором выполняется следующее включение:*

$$e^{\tau_0 A}x_0\in W(0, \tau_0). \tag{11}$$

*Пусть для любого* $t:0\leqslant t\leqslant\tau_0$ *существует* $\gamma\in[t, \tau_0]$ *такое, что для него имеет место равенство*

$$W(t, \tau_0)=W_\gamma(t, \tau_0). \tag{12}$$

*Тогда игру преследования (1) можно закончить за время* $\tau_0$ *при любом* *измеримом управлении убегающего игрока $v(t)\in Q$, $t\geqslant 0$, и при любом $\theta\geqslant 0$, т. е. выполняется соотношение (6).*

Доказательство. Из (10), (11) и свойств альтернированного интеграла следует, что $W_\theta(t,\tau_0)\neq\varnothing$ при $t\in[0,\tau_0]$ и $\theta\in[0,\tau_0]$. В силу (8) имеем включение

$$W_\theta(t,\tau_0)\subset\Big(W_\theta(t+\varepsilon,\tau_0)+\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}\alpha_\theta(s)P\,ds\Big)\underline{*}\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Q\,ds \quad (13)$$

при любых $\varepsilon\in[0,\tau_0-t]$, $\theta\in[0,\tau_0]$.

Для дальнейшего нам будет полезен следующий факт. Пусть $\{\Phi_r\}$ — некоторое семейство непустых множеств, зависящих от параметра $r\in I$, где $I$ — некоторое множество индексов. Пусть существует некоторый индекс $r'\in I$, для которого $\bigcap_{r\in I}\Phi_r=\Phi_{r'}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\bigcap_{r\in I}(\Phi_r+S)=\Big(\bigcap_{r\in I}\Phi_r\Big)+S, \quad (14)$$

$$\bigcap_{r\in I}(\Phi_r\underline{*}S)=\Big(\bigcap_{r\in I}\Phi_r\Big)\underline{*}S, \quad (15)$$

где $S$ — некоторое непустое множество, не зависящее от параметра $r$. Пусть $S_1$, $S_2$ — некоторые непустые не зависящие от $r$ множества, тогда с помощью (14), (15) легко показать, что

$$\bigcap_{r\in I}\big((\Phi_r+S_1)\underline{*}S_2\big)=\Big(\Big(\bigcap_{r\in I}\Phi_r\Big)+S_1\Big)\underline{*}S_2. \quad (16)$$

Из (10), (12) с помощью (16) получаем

$$\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}W_\theta(t,\tau_0)\subset\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}\Big\{\Big(W_\theta(t+\varepsilon,\tau_0)+\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}P\,ds\Big)\underline{*}\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Q\,ds\Big\}=\Big\{\Big(\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}W_\theta(t+\varepsilon,\tau_0)\Big)+\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}P\,ds\Big\}\underline{*}\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Q\,ds. \quad (17)$$

Так как

$$\bigcap_{\theta\in[t,\tau_0]}W_\theta(t,\tau_0)\subset\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}W_\theta(t,\tau_0), \quad (18)$$

то из (13) следует

$$\bigcap_{\theta\in[t,\tau_0]}W_\theta(t,\tau_0)\subset\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}\Big\{\Big(W_\theta(t+\varepsilon,\tau_0)+\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}\alpha_\theta(s)P\,ds\Big)\underline{*}\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Q\,ds\Big\}. \quad (19)$$

Так как $\alpha_\theta(s)=1$ для $s\in[t,t+\varepsilon)$, $\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]$, то правая часть включения (19) равна множеству

$$\bigcap_{\theta\in[t+\varepsilon,\tau_0]}\Big\{\Big(W_\theta(t+\varepsilon,\tau_0)+\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}P\,ds\Big)\underline{*}\int_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Q\,ds\Big\}.$$

Из (10), (17)—(19) следует

$$W(t,\tau_0)\subset\left(W(t+\varepsilon,\tau_0)+\int\limits_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Pds\right)\underset{-}{*}\int\limits_t^{t+\varepsilon}e^{(\tau_0-s)A}Qds,\qquad(20)$$

где $0\leqslant t\leqslant\tau_0$, $\varepsilon\leqslant\tau_0-t$.

Используя определение множества $W(t,\tau)$ и свойство (20), можно показать, что множество $B=\{(t,x):t\in[0,\tau_0],\quad e^{(\tau_0-t)A}x\in W(t,\tau_0)\}$ является $u$-стабильным (см. [7]) для дифференциальной игры $\dot{x}=Ax-u+v$, $u\in P$, $v\in Q$ с терминальным множеством $M$.

Отсюда и в силу теоремы 2 из [8] следует существование такого $\tilde{\mathscr{F}}_1\in\mathfrak{C}$, что при любой измеримой функции $v(\cdot)$ решение $y(t)=y(t,x_0,\tilde{\mathscr{F}}_1(\cdot),v(\cdot))$ задачи Коши (2), (3) с $\mathscr{F}_1=\tilde{\mathscr{F}}_1$ удовлетворяет следующему включению:

$$e^{(\tau_0-t)A}y(t,x_0,\tilde{\mathscr{F}}_1(\cdot),v(\cdot))\in W(t,\tau_0)\qquad(21)$$

для $t\in[0,\tau_0]$.

Допустим, нарушение происходит в момент $\theta\in[0,\tau_0]$, тогда в силу (21) имеем $e^{(\tau_0-\theta)A}y(\theta,x_0,\tilde{\mathscr{F}}_1(\cdot),v(\cdot))\in W(\theta,\tau_0)$. Но из определения $W(t,\tau)$ следует $W(\theta,\tau_0)\subset W_\theta(\theta,\tau_0)$. Поэтому имеет место включение

$$e^{(\tau_0-\theta)A}y(\theta,x_0,\tilde{\mathscr{F}}_1(\cdot),v(\cdot))\in W_\theta(\theta,\tau_0).$$

Теперь пусть $\theta\in[0,\tau_0]$ и $\xi\in R^n$ таковы, что $e^{(\tau_0-\theta)A}\xi\in W_\theta(\theta,\tau_0)$. Тогда в силу теоремы 2 из [8] следует существование такого $\mathscr{F}^{\theta,\xi}\in\mathfrak{C}$, что для решения $x(t,\mathscr{F}^{\theta,\xi}(\cdot),v(\cdot))$ задачи Коши

$$\dot{x}=Ax-\alpha_\theta(t)\mathscr{F}^{\theta,\xi}(t,v_t(\cdot))+v(t),$$
$$x(\theta)=\xi,$$

при произвольной измеримой функции $v(t)\in Q$, $t\geqslant0$, выполняется включение

$$x(\tau_0,\mathscr{F}^{\theta,\xi}(\cdot),v(\cdot))\in M.\qquad(22)$$

Положим при $\theta\in[0,\tau_0]$ $\tilde{\mathscr{F}}_2^\theta$ равной $\mathscr{F}^{\theta,\xi}$, где $\xi=y(\theta,x_0,\tilde{\mathscr{F}}_1(\cdot),v(\cdot))$, а при $\theta>\tau_0$ положим $\tilde{\mathscr{F}}_2^\theta$ равной $\tilde{\mathscr{F}}_2^{\tau_0}$. Используя соотношения (21), (22) и определение $\tilde{u}=(\tilde{\mathscr{F}}_1,\tilde{\mathscr{F}}_2^\theta)$, нетрудно видеть, что стратегия $\tilde{u}$ гарантирует для преследующего игрока окончание преследования на множество $M$ за время $\tau_0$ при произвольной измеримой $v(t)\in Q$, $t\geqslant0$, и при любом $\theta\geqslant0$. Итак, теорема доказана.

## Литература


1. Никольский М. С. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1317—1320.
2. Никольский М. С. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 185. С. 181—186.
3. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194—252.
4. Понтрягин Л. С. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764—766.
5. Понтрягин Л. С. // Мат. сб. Нов. сер. 1980. Т. 112, вып. 3. С. 307—330.
6. Никольский М. С. // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1969. № 3. С. 65—73.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. Гусятников П. Б. // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 5. С. 917—924.



*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*



*Поступила в редакцию 6 июня 1994 г.*