R. A. Gorak, About Noether's relations for three-dimensional Cremona transformations, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 44–49

Для k-лакунарных последовательностей с использованием леммы 6 и теорем 1, 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть k — фиксированное целое число ($k \geqslant 1$) и пусть $\{a_n\}$ — k-лакунарная последовательность. Тогда, если ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируется к числу A некоторым методом Чезаро (C, α), где α — действительное число ($\alpha > k-1$), то ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем к числу A и методом $(C, k-1)$.*

Замечание. Для любого целого k ($k \geqslant 1$) существует $(k+1)$-лакунарная последовательность $\{a_n\}$, такая, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем методом (C, α) при любом $\alpha > k-1$, но ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ не является суммируемым методом $(C, k-1)$.

В терминах $T_Q(P)$-условий, которых мы придерживались ранее, теорема 3 утверждает, что требование $\{a_n\} \in (G, k)$ является $T_{(C,k-1)}((C, \alpha))$- условием при $\alpha > (k-1) \geqslant 0$.

Автор глубоко признателен научному руководителю чл.-корр. РАН П. Л. Ульянову и к. ф. м. н. Ю. Е. Куприкову за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tauber A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen//Monatsh. Math. und Phys. 1897. 8. 273—277.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
3. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1967.
4. Lorentz G. G. Tauberian theorems and tauberian conditions//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **63**, N 2. 226—234.

Поступила в редакцию
02.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 513.6

Р. А. Горак

О ФОРМУЛАХ НЕТЕРА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ КРЕМОНОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Введение. В классической работе [1, гл. 11] приведены формулы Нетера, описывающие некоторые численные характеристики трехмерных кремоновых преобразований. В настоящей статье представлено доказательство этих формул с современной точки зрения.

Вначале напомним определения. Пусть $T: S \to S'$ — преобразование Кремоны трехмерного проективного пространства, $S \simeq S' \simeq \mathbf{P}^3$. Множество неопределенности, или фундаментальное множество, преобразования T состоит из точек и кривых с учетом их кратностей. В [1] оно называется F-системой преобразования T.

Обозначим через p число независимых условий, накладываемых заданным F-множеством (набором точек и кривых с учетом кратностей); через e — число, на которое уменьшается индекс — тройное самопересечение — при наложении условий заданным F-множеством.

Напомним, что преобразование T задается трехпараметрической линейной системой рациональных поверхностей в S, являющейся собственным прообразом линейной системы плоскостей в S'.

Вычисление p и e основано на формулах умножения в кольце Чжоу $A(V')$ раздутия $\sigma: V' \to V$ неособого трехмерного многообразия V с центром в точке или неособой кривой (см., например, [2]).

Кольцо Чжоу раздутия описывается следующим образом.

Пусть $\sigma: V' \to V$ — раздутие вдоль B (точки или кривой); $E = \sigma^{-1}(B)$ — исключительный дивизор; $f \in A^2(V')$ — класс прямой в E, если $E \simeq \mathbf{P}^2$, или слоя, если E — линейчатая поверхность над кривой B.

Как аддитивная группа $A(V')$ имеет вид

$$A(V') = A(V) + \mathbf{Z} \cdot E + \mathbf{Z} \cdot f.$$

Умножение в $A(V')$ задается следующим образом.

а) Если B — точка, то

$$E^2 = -f, \ E^3 = -E \cdot f = 1, \ E \cdot \sigma^* Z = f \cdot Z = 0, \ Z \in A(V).$$

б) Если B — невырожденная кривая рода g и $c_1(V) = -K_V$ — первый класс Черна, N_B — нормальный пучок к B в V, $c_1(N_B)$ — его первый класс Черна в $H^2(B) = \mathbf{Z}$, то

$$E^2 = -\sigma^* B + c_1(N_B) \cdot f;$$

$$E^3 = -c_1(N_B), \ E \cdot f = -1;$$

$$E \cdot \sigma^* D = (B \cdot D) f, \ f \cdot \sigma^* D = 0, \ \forall D \in A^1(V);$$

$$E \cdot \sigma^* C = f \cdot \sigma^* C = 0, \ \forall C \in A^2(V);$$

$$\sigma^* Z \cdot Y = Z \cdot \sigma_* Y, \ Z \in A(V), \ Y \in A(V') \text{ — формулы проекции;}$$

$$2g - 2 = -c_1(V) \cdot B + c_1(N_B) \text{ — формула присоединения.}$$

2. Формулы Нетера. Приведем теперь формулы Нетера, которые верны для кремонова преобразования степени n, удовлетворяющего следующим условиям.

1. Кривые F-системы — неособые и могут пересекаться только трансверсально.
2. Кратности постоянны вдоль каждой F-кривой.
3. F-система отображения находится в общем положении в том смысле, что при раздутии $\sigma: V' \to V$ данного F-множества высшие когомологии пучков $\mathfrak{O}_V(D)$ и $\mathfrak{O}_{V'}(\sigma^* D - mE)$ равны нулю, так что

$$\chi(\mathfrak{O}_V(D)) = h^0(D), \ \chi(\mathfrak{O}_{V'}(\sigma^* D - mE)) = h^0(\mathfrak{O}_{V'}(\sigma^* D - mE)).$$

Рассмотрим более подробно последнее условие об обращении в нуль. Воспользуемся для этого следующей теоремой (см. [3]).

Теорема (Кавамата—Фивег). *Пусть V — неособое неприводимое полное многообразие и $D \in \mathrm{Div}(V)$ — дивизор, обладающий свойствами:*

а) *D — численно эффективный;*

б) $D^k > 0$, $k = \dim V$.

Тогда $H^i(\mathfrak{O}_V(D + K_V)) = 0$ для всех $i \geqslant 0$.

Таким образом, для обращения в нуль высших когомологий $\mathfrak{O}_V(D)$ достаточными являются условия:

$$(D - K_V) \cdot C \geqslant 0 \text{ для произвольной кривой } C \subset V,$$

$$(D - K_V)^3 > 0.$$

Так как $D \sim nH$ на $V \simeq \mathbf{P}^3$, то эти условия выполняются и $h^i(\mathfrak{O}_V(D)) = 0$ при $i \geqslant 1$.

Для пучка $\sigma^*D - \sum_{i=1}^{N} m_i \sigma_N^* E_i - K_{V'}$ на раздутии

$$\sigma = \sigma_{N,N-1} \circ \sigma_{N-1,N-2} \circ \ldots \circ \sigma_{1,0} : V' \to V$$

получаем следующие условия:

$$(n+4)\,\sigma^*H - \sum_{i=1}^{N} (m_i + \delta_i)\, \sigma_{N,i}^* E_i \text{ — численно эффективный,}$$

$$\left((n+4)\,\sigma^*H - \sum_{i=1}^{N} (m_i + \delta_i)\, \sigma_{N,i}^* E_i\right)^3 > 0.$$

Здесь B_i — фундаментальное множество (точка или кривая) кратности m_i, E_i — соответствующий ему исключительный дивизор,

$$K_{V'} = \sigma^* K_V + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \sigma_{N,i}^* E_i, \quad \delta_i = \operatorname{codim} B + 1.$$

К сожалению, автор не знает, как выразить условие численной эффективности в терминах численных характеристик фундаментальной системы отображения.

Теорема. *При выполнении вышеуказанных условий верны формулы:*

$$p = \sum_{B_\alpha} \frac{1}{12} m_\alpha (m_\alpha + 1)(6d_\alpha(n+2) + (2m_\alpha + 1)\, d_\alpha (d_\alpha + 1)) +$$

$$+ \sum_{O} \frac{1}{6} m(m+1)(m+2) - \sum_{B_\alpha, B_\beta} \frac{1}{6} m_\beta (m_\beta + 1)(3m_\alpha - m_\beta + 1)\, D_{\alpha\beta} -$$

$$- \sum_{B_\alpha, O} \frac{1}{6} m_\alpha (m_\alpha + 1)(3m - 2m_\alpha + 2)\, D_{\alpha O};$$

$$e = \sum_{B_\alpha} (3m_\alpha^2 d_\alpha n - m_\alpha^3 d_\alpha (d_\alpha + 1)) + \sum_{O} m^3 -$$

$$- \sum_{B_\alpha, B_\beta} m_\beta^2 (3m_\alpha - m_\beta)\, D_{\alpha\beta} - \sum_{B_\alpha, O} m_\alpha^2 (3m - 2m_\alpha)\, D_{\alpha O}.$$

Здесь m_α, m_β — соответственно кратности кривых B_α и B_β, m — кратность в точке O, d_α — степень кривой B_α. Суммы распространяются на все кривые и точки F-системы.

Доказательство. Число условий, накладываемых mB на линейную систему $|D|$, равно

$$h^0(\mathfrak{O}_V(D)) - h^0(\mathfrak{O}_{V'}(\sigma^*D - mE)).$$

Таким образом, по теореме Римана—Роха имеем

$$p = \frac{1}{6}(\sigma^*D^3 - (\sigma^*D - mE)^3) - \frac{1}{4}((\sigma^*D - mE)^2 K_{V'}) + \frac{1}{12} mE(K_{V'} + c_2(V')).$$

Здесь $K_{V'}=\sigma^*K_V+(\operatorname{codim} B-1)E$, $c_2(V')=\sigma^*c_2(V)-\sigma^*c_1(B)-\sigma^*c_1(V)E$, E — исключительное множество при раздутии σ с центром B (см. [4]), $|D|$ — полная линейная система на V.

Рассмотрим следующие четыре случая.

1. B — точка кратности m:

$$p=\frac{1}{6}(\sigma^*D^3-(\sigma^*D-mE)^3)-\frac{1}{4}(\sigma^*D^2-(\sigma^*D-mE)^2K_{V'}+$$

$$+\frac{1}{12}mE(K_{V'}^2+c_2(V'))=\frac{1}{6}m^3E^3+\frac{1}{4}(\sigma^*K_V+2E)m^2E^2+$$

$$+\frac{1}{12}mE(\sigma^*K_V^2+4E^2+4\sigma^*K_VE+\sigma^*c_2(V)+\sigma^*B-\sigma^*c_1(V)E)=$$

$$=\frac{1}{6}m^3-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m=\frac{1}{6}m(m+1)(m+2).$$

2. B — неособая кривая степени d и кратности m:

$$p=\frac{1}{6}(\sigma^*D^3-\sigma^*D^3-3\sigma^*D^2mE-3\sigma^*Dm^2E^2+m^3E^3)-$$

$$-\frac{1}{4}(\sigma^*D^2-\sigma^*D^2+2\sigma^*DmE-m^2E^2)(\sigma^*K_V+E)+$$

$$+\frac{1}{12}mE((\sigma^*K_V+E)^2+c_2(V'))=\frac{1}{6}(3m^2DB+m^3E^3)-$$

$$-\frac{1}{4}(2m(BD)f-m^2E^2)(\sigma^*K_V+E)+$$

$$+\frac{1}{12}mE(\sigma^*K_V^2+2\sigma^*K_VE+E^2+c_2(V'))=$$

$$=\frac{1}{12}(6m^2dn-2m^3d^3-2m^3d+6mdn+12m^3d-$$

$$-3m^2d(d+1)+8md-md(d+1)+4md)=$$

$$=\frac{1}{12}m(m+1)(6d(n+2)-(2m+1)d(d+1)).$$

3. Пересечение двух кривых. Пусть B_α — кривая кратности m_α и степени d_α, B_β — кривая кратности m_β и степени d_β, σ_α — раздутие вдоль B_α, E_α — исключительное множество, σ_β — раздутие вдоль $\sigma_\alpha^*B_\beta$, E_β — исключительное множество, $\sigma=\sigma_\beta\circ\sigma_\alpha$,

$$2g_\alpha-2=-c_1(V)B_\alpha+c_1(N_{B_\alpha}),\quad 2g_\beta-2=-c_1(V)B_\beta+c_1(N_{B_\beta}),$$

где N_{B_α} — нормальное расслоение к B_α в V, N_{B_β} — нормальное расслоение к B_β в V.

Тогда

$$p=\frac{1}{6}[\sigma^*D^3-(\sigma^*D-m_\alpha\sigma_\beta^*E_\alpha-m_\beta E_\beta)^3]-\frac{1}{4}[(\sigma^*D^2-(\sigma^*D-$$

$$-m_\alpha\sigma_\beta^*E_\alpha-m_\beta E_\beta)^2)K_{V'}]+\frac{1}{12}[(m_\alpha\sigma_\beta^*E_\alpha+m_\beta E_\beta)(K_{V'}+c_2(V'))]=$$

$$=\frac{1}{6}[-m_\alpha^3d_\alpha(d_\alpha+1)-m_\beta^3d_\beta(d_\beta+1)+3m_\alpha^2d_\alpha n+3m_\beta^2d_\beta n+m_\beta^3D_{\alpha\beta}-$$

$$-3m_\alpha m_\beta^2 D_{\alpha\beta}]-\frac{1}{4}[(-m_\alpha^2\sigma_\beta^* E_\alpha - m_\beta^2 E_\beta^2 + 2\sigma^* D m_\alpha \sigma_\beta^* E_\alpha + 2\sigma^* D m_\beta E_\beta -$$

$$-2m_\alpha m_\beta \sigma^* E_\alpha E_\beta)(\sigma^* K_V + \sigma_\beta^* E_\alpha + E_\beta)] + \frac{1}{12}[(m_\alpha \sigma_\beta^* E_\alpha +$$

$$+m_\beta E_\beta)(K_{V'} + c_\alpha(V'))].$$

Обозначая слагаемые в прямых скобках соответственно через A, B и C, имеем

$$A = -m_\alpha^3 d_\alpha(d_\alpha+1) - m_\beta^3 d_\beta(d_\beta+1) + 3m_\alpha^2 n d_\alpha + 3m_\beta^2 n d_\beta +$$

$$+(m_\beta^3 - 3m_\alpha m_\beta^2) D_{\alpha\beta},$$

$$B = -4m_\alpha^2 d_\alpha - 4m_\beta^2 d_\beta + m_\alpha^2 d_\alpha(d_\alpha+1) + m_\beta^2 d_\beta(d_\beta+1) -$$

$$-2m_\alpha n d_\alpha - 2m_\beta n d_\beta + 2m_\alpha m_\beta D_{\alpha\beta},$$

$$C = -m_\alpha d_\alpha(d_\alpha+1) + m_\alpha d_\alpha - m_\beta d_\beta(d_\beta+1) + 8m_\beta d_\beta +$$

$$+4m_\alpha d_\alpha + 4m_\beta d_\beta - 2m_\beta D_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, при пересечении двух кривых число p уменьшается на

$$-\frac{1}{6}\Sigma m_\beta(m_\beta+1)(3m_\alpha - m_\beta + 1) D_{\alpha\beta},$$

где сумма распространяется на все пересечения B_α и B_β. Второй класс Черна раздутия σ вычисляется по формуле (см. [4])

$$c_2(V') = \sigma^* c_2(V) + \sigma^* B_\alpha + \sigma_\beta^*(\sigma_\alpha^* K_V E_\alpha) + \sigma^* B_\beta + \sigma_\beta^*(\sigma_\alpha^* K_V + E_\alpha) E_\beta.$$

4. Соответствие точка—кривая. Пусть B_α—кривая кратности m_α и степени d_α, B—точка кратности m, лежащая на $B_\alpha (m > m_\alpha)$. Пусть σ_0—раздутие B, $E = \sigma_0^*(B)$, σ_α—раздутие вдоль $\sigma_0^* B_\alpha$, $E_\alpha = \sigma_\alpha^*(\sigma_0^* B_\alpha)$, $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma$.

Тогда аналогично предыдущему имеем

$$p = \frac{1}{6}[m^3 - m_\alpha^3 d_\alpha(d_\alpha+1) + 3m_\alpha^2 d_\alpha n - 3mm_\alpha^2 D_{\alpha o} + 2m_\alpha^3 D_{\alpha o}] -$$

$$-\frac{1}{4}[-4m_\alpha^2 d_\alpha - 2m^2 + 2m_\alpha^2 D_{\alpha o} + m_\alpha^2 d_\alpha(d_\alpha+1) - 2m_\alpha^2 D_{\alpha o} +$$

$$+2mm_\alpha D_{\alpha o} - 2m_\alpha n d_\alpha] + \frac{1}{12}[4m - mD_{\alpha o} + mD_{\alpha o} +$$

$$+2m_\alpha D_{\alpha o} - m_\alpha d_\alpha(d_\alpha+1) - 4m_\alpha D_{\alpha o} - 2m_\alpha D_{\alpha o} + 8m_\alpha d_\alpha + 4m_\alpha d_\alpha].$$

Таким образом, p уменьшается на

$$\frac{1}{6}\Sigma m_\alpha(m_\alpha+1)(3m - 2m_\alpha + 2) D_{\alpha o},$$

где сумма распространяется на пересечение множеств F-кривых и F-точек фундаментальной системы.

Вычислим теперь e.

Для F-множества B кратности m изменение тройного пересечения равно

$$\sigma^* D^3 - (\sigma^* D - mE)^3 = -3m^2\sigma^* DE^2 + m^3 E^3.$$

Рассмотрим все четыре случая.

1. B — точка кратности m:

$$e=-3m^2DB+m^3E^3=m^3.$$

2. B — кривая кратности m и степени d:

$$e=3m^2DB+m^3E^3=m^2(3nd-mc_1(N_B))=m^2(3nd-md(d+1)).$$

3. Пересечение двух кривых B_α и B_β:

$$e=\sigma^*D^3-(\sigma^*D-m_\alpha\sigma_\beta^*E_\alpha-m_\beta E_\beta)^3=-m_\alpha^3d_\alpha(d_\alpha+1)-$$

$$-m_\beta^3d_\beta(d_\beta+1)+3m_\alpha^2nd_\alpha+3m_\beta^2nd_\beta+m_\beta^3D_{\alpha\beta}-3m_\alpha m_\beta^2D_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, e для двух пересекающихся кривых уменьшается на $\Sigma(3m_\alpha m_\beta^2-m_\beta^3)D_{\alpha\beta}=\Sigma m_\beta^2(3m_\alpha-m_\beta)D_{\alpha\beta}$.

4. Соответствие точка—кривая:

$$e=m^3-m_\alpha^3d_\alpha(d_\alpha+1)+3m_\alpha^2d_\alpha n-3mm_\alpha^2D_{\alpha o}+2m_\alpha^3D_{\alpha o}.$$

Здесь e изменяется на

$$-\Sigma(3mm_\alpha^2-2m_\alpha^3)D_{\alpha o}=-\Sigma m_\alpha^2(3m-2m_\alpha)D_{\alpha o}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hudson H. Cremona transformations. Cambridge, 1927.
2. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота//Матем. сб. 1981. **86**, № 1. 140—146.
3. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's wanishing theorem//Math. Ann. 1982. **261**, И 1. 43—46.
4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.

Поступила в редакцию
04.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.554.37

С. Ж. Набиев

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ НЕКОТОРЫХ 2-ПОРОЖДЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ С АБЕЛЕВЫМ ИДЕАЛОМ

Пусть L — абсолютно свободная алгебра Ли. Свободной метабелевой алгеброй Ли называется алгебра $L/(L^2)^2$. Известно, что любой автоморфизм свободной метабелевой алгебры Ли ранга 2, тождественный по модулю коммутанта, является внутренним (см. [1, 2]). Основной результат данной статьи — обобщение этого утверждения на случай алгебр Ли ранга 2 L/R^2, где R — некоторый идеал L.

Теорема 1. *Пусть $L=L(x, y)$ — свободная алгебра Ли ранга 2 над целостным коммутативным кольцом F и R — ее идеал, такой, что L/R — свободный F-модуль и R конечно порожден. Тогда все автоморфизмы алгебры Ли L/R^2, тождественные по модулю идеала R/R^2, являются внутренними, т. е. имеют вид* $\exp(\operatorname{ad} r)$, *где r принадлежит R/R^2.*

Прежде чем доказывать теорему 1, вспомним некоторые определения и теоремы из работ [1—3], а также докажем ряд вспомогательных утверждений.