ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 1995, том 33, № 5, с. 738 - 748

УДК 532.517.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

© 1995 г. А. Ф. Курбацкий, С. В. Поросева, С. Н. Яковенко

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 14.09.94 г.

Представлены численные результаты, характеризующие поведение моментов турбулентных характеристик второго и третьего порядков при развитом турбулентном течении в круглой трубе, вращающейся относительно продольной оси. Турбулентный перенос описывается с помощью дифференциальных уравнений модели вторых моментов и модели градиентного переноса для корреляций третьего порядка. Сопоставление результатов вычислений с экспериментальными данными показывает, что используемые модели турбулентного переноса в целом адекватно описывают подавление турбулентности во вращающемся турбулентном потоке.

Введение. Турбулентные закрученные течения часто встречаются в технике и окружающей среде. В этой связи исследование параметров таких течений представляет практический интерес.

Особенности турбулентного переноса в таких течениях сводятся к существенному уменьшению процессов переноса в радиальном направлении.

В [1, 2] проведено численное исследование влияния вихревой закрутки на статистические характеристики потока на основе полуэмпирических уравнений, описывающих поведение полей средней скорости и вторых моментов в приближении локального равновесия. Показано, что воздействие массовых сил в закрученном течении (центробежное и кориолисово ускорения) подобно воздействию ускорения силы тяжести в потоке с переменной плотностью (стратификацией) и приводит к уменьшению коэффициентов переноса импульса и тепла.

В данной работе представлены результаты расчетов первых, вторых и третьих моментов поля скорости турбулентного течения в круглой трубе, вращающейся вокруг продольной оси. Компоненты тензора турбулентных напряжений определяются из дифференциальных уравнений турбулентного переноса (модель вторых моментов). Для вычисления моментов поля скорости третьего порядка использована модель градиентного переноса.

Модель вторых моментов поля скорости. Модель для описания поведения моментов поля скорости второго порядка включает дифференциальные уравнения турбулентного переноса для вектора средней скорости и тензора турбулентных напряжений [3 - 5], а также дифференциальные уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности E и скорости ее диссипации ε.

Из дифференциальных уравнений турбулентного переноса для вторых моментов могут быть получены в приближении локального баланса алгебраические выражения для вычисления турбулентных напряжений. Простейший вариант представляет собой E–ε-модель турбулентности, в которой напряжение Рейнольдса $\langle u_i u_j \rangle$ вычисляется на основе МГП с использованием изотропного выражения для коэффициента турбулентной вязкости. Заметим, что E–ε-модель турбулентности с изотропным коэффициентом турбулентной вязкости не дает возможности без дополнительной модификации воспроизвести [3] анизотропию компонент тензора турбулентных напряжений $\langle u_i u_j \rangle$.

Эффект подавления турбулентных пульсационных характеристик в закрученном потоке учитывается введением в ε-уравнение дополнительного слагаемого, включающего "число Ричардсона закрутки" [6, 7]. Демпфирующее влияние стенки на поперечные пульсации скорости учитывается с помощью поправок к стандартной модели [8, 9] для корреляции давление–сдвиг скорости в уравнениях, определяющих вторые моменты. Для учета влияния стенки модифицированы члены деструкции в уравнениях для $\langle u_i u_j \rangle$ и ε [10].

Для описания течения во вращающейся трубе применяется цилиндрическая система координат $x^i = (x, r, \varphi)$, где x отсчитывается вдоль оси трубы, r – в радиальном направлении, а φ – в азимутальном направлении. Используется тензорная форма записи величин для произвольной криволинейной системы координат. В цилиндрических координатах компоненты средней и пульсационной скоростей имеют вид: $U_i = (U, V, rW)$, $U^i = (U, V, W/r)$, $u_i = (u, v, rw)$, $u^i = (u, v, w/r)$. Система уравнений переноса для вектора средней скорости и тензора турбулентных напряжений для стационарного

несжимаемого течения в общей тензорной форме записывается в виде

$$U^i_{,i} = 0, \quad U^j U_{i,j} = \nu g^{jk} U_{i,jk} - \langle u_i u^j \rangle_{,j} - \hat{p}_{,i}/\rho, \tag{1}$$

$$U^k \langle u_i u_j \rangle_{,k} = \nu \left(g^{km} \langle u_i u_j \rangle_{,k} \right)_{,m} + D_{ij} + P_{ij} + \pi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где $D_{ij} = -\langle u_i u_j u^m \rangle_{,m} - (\langle p u_i \rangle_{,j} + \langle p u_j \rangle_{,i})/\rho$ – турбулентный перенос; $P_{ij} = -\langle u_j u^k \rangle U_{i,k} - \langle u_i u^k \rangle U_{j,k}$ – порождение; $\pi_{ij} = \langle p(u_{i,j} + u_{j,i}) \rangle/\rho$ – корреляция давление–сдвиг скорости; $\varepsilon_{ij} = 2\nu g^{km} \langle u_{i,m} u_{j,k} \rangle$ – диссипация. В (1) и (2) символы ",i" означают ковариантное дифференцирование по координате x^i, g^{ij} – метрический тензор, $\langle \ldots \rangle$ – осреднение по времени, p – давление, ρ – плотность, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Для получения замкнутого вида системы (1), (2) необходимы модельные представления для членов D_{ij}, π_{ij} и ε_{ij}. Простейшее модельное выражение градиентного типа для процессов турбулентной диффузии (моментов третьего порядка) может быть записано в следующем виде [11]:

$$-\langle u_i u_j u^m \rangle = -g^{km} \langle u_i u_j u_k \rangle = g^{km} c_s \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle \langle u_i u_j \rangle_{,\alpha}. \tag{3}$$

Здесь $c_s = 0.18$ – эмпирический коэффициент. Уравнение для кинетической энергии турбулентности, получаемое из свертки уравнения (2) с учетом (3), имеет вид

$$U^k E_{,k} = \left[g^{km} \left(\nu E_{,k} + c_s \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle E_{,\alpha} \right) \right]_{,m} + P - \varepsilon - \frac{2\nu E}{x_n^2}, \tag{4}$$

где $E = (1/2)\langle u_i u^i \rangle$, $P = -(1/2)[\langle u_i u^k \rangle U^i_{,k} + \langle u^i u^k \rangle U_{i,k}]$ – генерация энергии турбулентности; ε – диссипация. Последнее слагаемое появляется в (4) как результат учета в стандартном выражении для $\varepsilon_{ij} = 2/3\delta_{ij}\varepsilon$, влияние низких чисел Рейнольдса вблизи стенки [10]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} g_{ij} \varepsilon + 2\nu \frac{\langle u_i u_j \rangle}{x_n^2}, \tag{5}$$

где x_n – расстояние до стенки.

Корреляция давление–сдвиг скорости представляется [5] в виде суммы трех слагаемых

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(2)} + (\pi_{ij}^{'(1)} + \pi_{ij}^{'(2)}) f(x_n). \tag{6}$$

Первое слагаемое описывает стремление турбулентности к изотропному состоянию в отсутствие сдвига средней скорости и влияния стенки

$$\pi_{ij}^{(1)} = -c_1 \frac{\varepsilon}{E} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} g_{ij} E \right) \quad (c_1 = 1.5), \tag{7}$$

второе – вклад градиента средней скорости

$$\pi_{ij}^{(2)} = -c_2 (P_{ij} - 2/3 g_{ij} P) \quad (c_2 = 0.6), \tag{8}$$

третье – влияние стенки [9]

$$\pi_{ij}^{'(1)} = c_1' \frac{\varepsilon}{E} [\langle u_n^2 \rangle g_{ij} - 3/2 (\langle u_n u_j \rangle g_{in} + \langle u_n u_i \rangle g_{jn})], \tag{9}$$

$$\pi_{ij}^{'(2)} = c_2' [\pi_{nn}^{(2)} g_{ij} - 3/2 (\pi_{nj}^{(2)} g_{in} + \pi_{ni}^{(2)} g_{jn})] \tag{10}$$

с демпфирующей функцией $f = (1/5)E^{3/2}/(\varepsilon x_n)$, где индекс n означает направление по нормали к стенке ($c_1' = c_2' = 0.3$).

Входящая в модельные выражения величина ε определяется из приближенно замкнутого дифференциального уравнения переноса

$$U^k \varepsilon_{,k} = \left[g^{km} \left(\nu \varepsilon_{,k} + c_\varepsilon \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle \varepsilon_{,\alpha} \right) \right]_{,m} + \{ c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2}^* \varepsilon \} \frac{\varepsilon}{E} - \frac{2\nu\varepsilon}{x_n^2} f_1, \tag{11}$$

где функция $f_1 = \exp(-0.5 x_n u_*/\nu)$, $c_\varepsilon = 0.18$, $c_{\varepsilon 1} = 1.35$, $c_{\varepsilon 2} = 1.8$, $c_{\varepsilon 2}^* = \max[1.4, c_{\varepsilon 2} f_2 (1 - c_{\varepsilon 3} \mathrm{Ri}_W)]$, $f_2 = 1 - 2/9 \exp[-(E^2/(6\nu\varepsilon))^2]$.

Число Ричардсона закрутки Ri_W в (11) описывает воздействие кривизны линий тока на турбулентность по аналогии с влиянием стратификации среды на турбулентный перенос [6]. Кривизна линий тока учитывается в члене деструкции в (11). Выражение для числа $\mathrm{Ri}_W = [(W/r)/(\partial W/\partial r)]/[(\partial U/\partial r)^2 + (\partial W/\partial r)^2]$ записано, как и в [7], по аналогии с числом Ричардсона в стратифицированных турбулентных течениях [3, 9]. Модификация члена деструкции в уравнении (11) основана на гипотезе, что стабилизирующий эффект закрутки может быть учтен через линейный масштаб турбулентных вихрей $L(=E/\varepsilon)$, который при $\mathrm{Ri}_W > 0$ уменьшается, т.е. через увеличение диссипации ε, приводящее к подавлению энергии турбулентности E. Величина коэффициента $c_{\varepsilon 2}^*$ принимается ограниченной снизу ($c_{\varepsilon 2}^* \geq 1.4$), чтобы диссипация ε не становилась "слишком большой" из-за уменьшения коэффициента $c_{\varepsilon 2} f_2 (1 - c_{\varepsilon 3} \mathrm{Ri}_W)$ с ростом Ri_W при увеличении скорости вращения трубы W_0. Значение коэффициента $c_{\varepsilon 3} = 2.0$ найдено путем численной оптимизации.

Сформулированные выше модельные представления (5) - (11) приводят к замкнутой системе

уравнений турбулентного переноса для первых и вторых моментов. Для установившегося осесимметричного течения в трубе уравнения модели в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV) = 0, \tag{12}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu\frac{\partial U}{\partial r}-\langle uv\rangle\right)\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}, \tag{13}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial r}+V\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu\frac{\partial W}{\partial r}-\langle vw\rangle\right)\right]-\nu\frac{W}{r^2}-\frac{\langle vw\rangle}{r}, \tag{14}$$

$$U\frac{\partial E}{\partial x}+V\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial E}{\partial r}\right]+P-\varepsilon-\frac{2\nu E}{(R-r)^2}, \tag{15}$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_\varepsilon\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right]+ \{c_{\varepsilon 1}P-c^*_{\varepsilon 2}\varepsilon\}\,(\varepsilon/E)-[2\nu\varepsilon/(R-r)^2]f_1, \tag{16}$$

где U, V и W – компоненты вектора средней скорости в продольном, радиальном и азимутальном направлениях; u, v и w – соответствующие пульсационные компоненты скорости. Входящие в (13) - (16) турбулентные напряжения находятся из дифференциальных уравнений переноса (2), приближенно замкнутых согласно выражениям (3), (5) - (10). Для отдельных компонент тензора напряжений эти уравнения записываются в виде

$$U\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r}\right]+ P_{11}+\{-c_1\frac{\varepsilon}{E}(\langle u^2\rangle-\frac{2}{3}E)- c_2(P_{11}-\frac{2}{3}P)+\pi' f\}-\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle u^2\rangle, \tag{17}$$

$$U\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial r}-2\langle vw\rangle\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial r}\right]- -\frac{2}{r}c_s\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle vw\rangle\right)+\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\right]+ +2\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle w^2\rangle-\langle v^2\rangle}{r^2}+P_{22}+ +\{-c_1\frac{\varepsilon}{E}(\langle v^2\rangle-\frac{2}{3}E)-c_2(P_{22}-\frac{2}{3}P)-2\pi' f\}- -\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle v^2\rangle, \tag{18}$$

$$U\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial r}\right]+ +\frac{2}{r}c_s\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle vw\rangle\right)+\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\right]- -2\langle vw\rangle\frac{W}{r}-2\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle w^2\rangle-\langle v^2\rangle}{r^2}+P_{33}+ +\{-c_1\frac{\varepsilon}{E}(\langle w^2\rangle-\frac{2}{3}E)-c_2(P_{33}-\frac{2}{3}P)+\pi' f\}- -\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle w^2\rangle, \tag{19}$$

$$U\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r}-\langle uw\rangle\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r}\right]- -\frac{c_s}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle uw\rangle\right)+\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r}\right]- -\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle uv\rangle}{r^2}+P_{12}+ +\{-c_1\frac{\varepsilon}{E}\langle uv\rangle-c_2P_{12}-\frac{3}{2}\left(c_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle uv\rangle+c_2'c_2P_{12}\right)f\}- -\left[\frac{2\nu}{(R-r)^2}\right]\langle uv\rangle, \tag{20}$$

$$U\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}-[\langle w^2\rangle-\langle v^2\rangle]\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\right]- -\frac{c_s}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle(\langle w^2\rangle-\langle v^2\rangle)\right)+ +\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial}{\partial r}(\langle w^2\rangle-\langle v^2\rangle)\right.- -4\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle vw\rangle}{r^2}+P_{23}+ +\{-c_1\frac{\varepsilon}{E}\langle vw\rangle-c_2P_{23}-\frac{3}{2}\left(c_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle vw\rangle+ +c_2'c_2P_{23}\right)f\}-\left[\frac{2\nu}{(R-r)^2}\right]\langle vw\rangle, \tag{21}$$

$$U\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r}+\langle uv\rangle\frac{W}{r}=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r}\right]+$$

$$+\frac{c_s}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle uv\rangle\right)+\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r}\right]- \qquad (22)$$

$$-\left(\nu+c_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle uw\rangle}{r^2}+P_{13}+$$

$$+\left\{-c_1\frac{E}{\varepsilon}\langle uw\rangle-c_2P_{13}\right\}-\left[\frac{2\nu}{(R-r)^2}\right]\langle uw\rangle,$$

$$\pi'=c_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle v^2\rangle-c_2'c_2\left(P_{22}-\frac{2}{3}P\right),$$

$$f=\frac{1}{5}\frac{E^{3/2}/\varepsilon}{(R-r)},$$

$$P_{11}=-2\langle uv\rangle\frac{\partial U}{\partial r},\quad P_{22}=2\langle vw\rangle\frac{W}{r},$$

$$P_{33}=-2\langle vw\rangle\frac{\partial W}{\partial r},$$

$$\hat{P}=\frac{1}{2}\left(P_{11}+P_{22}+P_{33}\right),$$

$$P_{12}=-\langle v^2\rangle\frac{\partial U}{\partial r}+\langle uw\rangle\frac{W}{r},$$

$$P_{23}=-\langle v^2\rangle\frac{\partial W}{\partial r}+\langle w^2\rangle\frac{W}{r},$$

$$P_{13}=-\langle uv\rangle\frac{\partial W}{\partial r}-\langle vw\rangle\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Для удобства численной реализации вместо уравнений (18), (19) для $\langle v^2\rangle$, $\langle w^2\rangle$ использованы уравнение (15) для $E = 1/2(\langle u^2\rangle + \langle v^2\rangle + \langle w^2\rangle)$ и уравнение для $\alpha \equiv \langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle$, полученное из (18) и (19). Последняя замена обусловлена наличием в уравнениях для $\langle v^2\rangle$ и $\langle w^2\rangle$ особенности на оси трубы из-за источника вида $\pm 2(\nu + c_s(E/\varepsilon)\langle w^2\rangle)\alpha/r^2$, если $\alpha \neq 0$. Значения $\langle v^2\rangle$ и $\langle w^2\rangle$ определяются по найденным из уравнений переноса величинам E, $\langle u^2\rangle$ и α : $\langle v^2\rangle = E - (\langle u^2\rangle + \alpha)/2$.

Градиент давления $-1/\rho(dP/dx)$ в уравнении (13) находится из условия сохранения расхода в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dx}=\frac{2}{R^2}\left[-r\left(\nu\frac{\partial U}{\partial r}-\langle uv\rangle\right)\Big|_0^R\right]=$$

$$=\frac{2\nu}{R}\left(-\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

На входе во вращающуюся секцию трубы градиент давления $-1/\rho(d\hat{p}/dx) = 2(u_{*0}^2/R)$ известен (u_{*0} – скорость трения на стенке трубы в развитом турбулентном течении, поступающем во вращающуюся секцию). Скорость трения во вращающейся секции трубы определяется из выражения

$$u_*=\left[\nu\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R}\right]^{1/2}.$$

Значения численных коэффициентов модели вторых моментов (12) - (22) c_1, c_2, c_1', c_2', $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, c_ε, c_s соответствуют их "стандартным" значениям [3, 5, 9, 10].

Граничные условия для дифференциальных уравнений переноса модели вторых моментов имеют вид

при $r = 0$ (на оси трубы)

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}=\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r}=\frac{\partial\alpha}{\partial r}=$$

$$=\langle uv\rangle=\langle vw\rangle=\langle uw\rangle=W=0,$$

при $r = R$ (на стенке трубы)

$$U=E=\varepsilon=\langle u^2\rangle=\alpha=\langle uv\rangle=\langle vw\rangle=\langle uw\rangle=0,$$

$$W=W_0>0.$$

Определяющая система уравнений параболического типа для U, W, E, ε и $\langle u_iu_j\rangle$ решалась методом контрольного объема [12].

Вычисления проводились в два этапа: 1) получение развитого течения без закрутки, 2) наложение на развитый поток вращения трубы со скоростью W_0.

На первом этапе вычислений начальный профиль скорости задавался в виде комбинации линейной $U(r) = u_*y^+$ при $0 \le y^+ \le y_R^+$ и степенной $U(r) = Au_{*0}(y^+)^{1/7}$, при $y_R^+ < y^+ \le \mathrm{Re}^*$ функций, где $y^+ = (R-r)u_{*0}/\nu$, $\mathrm{Re}^* = Ru_{*0}/\nu$, $A = 8.74$, $y_R^+ = A^{7/6}$. Величины энергии турбулентности и ее компонент выбирались равными небольшим фоновым значениям: $E(r) = E_0 = 10^{-3}u_*^2$, $\langle u^2\rangle = \frac{2}{3}E_0$, $\alpha = 0$, $\langle uv\rangle|_{x=0} = 0$. Диссипация энергии $\varepsilon(r) = \sqrt{c_\mu f_\mu}E_0(\partial U/\partial r)$ находилась из предположений локального равновесия ($P = \varepsilon$) и градиентной связи ($\langle uv\rangle = -c_\mu f_\mu\frac{E^2}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial r}$, где $c_\mu = 0.09$ и демпфирующая функция $f_\mu = 1 - \exp(-0.01y^+)$ взяты из [10]): $\varepsilon(r) = \sqrt{c_\mu f_\mu}E_0(\partial U/\partial r)$; $\langle uv\rangle|_{x=0} = 0$.

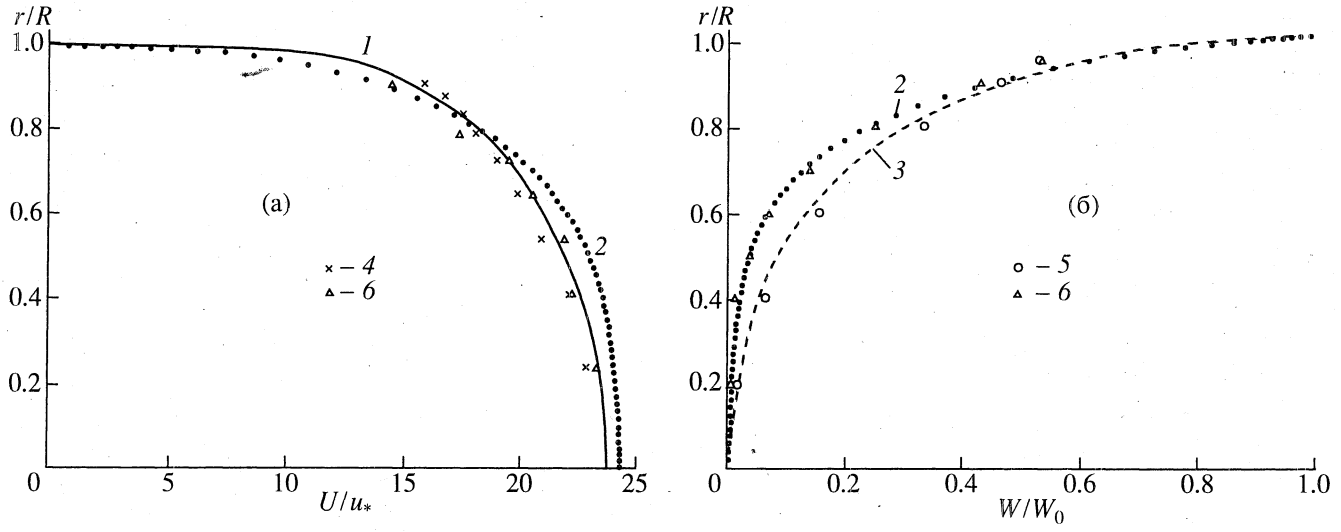

Рис. 1. Профили компонент средней скорости: а – U, б – W для различных значений параметра закрутки потока П. Расчет П: *1* – 0, *2* – 0.6, *3* – 0.15. Опытные данные [13] П: *4* – 0; *5* – 0.15; *6* – 0.6.

На втором этапе вычислений в качестве начальных данных выбирались поперечные профили U, E, ε, $\langle u^2\rangle$, $\alpha \equiv \langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle$, $\langle uv\rangle$, полученные на первом этапе и соответствующие развитому турбулентному потоку в трубе. Остальные искомые функции взяты равными $W(r = R) = W_0$, $W(r < R) = \langle vw\rangle = \langle uw\rangle = 0$.

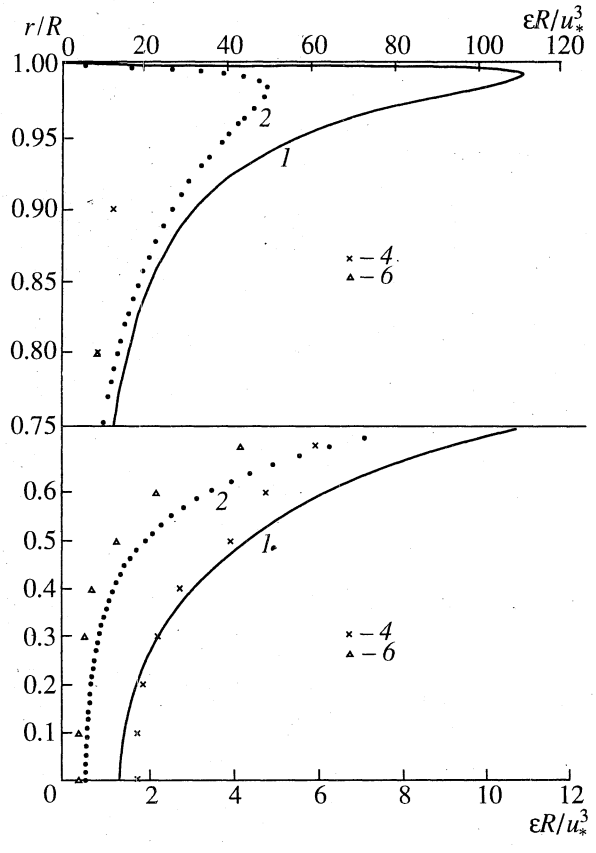

Рис. 2. Профили диссипации кинетической энергии турбулентности (обозначения см. на рис. 1).

Вычисленные характеристики обезразмерены с помощью динамической скорости u_{*0} и радиуса трубы R. Входной параметр $\mathrm{Re}^* = 875$, как и в эксперименте [13], с данными которого сопоставляются результаты расчетов ($R = 3$ см, $U_0 = 10^3$ см/с, $\nu = 0.149$ см^2/с, $u_{*0} = 43.5$ см/с). На первом этапе расчета результаты получены до расстояния $200R$ по координате x вдоль оси трубы, на втором этапе – до $50R$, как и в опыте. Установление течения с ростом x можно характеризовать величиной адвекции энергии турбулентности, уменьшающейся в конце первого этапа расчета до пренебрежимо малой величины: $|U(\partial E/\partial x)|_{\max} \sim 10^{-2}u_{*0}^3/R \ll \varepsilon_{\min}$. В конце второго этапа вычислений относительная величина адвекции гораздо выше и установления характеристик турбулентного течения по x не наблюдалось.

Результаты вычисления моментов поля скорости первого и второго порядков. Результаты численных экспериментов для течения во вращающейся трубе при различных параметрах закрутки представлены на рис. 1 - 6 для сечения трубы $x/R = 50$. Точками обозначены опытные данные [13], кривые соответствуют результатам вычислений по модели вторых моментов.

В опытах [13], с данными которых сопоставляются результаты расчетов, закрученный поток создавался по следующей схеме. Развитый турбулентный поток из невращающегося участка прямой круглой трубы длиной 100 калибров поступал в секцию трубы длиной 25 калибров, вращающуюся вокруг продольной оси с постоянной угловой скоростью. Измерения выполнены в выходном сечении вращающейся секции при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_D = (U_0 2R)/\nu = 4 \times 10^4$. Степень закрутки потока характеризуется параметром

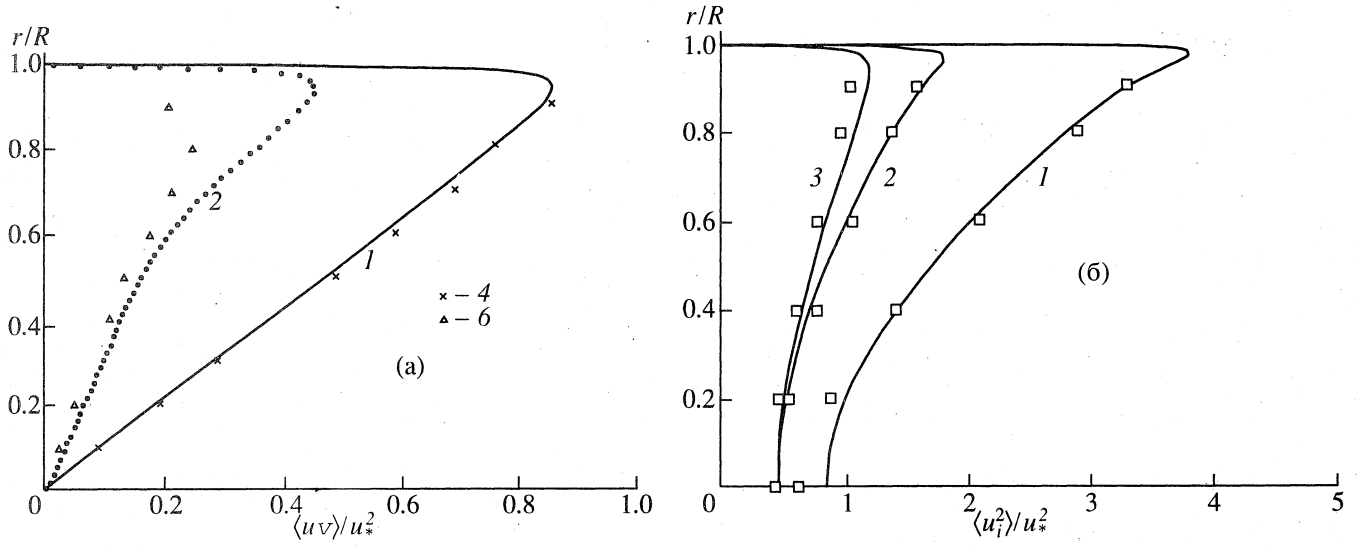

Рис. 3. Профили касательных $\langle uv\rangle$ (а) и нормальных (б) компонент турбулентных напряжений Рейнольдса: а – обозначения см. на рис. 1, б – *1* – $\langle u^2\rangle$, *2* – $\langle v^2\rangle$, *3* – $\langle w^2\rangle$.

закрутки $\Pi = W_0/U_0 = \omega_0 R/U_0$, где ω_0 – угловая скорость вращения трубы, U_0 – скорость потока на оси трубы, R – радиус трубы. Параметр закрутки потока Π варьировался за счет изменения частоты вращения канала.

В незакрученном потоке результаты измерений [13] продольной компоненты средней скорости, напряжений Рейнольдса, энергии турбулентности и скорости ее диссипации удовлетворительно согласуются с известными в литературе данными [14 - 16]. Экспериментальный профиль $U(r)$ при $\Pi = 0$ (рис. 1а) приближенно описывается степенной зависимостью. Результаты измерений диссипации $\varepsilon(r)$ при $\Pi = 0$ хорошо воспроизводятся моделью в области $0.2 < r < 0.6$ (рис. 2). Модель вполне удовлетворительно описывает поведение компонент турбулентных напряжений (рис. 3а) и, в частности, наблюдаемую в опытах анизотропию нормальных напряжений как у стенки, так и на оси потока, где $\langle v^2\rangle = \langle w^2\rangle$ и $\langle u^2\rangle \simeq 2\langle v^2\rangle$ (рис. 3б).

С наложением закрутки на развитый турбулентный поток при неизменном расходе воздуха как в вычислениях, так и в эксперименте наблюдается (рис. 1а) некоторое увеличение продольной компоненты средней скорости в приосевой зоне (при $0 \le \Pi \le 0.6$). Под влиянием центробежной силы профиль $U(r)$ деформируется: уменьшается наклон профиля (производная $\partial U/\partial r$) вблизи стенки, что свидетельствует об уменьшении турбулентного трения с ростом закрутки потока.

С увеличением частоты вращения трубы относительная величина азимутальной компоненты средней скорости W/W_0 в приосевой области уменьшается (рис. 1б). Распределение $W(r)$ становится с ростом параметра закрутки Π все более неравномерным по радиусу (в выходном сечении вращаемой секции трубы). Как видно из рисунка, модель вторых моментов хорошо описывает поведение азимутальной скорости W/W_0 при наибольшем значении параметра закрутки $\Pi = 0.6$.

Используемая в данной работе модель турбулентности воспроизводит эффект уменьшения пульсационных характеристик E, ε, $\langle u_i u_j\rangle$ с ростом параметра закрутки (преимущественно в приосевой области), наблюдаемый в экспериментах. При этом поведение энергии турбулентности (рис. 4), скорости ее диссипации (рис. 2) и касательных напряжений (рис. 3а) вне пристеночной области потока также удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Отмеченная в незакрученном потоке (рис. 3б) анизотропия компонент энергии турбулентности в целом сохраняется при наличии закрутки как в опытах, так и в вычислениях.

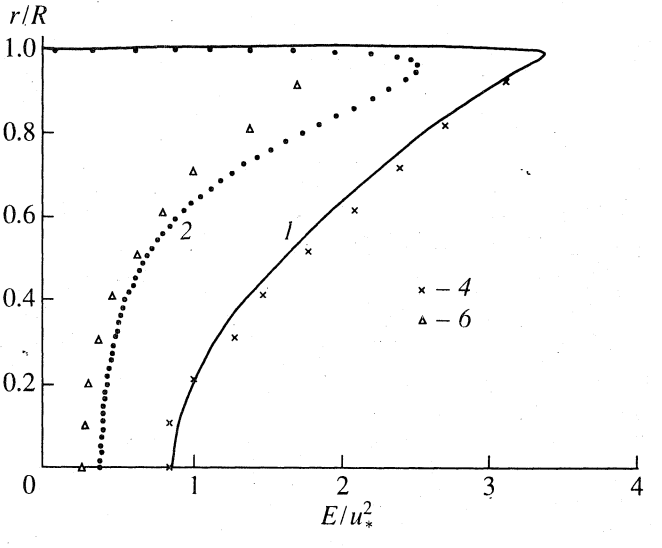

Рис. 4. Профили кинетической энергии турбулентности $E = 1/2\langle u_i u_j\rangle$; обозначения см. на рис. 1.

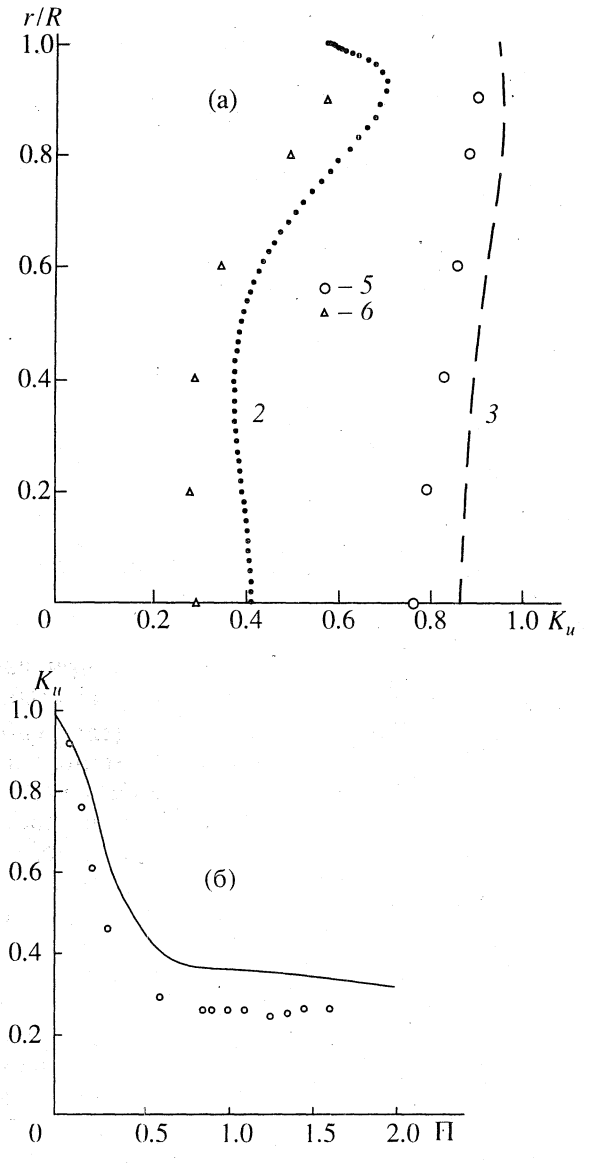

Рис. 5. Коэффициент подавления для продольной составляющей интенсивности турбулентности; а – профили K_u (обозначения см. на рис. 1), б – зависимость K_u от параметра закрутки П, точки – опытные данные [13].

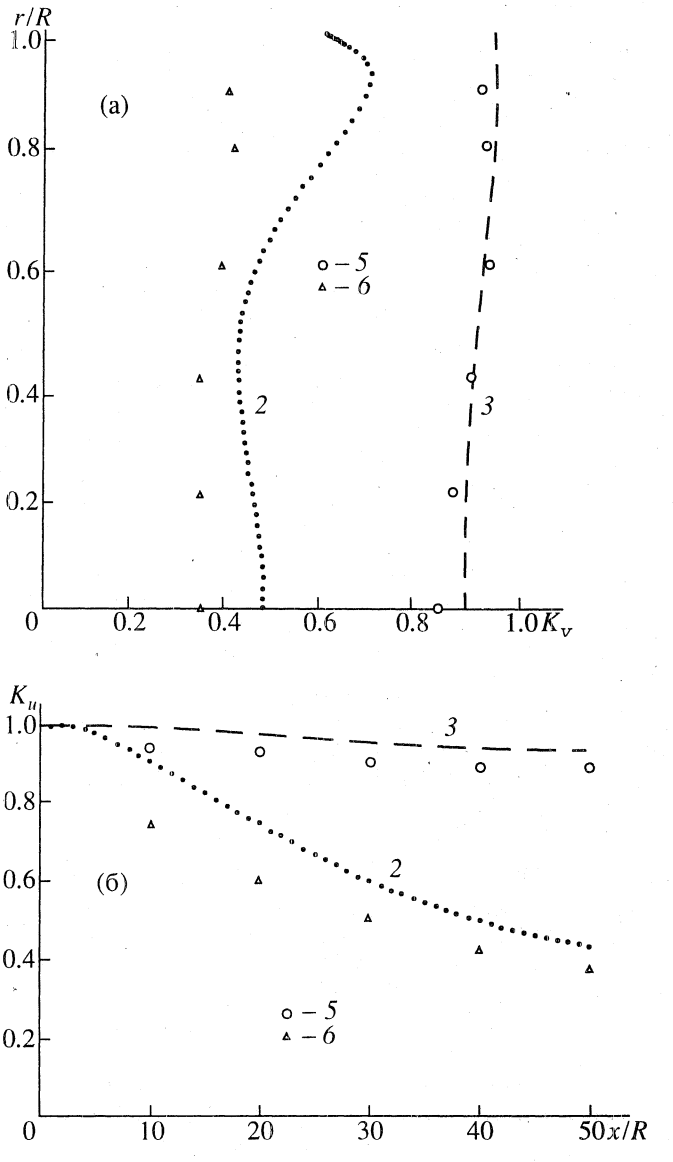

Рис. 6. Зависимость коэффициента подавления K_V от r и K_u от продольной координаты: а – $K_V(r)|_{x=50R}$, б – K_u ($r = 0.6R$, x), обозначения см. на рис. 1.

Влияние закрутки потока на компоненты нормальных напряжений $\langle u_i^2 \rangle$ оценивалось по "коэффициенту подавления" $K_i = \langle u_i^2 \rangle(\Pi > 0)/\langle u_i^2 \rangle(\Pi = 0)$ i-х среднеквадратичных пульсаций скорости. При слабой закрутке ($\Pi \leq 0.3$) наибольшее подавление интенсивности пульсаций наблюдается на оси потока. С увеличением закрутки (при $\Pi \geq 0.6$) максимум подавления смещается в область $0.3 \leq r/R \leq 0.6$. Модель воспроизводит эти эффекты (рис. 5, 6). Вычисленные поперечные профили $K_i(r)$ оказываются ближе всего к измеренным (при $\Pi = 0.6$) вне приосевой области. Наблюдается уменьшение подавления в интервале значений поперечной координаты $0.6 \leq r/R \leq 0.9$. Модель только качественно воспроизводит поведение K_V при $\Pi = 0.6$ и завышает значения коэффициентов подавления при слабой закрутке ($\Pi \leq 0.3$).

Последнее замечание можно отнести и к характеру зависимости K_u (при $r/R = 0$) от параметра закрутки П (рис. 5б). Однако в целом поведение расчетных кривых соответствует наблюдаемому в экспериментах, в частности, при увеличении параметра закрутки (свыше $\Pi = 0.65$) подавления интенсивности пульсаций уменьшается.

Реализованная при численном моделировании маршевая процедура пошагового интегрирования по контрольным объемам дает возможность проследить изменение характеристик течения с

ростом продольной координаты x. Величина коэффициента подавления с ростом x обнаруживает то же поведение, что и в опыте: тенденцию к насыщению как по длине трубы (рис. 6), так и по параметру закрутки. При $r/R = 0.6$ эта тенденция проявляется сильнее и ближе по x к началу вращаемой секции. Влияние закрутки здесь начинает сказываться на расстоянии $x/R \simeq 4$ - 5 от начала, тогда как на оси трубы – на расстоянии $x/R \simeq 10$ - 14. Таким образом, поток не испытывает влияния закрутки в некотором сходящемся конусе на начальном участке вращаемой секции. Расчет дает несколько более позднее по x отклонение от значения $K_u = 1$ в начале секции, чем эксперимент.

Таким образом, наложение закрутки на турбулентный поток приводит к перестройке его характеристик. В потоке газа во вращающейся трубе происходит подавление при малых и умеренных закрутках потока радиального турбулентного переноса, т.е. уменьшение энергии турбулентности, ее диссипации, турбулентных напряжений преимущественно в приосевой области канала. Параметры потока существенно меняются по всей длине вращаемой секции ($0 \le x/R \le 50$). Однако как в эксперименте, так и в вычислениях результаты зависят от дальнейшего увеличения расстояния от входного сечения.

Модель для моментов поля скорости третьего порядка и их вычисление. Модель для описания процессов турбулентной диффузии (третьих моментов) получена из точных незамкнутых уравнений переноса для моментов третьего порядка в приближении локального баланса.

Полное уравнение для моментов третьего порядка в тензорной форме имеет вид

$$U^m \langle u_i u_j u_k \rangle_{,m} = P_{ijk}^{(T)} + P_{ijk}^{(M)} + D_{ijk} + \pi_{ijk} - \varepsilon_{ijk}, \tag{23}$$

где член порождения турбулентности определяется в следующем виде:

$$P_{ijk}^{(T)} = [\langle u_j u_k \rangle \langle u^m u_i \rangle_{,m} + \langle u_k u_i \rangle \langle u^m u_j \rangle_{,m} + \langle u_i u_j \rangle \langle u^m u_k \rangle_{,m}],$$

порождение средним сдвигом

$$P_{ijk}^{(M)} = -[\langle u_j u_k u^m \rangle U_{i,m} + \langle u_k u_i u^m \rangle U_{j,m} + \langle u_i u_j u^m \rangle U_{k,m}],$$

турбулентная и молекулярная диффузия

$$D_{ijk} = -[\langle u_i u_j u_k u^m \rangle - \nu g^{nm} \langle u_i u_j u_k \rangle_{,n}],$$

эффекты давления

$$\pi_{ijk} = \frac{1}{\rho} [\langle p_{,j} u_j u_k \rangle + \langle p_{,j} u_k u_i \rangle + \langle p_{,k} u_i u_j \rangle],$$

диссипация

$$\varepsilon_{ijk} = 2\nu g^{nm} [\langle u_i u_{j,n} u_{k,m} \rangle + \langle u_{i,n} u_j u_{k,m} \rangle + \langle u_{i,n} u_{j,n} u_k \rangle].$$

Полная модель получается из уравнения (23) в пренебрежении адвекцией и вязкой диффузией

$$P_{ijk}^{(T)} + P_{ijk}^{(M)} + D_{ijk} + \pi_{ijk} - \varepsilon_{ijk} = 0. \tag{24}$$

Отметим, что в работе [17] показано, что в круглой струе адвективные члены малы по сравнению с другими членами в уравнении баланса (24).

Для замыкания уравнения (24) для части слагаемых используются следующие модельные представления. Корреляция давление–сдвиг скорости π_{ijk} по аналогии с корреляцией той же природы π_{ij} в уравнении баланса для напряжений Рейнольдса представляется в виде суммы двух частей [18]

$$\pi_{ijk} = \pi_{ijk}^{(1)} + \pi_{ijk}^{(2)}, \tag{25}$$

где $\pi_{ijk}^{(1)} = -c_{f1} P_{ijk}^{(M)}$ учитывает порождение средним сдвигом, а

$$\pi_{ijk}^{(2)} = -(1/c_{f3}) \langle u_i u_j u_k \rangle \frac{\varepsilon}{E} - c_{f2} P_{ijk}^{(T)} \tag{26}$$

– релаксацию третьих моментов (стремление к изотропии).

Для ε_{ijk} используется гипотеза градиентного переноса [18]

$$\varepsilon_{ijk} \sim -\frac{E}{\varepsilon} [\langle u_k u_\alpha \rangle \varepsilon_{ij,\alpha} + \langle u_j u_\alpha \rangle \varepsilon_{ik,\alpha} + \langle u_i u_\alpha \rangle \varepsilon_{jk,\alpha}],$$

где $\varepsilon_{ij} = 2\nu \langle u_{i,m} u_{j,m} \rangle$. С учетом предположения о локальной изотропии для $\varepsilon_{ij} = 2/3 g_{ij} \varepsilon$ результирующее выражение для диссипативного члена имеет вид

$$\varepsilon_{ijk} = -c_{\varepsilon 3} \frac{E}{\varepsilon} \varepsilon_{,m} [\langle u_k u^m \rangle g_{ij} + \langle u_j u^m \rangle g_{ki} + \langle u_i u^m \rangle g_{jk}]. \tag{27}$$

Моменты четвертого порядка выражаются через моменты второго порядка с помощью гипотезы квазинормальности Миллионщикова

$$\langle u_i u_j u_k u^m \rangle = \langle u_j u_k \rangle \langle u^m u_i \rangle + \langle u_i u_j \rangle \langle u^m u_k \rangle + \langle u_k u_i \rangle \langle u^m u_j \rangle. \tag{28}$$

Хотя распределение вероятности турбулентных пульсаций скорости не является гауссовым для течения в круглой трубе, использование гипотезы квазинормальности основывается на допущении, что вносимые ею погрешности не оказывают существенного влияния на поведение моментов третьего порядка, учитывая также и приближенный характер моделирования других

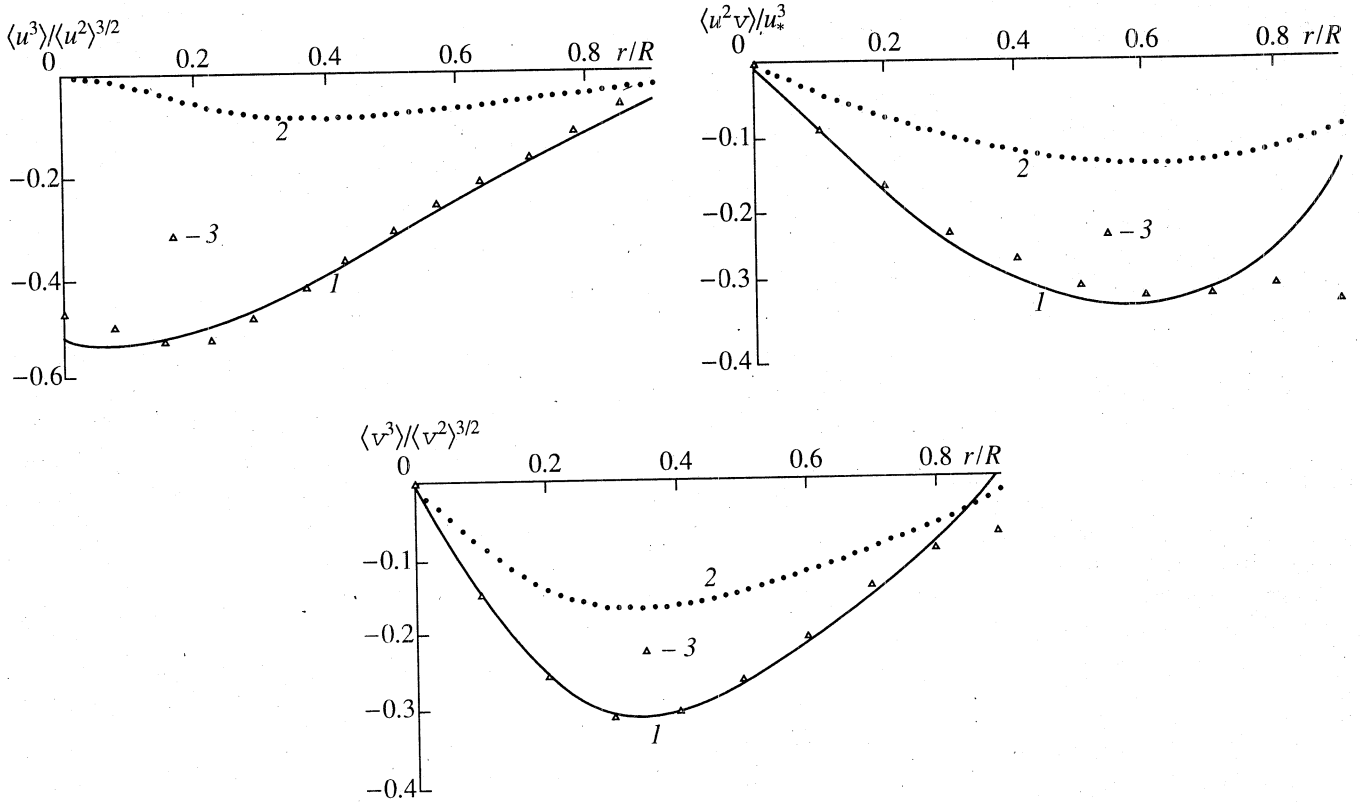

Рис. 7. Профили моментов третьего порядка для поля скорости при нулевом значении параметра закрутки (П = 0). Расчет: *1* – модель (29); *2* – модель (30); *3* – опытные данные [13, 19 - 21].

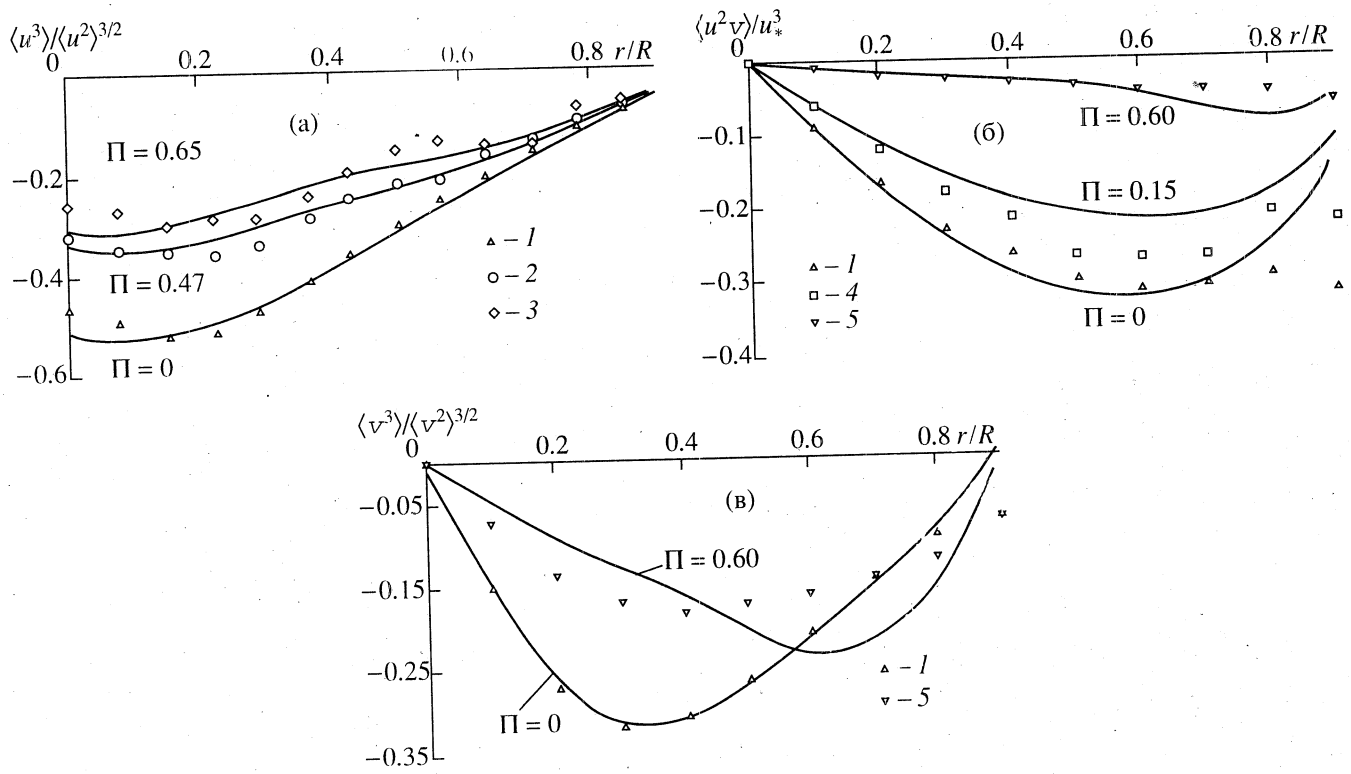

Рис. 8. Профили третьих моментов для поля скорости в закрученном потоке: сплошные кривые – модель (29). Опытные данные [13, 19 - 21]; а – П =: *1* – 0; *2* – 0.47; *3* – 0.65; б – П =: *1* – 0; *4* – 0.15; *5* – 0.60; в – П =: *1* – 0; *5* – 0.60.

членов в уравнении (24). Справедливость этого допущения подтверждается сравнением вычисленных профилей с экспериментальными данными [13, 19 - 21] (рис. 7а - 7в).

С учетом соотношений (25) - (27) приближенное уравнение баланса (24) принимает замкнутый вид. Результирующее выражение для вычисления третьих моментов поля скорости может быть получено из (24) в виде

$$\begin{aligned}\langle u_i u_j u_k\rangle = &-c_{f3}(E/\varepsilon)\,[\,(1-c_{f1})\,(\langle u_j u_k u^m\rangle U_{i,m} + \\ &+\langle u_k u_i u^m\rangle U_{j,m} + \langle u_i u_j u^m\rangle U_{k,m}\,) + \\ &+c_{f2}\,(\langle u_j u_k\rangle\langle u^m u_i\rangle_{,m} + \langle u_k u_i\rangle\langle u^m u_j\rangle_{,m} + \\ &+\langle u_i u_j\rangle\langle u^m u_k\rangle_{,m}\,) + (\langle u^m u_k\rangle\langle u_i u_j\rangle_{,m} + \\ &+\langle u^m u_i\rangle\langle u_j u_k\rangle_{,m} + \langle u^m u_j\rangle\langle u_k u_i\rangle_{,m}\,) - \\ &-\hat{c}_{\varepsilon 3} c_{,m}(E/\varepsilon)\,[\,\langle u_k u^m\rangle g_{ij} + \\ &+\langle u_j u^m\rangle g_{ki} + \langle u_i u^m\rangle g_{jk}\,]\,]\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Сравнение результатов тестовых испытаний модели третьих моментов (29) с экспериментальными данными позволило получить следующие значения эмпирических констант: $c_{f3} = 0.13$, $\hat{c}_{\varepsilon 3} = 0.05$, $c_{f1} = 0.9$, $c_{f2} = 1.0$.

На рис. 7а - 7в показано сравнение экспериментальных профилей с вычисленными по "полной" модели (29) и более простой, полученной из соотношения локального баланса вида

$$P^{(T)}_{ijk} + D_{ijk} + \pi_{ijk} = 0,$$

где корреляции с пульсациями давления моделируются простейшим релаксационным выражением $\pi_{ijk} = -c_{f3}^{-1}(\varepsilon/E)\langle u_i u_j u_k\rangle$ в сочетании с гипотезой квазинормальности для четвертых моментов

$$\begin{aligned}\langle u_i u_j u_k\rangle = &-c_s^* \frac{E}{\varepsilon}\,[\,\langle u_i u_j\rangle_{,m}\langle u^m u_k\rangle + \\ &+\langle u_j u_k\rangle_{,m}\langle u^m u_i\rangle + \langle u_i u_k\rangle_{,m}\langle u^m u_j\rangle\,]\,,\end{aligned} \tag{30}$$

$$(c_s^* = 0.13)\,.$$

Из рисунка видно, что для развитого незакрученного потока в прямой круглой трубе более "полная" модель (29) дает удовлетворительное согласие с экспериментом [13, 19 - 21], тогда как результаты, полученные по обычно используемой модели (30), не описывают экспериментальных данных.

На рис. 8а - 8в экспериментальные данные [13, 19 - 21] сравниваются с расчетами, выполненными по "полной" модели (24) для течения во вращающейся трубе при различных параметрах закрутки потока. Можно отметить в целом удовлетворительное согласие с опытными данными при умеренно больших ($\Pi \leq 0.6$) числах закрутки.

Выводы. Результаты вычислений показывают, что наличие закрутки турбулентного потока приводит к перестройке его характеристик. Происходит подавление турбулентных пульсационных характеристик потока при малых и умеренных закрутках радиального турбулентного переноса: уменьшении энергии турбулентности, диссипации, турбулентных напряжений, преимущественно в приосевой области. Параметры потока существенно меняются по всей длине вращаемой секции ($0 \leq x/R \leq 50$), однако не достигается картина, не зависящая от дальнейшего увеличения расстояния по x от начала секции.

Модель градиентного переноса для третьих моментов хорошо описывает их поведение в незакрученном потоке в центральной части канала и удовлетворительно согласуется, как, например, и в [17], с опытными данными в закрученном потоке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-05-16287-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Онуфриев А.Т., Христианович С.А.* Об особенностях турбулентного движения в вихревом кольце // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 42.
2. *Онуфриев А.Т.* Об особенностях движения в ядре вихревого кольца. Физическая механика. Вып. 4. Л.: ЛГУ, 1980. С. 31.
3. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227.
4. *Курбацкий А.Ф.* Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988. С. 240.
5. *Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537.
6. *Bradshaw P.* The Analogy between Streamline Curvature and Buoyancy in Turbulent Shear Flow // J. Fluid. Mech. 1971. V. 36. P. 1007.
7. *Лондер Б.Е., Приддин С.Х., Шарма Б.И.* Расчет турбулентного пограничного слоя на вращающихся и криволинейных плоскостях // Теоретические основы инженерных расчетов. 1977. № 1. С. 332.
8. *Hossain M.S.* Mathematische Modellierung von Turbulenten Auftribstromungen: Ph.D. Thesis. University of Karlsruhe, 1980.
9. *Gibson M.M., Launder B.E.* Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 491.
10. *So R.M.C., Yoo G.J.* On the Modelling of Low-Reynolds-Number Turbulence. NASA Report № 3994. 1986.
11. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport Equations in Turbulence // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 11. P. 2634.

12. *Spalding D.B.* GENMIX: a General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena. Pergamon Press. 1977.

13. *Заец П.Г., Сафаров Н.А., Сафаров Р.А.* Экспериментальное изучение поведения характеристик турбулентного потока при вращении канала относительно продольной оси. Современные проблемы механики сплошных сред. М.: Изд-во МФТИ, 1988. С. 136.

14. *Laufer J.* The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow. NASA Report № 1174. 1954.

15. *Букреев В.И., Зыков В.В., Костомаха В.А.* Одномерные законы распределения вероятностей флуктуаций скорости при турбулентном течении в круглой трубе // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1975. № 13. Вып. 3. С. 3.

16. *Schildknecht M., Miller J.A., Meier C.E.A.* The Influence of Suction on the Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow // J. Fluid Mech. 1979. V. 90. P. 67.

17. *Panchapakesan N.R., Lumley J.L.* Turbulence Measurements in Axisymmetric Jets of Air and Helium. Part 1. Airjet // J. Fluid Mech. 1993. V. 246. P. 197.

18. *Dekeyser T., Launder B.E.* A Comparison of Triple-Moment Temperature-Velocity Correlations in the Asymmetric Heated Jet with Alternative Closure Models // In: Turbulent Shear Flows 4. Ed. L.J.S. Bradbury et al. Springer, 1983. P. 102.

19. *Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Пилипчук М.И., Сафаров Р.А.* Двухточечные корреляционные функции четвертого порядка для продольной скорости в турбулентном течении во вращающейся относительно оси трубе. М., 1984. С. 13. – Деп. в ВИНИТИ 08.06.1984, № 3831-84.

20. *Пилипчук М.И.* Исследование статистических характеристик продольной компоненты скорости турбулентного потока во вращающейся трубе. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1986. С. 19.

21. *Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Пилипчук М.И., Сафаров Р.А.* Одноточечные моменты продольной скорости в закрученном турбулентном потоке в трубе. М., 1983. С. 10. – Деп. в ВИНИТИ 06.07.1983, № 3694-83.