МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ $L_p(\mathbf{R}_m)$ НА ПРОСТРАНСТВО БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

М. Л. Гольдман

1. Пусть $\mathbf{R}_n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{R}_m$ — его m-мерное подпространство. Известно (см. [1, гл. 6]), что для изотропного класса $B^r_{p\theta}(\mathbf{R}_n)$ при $r > (n-m)/p$ пространство следов на $\mathbf{R}_m$ совпадает с $B^\alpha_{p\theta}(\mathbf{R}_m)$ $(1 \leqslant m < n; 1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty; \alpha = r - (n-m)/p > 0)$. В этих результатах существенно, что $r > (n-m)/p$, так как при $r \leqslant (n-m)/p$ оператор получения следа не будет ограничен даже в слабом смысле (см. [1, стр. 460—462]). Исключение составляет предельный случай $\theta = 1$, $1 \leqslant p < \infty$, когда функции класса $B^r_{p1}(\mathbf{R}_n)$ при $r = (n-m)/p$ имеют следы на $\mathbf{R}_m$, принадлежащие $L_p(\mathbf{R}_m)$. Это утверждение содержится, в частности, в [2, п. 16.14]. При $p = \infty$ класс $B^0_{\infty 1}(\mathbf{R}_n)$ содержится в $C(\mathbf{R}_n)$ — пространстве ограниченных равномерно непрерывных функций, так что функции класса $B^0_{\infty 1}(\mathbf{R}_n)$ заведомо имеют следы из $C(\mathbf{R}_m)$ (о нулевых классах $B^0_{p\theta}(\mathbf{R}_n)$ см. [1, 8.9]).

Ниже приведено построение ограниченного оператора продолжения функций из $L_p(\mathbf{R}_m)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ с $\mathbf{R}_m$ на все $\mathbf{R}_n$ до функций класса $B^r_{p1}(\mathbf{R}_n)$ при $r = (n-m)/p$. При $p = \infty$ аналогичное построение проведено для класса $C(\mathbf{R}_m)$. С учетом сказанного выше это означает, что при $r = (n-m)/p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ для функций из класса $B^r_{p1}(\mathbf{R}_n)$ пространство следов на $\mathbf{R}_m$ совпадает с $L_p(\mathbf{R}_m)$ (при $p = \infty$ — с $C(\mathbf{R}_m)$).

 © Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Математические заметки», 1979

Итак, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $1 \leqslant m < n$ — *целые числа*, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r = (n-m)/p$. *Тогда существует ограниченный (нелинейный) оператор продолжения*

$$T\colon L_p(\mathbf{R}_m) \to B^r_{p1}(\mathbf{R}_n) \qquad (1 \leqslant p < \infty), \tag{1}$$

$$T\colon C(\mathbf{R}_m) \to B^0_{\infty 1}(\mathbf{R}_n) \qquad (p = \infty). \tag{2}$$

При $p = 1$, в силу вложения $B^{n-m}_{11}(\mathbf{R}_n) \to W^{n-m}_1(\mathbf{R}_n)$, эта теорема уточняет результат Гальярдо [3] (см. еще [2, 18.14]) о существовании ограниченного (нелинейного) оператора продолжения из $L_1(\mathbf{R}_m)$ в $W^{n-m}_1(\mathbf{R}_n)$. Отметим также работы Я. С. Бугрова [4, 5], где получено линейное продолжение из $L_p(\mathbf{R}_m)$ в $B^{(n-m)/p}_{p\infty}(\mathbf{R}_n)$ (в $W^{(n-m)/2}_2$, $p = 2$), и С. В. Успенского [6], где построено линейное продолжение из $L_p(\mathbf{R}_m)$ в $W^{1/p}_p(\mathbf{R}^+_{m+1})$, $p \geqslant 2$. Сформулированный здесь результат был приведен без доказательства в [7].

2. **Доказательство теоремы.** 1. Так как все рассуждения проходят одинаково при $p = \infty$ и $1 \leqslant p < \infty$, то мы будем их вести сразу для $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При этом следует считать, что $L_\infty(\mathbf{R}_m)$ означает пространство $C(\mathbf{R}_m)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbf{R}_m$ с нормой

$$\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_C = \sup_{u \in \mathbf{R}_m} |\varphi(u)|.$$

Всюду ниже мы используем обозначения: $M = n - m \geqslant 1$; $u = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}_m$; $x = (u, y) = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, где $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}_M$.

Рассмотрим функцию $\varphi(u) \in L_p(\mathbf{R}_m)$ и обозначим через

$$\Omega(\varphi, \delta)_p = \Omega^1(\varphi, \delta)_p \qquad (\delta > 0;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

модуль непрерывности первого порядка функции $\varphi(u)$ в метрике $L_p(\mathbf{R}_m)$. По известным свойствам модуля непрерывности (см. [1, 4.2]) $\Omega(\varphi, \delta)_p$ не убывает и

$$\lim_{\delta \to 0+0} \Omega(\varphi, \delta)_p = 0. \tag{3}$$

Выберем подпоследовательность $s(i)$ целых чисел $s = 0, 1, \ldots$; $s(0) = 0$; $s(i+1) > s(i)$ столь редкой, чтобы для $\nu(i) = 2^{s(i)}$ выполнялось неравенство

$$\Omega(\varphi, \nu(i)^{-1})_p \leqslant 2^{-i}\Omega(\varphi, 1)_p \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В силу условия (3) это можно сделать,

Функцию $\varphi \in L_p(\mathbf{R}_m)$ разложим в ряд по суммам Валле-Пуссена, соответствующий последовательности $\{\nu(i)\}$:

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(\varphi, u) \tag{5}$$

(см. [1, пп. 8.6, 8.8]). Здесь $Q_0(\varphi, u) = \sigma_{\nu(0)}(\varphi, u)$; при $i = 1, 2, \ldots$ $Q_i(\varphi, u) = \sigma_{\nu(i)}(\varphi, u) - \sigma_{\nu(i-1)}(\varphi, u)$, где $\sigma_\nu(\varphi)$ — сумма Валле-Пуссена функции φ порядка ν. Отличие примененного здесь разложения от рассмотрений п. 8.8 [1] состоит в том, что здесь ряд (5) связан не с последовательностью $\{2^s\}$, а с ее подпоследовательностью $\{\nu(i)\}$, выбранной в соответствии с модулем непрерывности разлагаемой функции. Отметим, что $Q_i(\varphi, u)$ — целые функции экспоненциального типа $2\nu(i)$ по всем переменным. Далее, $\sigma_\nu(\varphi, u)$ приближает $\varphi(u)$ со скоростью наилучшего приближения (см. [1, стр. 360]):

$$\| \sigma_\nu(\varphi) - \varphi \|_p \leqslant c(m) E_\nu(\varphi)_p,$$

где $E_\nu(\varphi)_p$ — наилучшее приближение функции $\varphi(u)$ с помощью целых функций экспоненциального типа ν в норме $L_p(\mathbf{R}_m)$. Отсюда следует сходимость ряда (5) к раскладываемой функции $\varphi(u)$ в норме $L_p(\mathbf{R}_m)$. Кроме того, при $i = 1, 2, \ldots$ (пояснения ниже)

$$\| Q_i \|_p \leqslant 2cE_{\nu(i-1)}(\varphi)_p \leqslant c_1\Omega(\varphi, \nu(i-1)^{-1})_p.$$

Первое неравенство следует из представления $Q_i(\varphi)$ в виде

$$Q_i(\varphi) = (\sigma_{\nu(i)}(\varphi) - \varphi) + (\varphi - \sigma_{\nu(i-1)}(\varphi))$$

и из предыдущей оценки, последнее — из прямой теоремы теории приближения [1, 5.2.1] (здесь $c_1 = c_1(m)$). Отсюда, используя оценку (4) и неравенство $\Omega(\varphi, 1)_p \leqslant 2 \| \varphi \|_p$, получим при $i = 1, 2, \ldots$

$$\| Q_i(\varphi) \|_p \leqslant c_2(m, n, p) \| \varphi \|_p 2^{-i}. \tag{6}$$

Неравенство верно и при $i = 0$, так как $\| Q_0(\varphi) \|_p \leqslant c(m) \| \varphi \|_p$ в силу известных оценок [1, 8.6].

2. Функцию $f(u, y)$, продолжающую $\varphi(u)$ с $\mathbf{R}_m$ на $\mathbf{R}_n$, будем строить в следующем виде (равенство пока формальное):

$$f(u, y) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(\varphi, u) F_i(y). \tag{7}$$

Для того чтобы определить функции $F_i(y)$, рассмотрим целую функцию $g(t)$ экспоненциального типа 1 из $L_p(\mathbf{R}_1)$

$(-\infty < t < \infty)$. Будем считать, что $|g(t)| \leqslant g(0) = 1$ при $t \in \mathbf{R}_1$ и, кроме того (это будет существенно в случае $p = \infty$), ее преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| \leqslant 1/2$. Положим

$$F_i(y) = (1/\mu(i)) \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} \varphi_s(y), \tag{8}$$

где

$$\varphi_s(y) = 2^{-s} \prod_{j=m+1}^{n} g(2^s x_j). \tag{9}$$

Тогда

$$F_i(0) = (1/\mu(i)) \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} 2^{-s} = 1, \tag{10}$$

если выбрать

$$\mu(i) = \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} 2^{-s} = 2^{-s(i)+1} - 2^{-s(i+1)+1} \geqslant 2^{-s(i)} = 1/\nu(i). \tag{11}$$

При этом, в силу свойств $g(t)$, для любого $y \in \mathbf{R}_M$

$$|F_i(y)| \leqslant (1/\mu(i)) \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} |\varphi_s(y)| \leqslant$$
$$\leqslant (1/\mu(i)) \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} 2^{-s} = 1. \tag{12}$$

Из (12) и (6) следует, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| Q_i(\varphi) F_i(y) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant c \| \varphi \|_p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}. \tag{13}$$

Следовательно, ряд (7) сходится при каждом $y \in \mathbf{R}_M$ в $L_p(\mathbf{R}_m)$, и его сумма, обозначенная $f(u, y)$, принадлежит $L_p(\mathbf{R}_m)$ по u. Кроме того, в силу равенства $F_i(0) = 1$ (10) и разложения (5)

$$f(u, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(\varphi, u) = \varphi(u)$$

для почти всех $u \in \mathbf{R}_m$. Далее, в силу оценки (13), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $N = N(\varepsilon, \varphi) > 0$ столь большим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} < \varepsilon/2.$$

На основании неравенства (12) и предыдущего неравенст-

ва имеем

$$\| f(\cdot, y) - \varphi(\cdot) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} | 1 - F_i(y) | \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} | 1 - F_i(y) | + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} | 1 - F_i(y) | + \varepsilon.$$

Так как $F_i(y)$ непрерывна и $F_i(0) = 1$, то

$$\| f(\cdot, y) - \varphi(\cdot) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \to 0 \qquad (y \to 0).$$

Следовательно, $\varphi(u)$ является следом функции $f(u, y)$ на $\mathbf{R}_m$ в смысле определения [1, стр. 281], или, что то же самое, $f(u, y)$ является продолжением функции $\varphi(u) \in L_p(\mathbf{R}_m)$ на все $\mathbf{R}_n$.

3. Осталось показать, что $f(x)$ (или функция, эквивалентная $f(x)$ в смысле n-мерной меры) принадлежит классу $B_{p1}^{M/p}(\mathbf{R}_n)$. Прежде всего убедимся в справедливости оценки

$$\| \varphi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_M)} \leqslant c 2^{-s(M/p+1)} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{14}$$

где c зависит только от m, n, p и $g(t)$. При $p = \infty$ эта оценка очевидна: $\| g \|_C \leqslant g(0) = 1$. При $1 \leqslant p < \infty$ имеем

$$\| g(2^s t) \|_{L_p(\mathbf{R}_1)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} | g(2^s t) |^p \, dt \right\}^{1/p} = 2^{-s/p} \| g \|_{L_p(\mathbf{R}_1)},$$

откуда

$$\| \varphi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_M)} \leqslant 2^{-s} \prod_{j=m+1}^{n} \| g(2^s x_j) \|_{L_p(\mathbf{R}_1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-s(M/p+1)} \| g \|_{L_p(\mathbf{R}_1)}^{M},$$

что и дает (14).

Если учесть оценку снизу для $\mu(i)$ (11), то из неравенства (14) следует, что (см. (8), $i = 0, 1, \ldots, 1 \leqslant p \leqslant \infty$)

$$\| F_i \|_{L_p(\mathbf{R}_M)} \leqslant c \nu(i) \, 2^{-s(i)(M/p+1)} \leqslant c 2^{-s(i)M/p}. \tag{15}$$

Теперь можно показать, что $f(u, y) \in L_p(\mathbf{R}_n)$. Имеем (пояснения ниже)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| Q_i(\varphi) F_i \|_{L_p(\mathbf{R}_n)} \leqslant 2c \sum_{i=0}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \| \varphi \|_{L_p(\mathbf{R}_m)}.$$

Мы учли оценку (15), а в конце неравенство (13). Здесь c_1 не зависит от φ. Полученное соотношение доказывает сходимость ряда (7) в $L_p(\mathbf{R}_n)$, и его сумма в смысле этой сходимости совпадает с $f(u, y)$ для почти всех $(u, y) \in \mathbf{R}_n$ (см. [1, лемма 1.3.9]).

Итак (см. (8)),

$$f(u, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} (1/\mu(i))\, Q_i(\varphi, u)\, \varphi_s(y) = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s(u, y), \tag{16}$$

где

$$\psi_s(u, y) = (1/\mu(i)) Q_i(\varphi, u) \varphi_s(y)$$
$$\text{при} \quad s(i) \leqslant s \leqslant s(i+1) - 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots). \tag{17}$$

Из приведенных ниже оценок будет видно, что ряд из $\| \psi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_n)}$ сходится, так что справа в (16) стоит функция из $L_p(\mathbf{R}_n)$, совпадающая с $f(u, y)$ почти всюду в $\mathbf{R}_n$. Действительно, справедливо даже более сильное (при $1 \leqslant p < \infty$) утверждение

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sM/p} \| \psi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_n)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1/\mu(i)) \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} 2^{sM/p} \| \varphi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_M)} \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{i=0}^{\infty} \nu(i) \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \sum_{s=s(i)}^{\infty} 2^{-s} \leqslant$$
$$\leqslant 2c \sum_{i=0}^{\infty} \| Q_i(\varphi) \|_{L_p(\mathbf{R}_m)} \leqslant c_1 \| \varphi \|_{L_p(\mathbf{R}_m)}. \tag{18}$$

(Первое равенство очевидно: мы сгруппировали члены ряда «по пачкам», а затем в каждой пачке использовали равенство (17). Следующее далее неравенство вытекает из оценки (14), кроме того, сумму по s заменили рядом. Сумма этого ряда не больше, чем $2^{1-s(i)} = 2/\nu(i)$,— отсюда следует предпоследнее неравенство. Последнее неравенство следует из оценки (13). Постоянная c_1 в нем не зависит от φ.) Осталось убедиться, что $\psi_s(u, y)$ — целые функции экспоненциального типа 2^{s+1} по всем x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Для всякого $s = 0, 1, \ldots$ найдется $i \geqslant 0$ такое, что $s(i) \leqslant s \leqslant s(i+1) - 1$. При этом $\psi_s(u, y)$ определена формулой (17), где $Q_i(\varphi, u)$ — целая функция экспоненциального типа $2\nu(i) \leqslant 2^{s+1}$ по всем $x_j (1 \leqslant j \leqslant m)$, а функция $\varphi_s(y)$ — целая экспоненциального типа 2^s по всем $x_j (m+1 \leqslant j \leqslant n)$. Поэтому соотношения (16) и

(18) при $1 \leqslant p < \infty$ показывают, что $f(u, y) \in B_{p1}^{M/p}(\mathbf{R}_n)$ и

$$\| f \|_B \leqslant c \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sM/p} \| \psi_s \|_{L_p(\mathbf{R}_n)} \leqslant c_2(m, n, p) \| \varphi \|_{L_p(\mathbf{R}_m)}$$

(см. эквивалентные нормы в классе $B_{p\theta}^r$ [1, п. 5.6]).

Осталось завершить доказательство при $p = \infty$. Пусть $q_k(f, (u, y))$ — член ряда по суммам Валле-Пуссена в $\mathbf{R}_n$ для $f(u, y)$, отвечающего последовательности $\{2^k\}$ ($k = 0,1, \ldots$) (см. [1, 8.6, 8.8]). По доказанному выше $f(u, y) \in C(\mathbf{R}_n)$, поэтому ряд Валле-Пуссена сходится к $f(u, y)$ в $C(\mathbf{R}_n)$ и, тем более, слабо. Теорема будет доказана, если мы получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| q_k(f) \|_\infty \leqslant c(m, n) \| \varphi \|_{C(\mathbf{R}_m)}, \tag{19}$$

означающее, что $f \in B_{\infty 1}^0(\mathbf{R}_n)$ и $\| f \|_B \leqslant c \| \varphi \|_{C(\mathbf{R}_m)}$. Обозначим $P_k = \{\xi \in \mathbf{R}_n\colon \ |\xi_j| \leqslant 2^k \ (j = 1, \ldots, n)\}$, $\widetilde{\varphi}^n(\xi)$ — преобразование Фурье в $\mathbf{R}_n$ функции $\psi(x)$, $\widetilde{g}(\lambda)$ — преобразование Фурье в $\mathbf{R}_1$ функции $g(t)$, $\xi \in \mathbf{R}_n$ и $\lambda \in \mathbf{R}_1$ — двойственные переменные. Как известно, $\operatorname{supp} \widetilde{q}_k^n(f, \xi) \in P_{k+1} \setminus P_{k-1}$ (см. [1, 8.6]), а в силу определения $\psi_s(u, y)$ (17), (19) и свойств функции $g(t)$ ($g(2^s t)$ — целая функция типа 2^s и $\widetilde{g(2^s t)}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \leqslant 2^{s-1}$) получим $\operatorname{supp} \widetilde{\varphi}_s^n(\xi) \subset P_{s+1} \setminus P_{s-1}$. Поэтому $q_k(\psi_s, x) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant k - 2$ и $s \geqslant k + 2$ ($k = 2,3, \ldots$), а при $k = 0,1$ это верно для $s \geqslant k + 2$. Следовательно, при $k \geqslant 1$

$$q_k(f(u, y)) = q_k\left(\sum_{s=0}^{\infty} \psi_s, (u, y)\right) = \sum_{s=0}^{\infty} q_k(\psi_s, (u, y)) = \\ = \sum_{s=k-1}^{k+1} q_k(\psi_s, (u, y)) \tag{20}$$

и, аналогично, при $k = 0$

$$q_0(f(u, y)) = q_0(\psi_0, (u, y)) + q_0(\psi_1, (u, y)).$$

Первое равенство в (20) следует из (16); чтобы обосновать второе, следует учесть равномерную сходимость ряда (16), затем обращение в нуль $q_k(\psi_s, (u, y))$ с номерами s, отличными от выписанных. Итак, при $k \geqslant 1$

$$\| q_k(f) \|_\infty \leqslant c(\| \psi_{k-1} \|_\infty + \| \psi_k \|_\infty + \| \psi_{k+1} \|_\infty), \tag{21}$$

и

$$\| q_0(f) \|_\infty \leqslant c(\| \psi_0 \|_\infty + \| \psi_1 \|_\infty). \tag{22}$$

Мы учли еще, что $\| q_k(\psi) \|_\infty \leqslant c(n) \| \psi \|_\infty$ для любой функции $\psi(u, y) \in C(\mathbf{R}_n)$. Из (21) и (22) и оценки (18) при $p = \infty$ следует требуемое неравенство (19). Теорема доказана.

Московский институт
радиоэлектроники и автоматики

Поступило
17.XI.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.

[2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975.

[3] Gagliardo E., Caratterizazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Padova, 27 (1957), 284—305.

[4] Бугров Я. С., К теоремам вложения, Докл. АН СССР, 116, № 4 (1957), 531—534.

[5] Бугров Я. С., К теоремам вложения для H-классов С. М. Никольского, Сиб. матем. ж., 4 (1963), 1012—1028.

[6] Успенский С. В., О теоремах вложения для обобщенных классов W_p^r Соболева, Сиб. матем, ж., 3, № 3 (1962), 418—445.

[7] Гольдман М. Л., Описание пространства следов для функций обобщенного гельдерова класса, Докл. АН СССР, 231, № 3 (1976), 13—16.