А. В. Попов, Практикум на ЭВМ: разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. Часть I,
Выч. мет. программирование, 2003, том 4, выпуск 3, 16–27

УДК 517.97

ПРАКТИКУМ НА ЭВМ: РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ЧАСТЬ I

А. В. Попов[1]

Рассматриваются разностные схемы для решения квазилинейных уравнений первого порядка, предлагаемые для программной реализации студентам четвертого курса механико-математического факультета МГУ на занятиях по практикуму на ЭВМ. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02–01–00490).

1. Введение. Основная цель данного практикума [9] — ознакомить студентов с конечно-разностными методами решений нестационарных нелинейных задач гиперболического типа. Эти методы положены в основу решения сложных задач газовой динамики, гидродинамики, акустики, а также многих других важных задач физики и химии [3, 5, 8, 10, 14]. Для успешного выполнения такого задания необходимо быть знакомым с теоретическими основами качественной теории решаемой дифференциальной задачи [7, 10], исследовать теоретически предложенные разностные методы [2, 6, 12, 13] и провести численные эксперименты, сравнив полученные результаты с ожидаемыми после выполнения теоретического анализа. В качестве дифференциальной задачи предлагается задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где функция $u = u(t,x)$ — неизвестна и подлежит определению, переменная t имеет физический смысл времени и x — одномерная пространственная координата. Уравнение (1) дополняется начальным условием при $t = 0$ на искомую функцию u:

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Функция $F(u)$ является заданной. Часто ее называют функцией состояния.

Приближенное решение задачи (1), (2) требуется найти в полосе

$$\Pi_T = \big\{(t,x) \;|\; 0 < t < T, \quad -\infty < x < +\infty\big\}.$$

Сформулированная задача, с одной стороны, сохраняет в себе все основные особенности решения сложных прикладных задач гиперболического типа, а с другой — является достаточно компактной для реализации и доступной для понимания в качестве учебной задачи. Поэтому на ее примере удобно продемонстрировать основные понятия, методы и технологию использования разностных схем для уравнений математической физики.

Выполнение задания практикума может быть сведено к двум основным этапам. На первом этапе выполняется теоретическое исследование предложенных в задании разностных методов. Требуется исследовать аппроксимацию разностной схемы дифференциальной задачи, исследовать ее устойчивость как в линейном, так и в нелинейном случаях и построить дифференциальное приближение для линеаризованного варианта разностной схемы с точностью до членов третьего порядка малости в зависимости от временного и пространственного шагов сетки. В результате такого исследования можно предсказать точность разностных решений для задач с гладкими решениями и характер поведения сеточного решения на разрыве при расчетах негладких решений. Для всех задач практикума можно построить точное дифференциальное решение, что дает возможность проводить сравнение получаемых сеточных решений с точным. Кроме того, каждое задание включает в себя реализацию неявной разностной схемы, а это приводит к необходимости локализовывать разностное решение и ставить дополнительно граничные условия.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: popovav@mech.math.msu.su

Вторым этапом является численный эксперимент, который должен подтвердить полученные теоретические результаты и дополнить их результатами расчетов негладких решений, когда вывод теоретических оценок либо невозможен, либо является крайне тяжелой для студента задачей. Особое внимание уделяется изучению практической оценки точности расчетов путем сравнения результатов, полученных на различных сетках.

2. Однородные разностные схемы. При решении прикладных задач могут встречаться различные особенности (например, разрывы решения). В газовой динамике, модельным уравнением которой служит уравнение (1), к таким особенностям относятся ударные волны и контактные разрывы. Последние возникают, в частности, на границе раздела двух сред с различными физическими свойствами. Помимо этих физических особенностей, в процессе решения задачи приходится иметь дело с нерегулярностями разностного происхождения. К ним следует отнести прежде всего граничные точки сетки. Наличие в задаче подобных неоднородностей вынуждает в окрестности каждой особой точки видоизменять алгоритм численного счета, приспосабливая его к каждой индивидуальной особенности. Такой путь достаточно громоздок и приводит к усложнению логической структуры алгоритма, ибо, как правило, заранее положение нерегулярных точек неизвестно. Естественно пытаться строить такие разностные схемы, которые реализуются по одним и тем же формулам во всех узлах сетки, независимо от того, совпадает данный узел с точкой нерегулярности решения или нет. Схемы такого типа называются однородными или схемами сквозного счета [14].

Во всех заданиях практикума функция $F(u)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, имеет место эффект конечной скорости распространения возмущений и конечной области зависимости решения в любой точке (t,x) от начальных данных задачи (1), (2). Это дает возможность, учитывая заданную начальную функцию $u_0(x)$, свести решение задач практикума к задаче в ограниченной по пространственной переменной области

$$Q_T = \big\{(t,x) \mid 0 < t < T, \;\; X_{\min} < x < X_{\max}\big\},$$

такой, что точное решение этой задачи в области $\Pi_T \setminus Q_T$ и на участках границы

$$\gamma_1 = \big\{(t,x) \mid x = X_{\min}\big\}, \quad \gamma_2 = \big\{(t,x) \mid x = X_{\max}\big\}$$

достаточно легко определяется аналитически, что, в свою очередь, позволяет использовать эти значения в качестве граничных условий для разностных решений при решении задачи в области Q_T.

В разностных методах, применяемых для решения нестационарных задач в ограниченной области Q_T, используется множество точек $Q_{\tau h}$, называемое сеткой. Точки, из которых состоит сетка, называются узлами. Простейшая сетка строится следующим образом. Строятся две сетки $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0,\dots,N\}$, где $N\tau = T$, и $\omega_h = \{mh \mid m = M_{\min},\dots,M_{\max}\}$, где $M_{\min}h = X_{\min}$, $M_{\max}h = X_{\max}$. В результате в области Q_T можно ввести сетку $Q_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h$. Приближенное решение v задачи (1), (2) ищется в узлах сетки $Q_{\tau h}$.

Значение функции g, определенной на сетке $Q_{\tau h}$, в узле (n,m) будем обозначать через g^n_m. Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и m. Для сокращения записи значения функции g на временном слое $(n+1)$ обозначаются через $g^{n+1}_m = \hat g$. Если вычисления по разностной схеме выполняются по временным слоям, т.е. на каждом шаге ищутся значения разностного решения на слое $(n+1)$ по уже известным значениям этого решения на слоях с меньшими номерами, то слой $(n+1)$ называют верхним, а слои с меньшими номерами, явно используемые в расчетных формулах, — нижними.

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [12]:

$$g_t = \frac{g^{n+1}_m - g^n_m}{\tau}, \quad g_{\overset{\circ}{t}} = \frac{g^{n+1}_m - g^{n-1}_m}{2\tau}, \quad g_{\bar t} = \frac{g^n_m - g^{n-1}_m}{\tau},$$

$$g_x = \frac{g^n_{m+1} - g^n_m}{h}, \quad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g^n_{m+1} - g^n_{m-1}}{2h}, \quad g_{\bar x} = \frac{g^n_m - g^n_{m-1}}{h}.$$

Для сокращения записи ниже через F^n_m обозначено значение $F(v^n_m)$.

2.1. Явные схемы. Явными схемами называются схемы, в которых дифференциальный оператор по пространственным переменным аппроксимируется на нижних временных слоях. Такой способ аппроксимации позволяет получить простые расчетные формулы для вычисления разностного решения. Приведем некоторые явные схемы, широко используемые на практике.

$$v_t + \big(F(v)\big)_x = 0; \quad v_t + \big(F(v)\big)_{\bar x} = 0; \quad v_t + \big(F(v)\big)_{\overset{\circ}{x}} = 0;$$

$$v_{\overset{\circ}{t}} + \big(F(v)\big)_{\overset{\circ}{x}} = 0; \quad v_t + \big(F(v)\big)_{\overset{\circ}{x}} = \omega h\, v_{x\bar x}, \quad \omega \in [0,1];$$

$$v_t + \big(F(v)\big)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{h^2}{2\tau}\, v_{x\bar{x}}; \quad v_t + \big(F(v)\big)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\tau}{2}\left(F'_v(v)F(v)_x\right)_{\bar{x}};$$

$$v_t + 0.5\left(1 - \operatorname{sign}\big(F'_v(v)\big)\right)\big(F(v)\big)_x + 0.5\left(1 + \operatorname{sign}\big(F'_v(v)\big)\right)\big(F(v)\big)_{\bar{x}} = 0;$$

$$v_m^{(1)} = v_m^n - \frac{\tau}{h}\left(F_{m+1}^n - F_m^n\right), \quad v_m^{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{\tau}{h}\left(F\big(v_m^{(1)}\big) - F\big(v_{m-1}^{(1)}\big)\right)\right);$$

$$v_m^{(1)} = v_m^n - \frac{\tau}{h}\left(F_m^n - F_{m-1}^n\right), \quad v_m^{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{\tau}{h}\left(F\big(v_{m+1}^{(1)}\big) - F\big(v_m^{(1)}\big)\right)\right);$$

$$\begin{aligned}
v_{m+0,5}^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(v_{m+1}^n + v_m^n\right) - \frac{\tau}{3h}\left(F_{m+1}^n - F_m^n\right),\\
v_m^{(2)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h}\left(F\big(v_{m+0,5}^{(1)}\big) - F\big(v_{m-0,5}^{(1)}\big)\right),\\
v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h}\left(-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n\right) -\\
&\quad - \frac{3\tau}{8h}\left(F\big(v_{m+1}^{(2)}\big) - F\big(v_{m-1}^{(2)}\big)\right) - \frac{\omega}{24}\left(v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n\right).
\end{aligned}$$

Последняя схема носит имя Русанова [11]. В ней параметр ω задается из промежутка $[4\nu^2 - \nu^4,\, 3]$, где $\nu = F'(v)\tau/h$. Можно положить $\omega = 4\nu^2 - \nu^4$, что приведет к снижению диссипативных свойств схемы. Для уменьшения дисперсионных свойств схемы можно взять $\omega = (4\nu^2 + 1)\,(4 - \nu^2)/5$.

И наконец, схема Уорминга–Катлера–Ломакса имеет вид

$$\begin{aligned}
v_m^{(1)} &= v_m^n - \frac{2\tau}{3h}\left(F_{m+1}^n - F_m^n\right),\\
v_m^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(v_m^n + v_m^{(1)} - \frac{2\tau}{3h}\left(F\big(v_m^{(1)}\big) - F\big(v_{m-1}^{(1)}\big)\right)\right),\\
v_m^{n+1} &= v_m^n - \frac{\tau}{24h}\left(-2F_{m+2}^n + 7F_{m+1}^n - 7F_{m-1}^n + 2F_{m-2}^n\right) -\\
&\quad - \frac{3\tau}{8h}\left(F\big(v_{m+1}^{(2)}\big) - F\big(v_{m-1}^{(2)}\big)\right) - \frac{\omega}{24}\left(v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n\right).
\end{aligned}$$

Параметр ω задается так же, как и в схеме Русанова.

2.2. Неявные схемы. Неявными схемами называются схемы, в которых для аппроксимации дифференциального оператора по пространственным переменным используются значения неизвестной функции на верхнем временном слое. Когда для этого используются только значения на верхнем временном слое, схему называют чисто неявной или схемой с опережением. Примерами таких схем служат:

$$v_t + \big(F(\hat{v})\big)_x = 0; \quad v_t + \big(F(\hat{v})\big)_{\bar{x}} = 0;$$

$$v_t + 0.5\big(F(\hat{v})\big)_x + 0.5\big(F(v)\big)_{\bar{x}} = 0; \quad v_t + 0.5\big(F(\hat{v})\big)_{\bar{x}} + 0.5\big(F(v)\big)_x = 0;$$

$$v_t + 0.5\left(1 - \operatorname{sign}\big(F'_v(v)\big)\right)\big(F(\hat{v})\big)_x + 0.5\left(1 + \operatorname{sign}\big(F'_v(v)\big)\right)\big(F(\hat{v})\big)_{\bar{x}} = 0;$$

$$v_t + \big(F(\hat{v})\big)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\omega}{8}\left(v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n\right), \quad \omega \in [0,\, 1];$$

$$v_t + \big(F(\hat{v})\big)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\tau}{2}\big(F'_v(v)F(\hat{v})_x\big)_{\bar{x}}; \quad v_t + \big(F(\hat{v})\big)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\omega h^2}{\tau}\, v_{x\bar{x}};$$

$$v_t + \big(F(\hat{v})\big)_{\overset{\circ}{x}} = \omega\tau\left(\big(F'_v(v)\big)^2\hat{v}_x\right)_{\bar{x}}, \quad \omega \in (0,\, 1].$$

2.3. Схемы с весами. Для простоты рассмотрим только двухслойные разностные схемы, т.е. схемы, в формулах которых участвуют значения разностного решения только со слоев n и $(n+1)$. Для сокращения записей введем обозначение

$$v^\sigma = \sigma\hat{v} + (1 - \sigma)v.$$

Параметр σ, называемый весом, отвечает за доли, в которых берется функция v с верхнего и нижнего слоев. При $\sigma = 0$ схема использует только значения с нижнего слоя, т.е. явным образом. Если $\sigma = 1$, то применяются значения с верхнего временного слоя, т.е. получается чисто неявная аппроксимация. При

$\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$ в схеме участвуют как значения с нижнего, так и с верхнего слоев. При $\sigma = 1/2$ схема обладает симметрией относительно нижнего и верхнего слоев. Примерами таких схем служат:

$$v_t + \left(F^\sigma(v)\right)_x = 0; \quad v_t + \left(F^\sigma(v)\right)_{\bar{x}} = 0;$$

$$v_t + 0.5\left(1 - \operatorname{sign}\left(F'_v(v)\right)\right)\left(F^\sigma(v)\right)_x + 0.5\left(1 + \operatorname{sign}\left(F'_v(v)\right)\right)\left(F^\sigma(v)\right)_{\bar{x}} = 0;$$

$$v_t + \left(F^\sigma(v)\right)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\omega}{8}\left(v^n_{m+2} - 4v^n_{m+1} + 6v^n_m - 4v^n_{m-1} + v^n_{m-2}\right), \quad \omega \in [0,\, 1];$$

$$v_t + \left(F^{\sigma_1}(v)\right)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\tau}{2}\left(F'_v(v)F^{\sigma_2}(v)_x\right)_{\bar{x}}; \quad v_t + \left(F^{\sigma_1}(v)\right)_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\omega h^2}{\tau}\left(v^{\sigma_2}\right)_{x\bar{x}};$$

$$v_t + \left(F^{\sigma_1}(v)\right)_{\overset{\circ}{x}} = \omega\tau\left(\left(F'_v(v)\right)^2 v^{\sigma_2}_x\right)_{\bar{x}}, \quad \omega \in (0,\, 1].$$

3. Схемы для краевой задачи. Записи приведенных выше разностных схем не учитывают явно того факта, что реально задача (1), (2) решается в ограниченной по пространственной переменной области. Это делается позже, на этапе постановки разностной задачи. Однако уже при конструировании разностных схем часто учитывают особенности той краевой задачи, к которой будет сведена задача (1), (2). Рассмотрим в качестве примера разностные схемы, предназначенные для решения краевой задачи для уравнения (1) в области

$$\Pi_T = \left\{(t,x) \mid 0 < t < T,\ \ 0 < x < +\infty\right\}$$

с начальным и краевым условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = w_0(t). \tag{3}$$

Ниже мы будем считать, что задача (1), (3) поставлена корректно. Другими словами, функции u_0, w_0 и F таковы, что характеристики на фазовой плоскости (t,x) являются выходящими из точек вертикальной части границы $x = 0$, а именно, образуют острый угол с направлением оси x.

На множестве $(t \geqslant 0, x \geqslant 0)$ введем равномерную сетку с шагами τ и h. Для решения задачи (1), (3) в случае $u_0(0) = w_0(0)$ в [3] предложена разностная схема третьего порядка точности следующего вида:

$$\begin{aligned} v^{n+1}_{m-1} - 2v^n_m + v^{n-1}_{m+1} &= v^n_{m-1} - 2v^{n-1}_m + v^{n-2}_{m+1} - \\ &- \frac{\tau}{h}\Big(\big(F(v^n_{m-1}) - 2F(v^{n-1}_m) + F(v^{n-2}_{m+1})\big) - \big(F(v^n_{m-2}) - 2F(v^{n-1}_{m-1}) + F(v^{n-2}_m)\big)\Big). \end{aligned} \tag{4}$$

Для реализации счета по схеме (4) значения решения в узлах $(\tau,\, mh)$, $m = 2,\, 3,\, \ldots$, находятся по схеме Русанова, значения решения в узлах $(n\tau,\, h)$, $n = 3,\, 4,\, \ldots$, находятся по схеме

$$\begin{aligned} v^{n+1}_{m-1} - 2v^n_m + v^{n-1}_{m+1} &= v^n_{m-1} - 2v^{n-1}_m + v^{n-2}_{m+1} - \\ &- \frac{\tau}{h}\Big(\big(F(v^{n-1}_m) - 2F(v^{n-2}_{m+1}) + F(v^{n-3}_{m+2})\big) - \big(F(v^{n-1}_{m-1}) - 2F(v^{n-2}_m) + F(v^{n-3}_{m+1})\big)\Big). \end{aligned}$$

Для нахождения решения в узлах (τ, h), $(2\tau, h)$ предлагается использовать схему Русанова с учетом дополнительных сведений о решаемой задаче. Например, в задачах практикума предлагается использовать знание функции $u_0(x)$ при $x < 0$. Вычисление по схеме (4) можно вести прогонкой по линиям $t = (\tau/h)x + C$.

Опишем теперь схему третьего порядка точности, построенную в [3], для решения задачи (1), (3) в случае, если $u_0(0) \neq w_0(0)$. В основу алгоритма нахождения разрывного решения положена схема (4). Если $m > 1$, то вычисление решения на слое $(n+1)$ по слою n ведется непосредственно по формулам схемы (4), а если $m = 1$, то используются следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} v^{(1)}_{m+0.5} &= \frac{1}{2}\left(v^n_{m+1} + v^n_m\right) - \frac{\tau}{3h}\left(F^n_{m+1} - F^n_m\right), \\ v^{(2)}_m &= v^n_m - \frac{2\tau}{3h}\left(F\big(v^{(1)}_{m+0.5}\big) - F\big(v^{(1)}_{m-0.5}\big)\right), \\ v^{n+1}_1 &= v^n_1 - \frac{\tau}{24h}\left(F^n_0 - 12F^n_1 + 15F^n_2 - 4F^n_3\right) - \frac{3\tau}{8h}\left(F\big(v^{(2)}_2\big) - F\big(w_0(n\tau + 2\tau/3)\big)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Алгоритм поиска разрывного решения заключается в следующем. Вычисляется скачок начальных данных $sk = u_0(+0) - w_0(+0)$ и составляются новые начальные условия

$$u^I_0(x) = u_0(x), \quad w^I_0(t) = w_0(t) + sk$$

и

$$u_0^{II}(x) = u_0(x) - sk, \quad w_0^{II}(t) = w_0(t).$$

Пусть на слое n найдены два решения v^I и v^{II}, соответствующие первым и вторым начальным данным. Опишем способ нахождения разрывного решения на слое $(n+1)$. С помощью схемы (5) на слое $(n+1)$ вычисляются соответственно $\hat{v}^I$ и $\hat{v}^{II}$.

Пусть x_0 — точка пересечения линии разрыва $x(t)$ со слоем n и x_1 — со слоем $(n+1)$; тогда

$$x_1 = x_0 + \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_0 \tau + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_0 \tau^2 + O(\tau^3).$$

Соотношение на разрыве имеет вид

$$(v^+ - v^-)\,\frac{dx}{dt} = F(v^+) - F(v^-),$$

где v^+, v^- — правое и левое предельные значения функции на линии разрыва. Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-)}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-}\right).$$

Эти соотношения имеют смысл, когда $x(t)$ не имеет вертикальной касательной. Тогда

$$x_1 = x_0 + \left.\frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-}\right|_0 \tau + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{F(v^+) - F(v^-)}{v^+ - v^-}\right)\right|_0 \tau^2 + O(\tau^3).$$

Аппроксимируя v^+, v^- с третьим порядком точности, вычисляем x_1.

За значение разрывного решения задачи (1), (3) с разрывом начальных данных в точке $(0,0)$ принимается функция $\hat{v}$, определенная по правилу

$$\hat{v}_m = \hat{v}_m^I \quad \text{при} \quad x_m \geqslant x_1, \qquad \hat{v}_m = \hat{v}_m^{II} \quad \text{при} \quad x_m < x_1.$$

4. Схема Годунова. С.К. Годунов [4] предложил оригинальный метод решения одномерных задач с разрывными решениями. Опишем этот метод для решения задачи (1), (2). Метод состоит в том, что по известным значениям функции v на временном слое n вычисляются приближенные значения $F_{m+1/2}^{n+1/2}$, а затем находятся значения $\hat{v}$ по центрированной формуле

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h}\left(F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}\right).$$

Значения $v_{m+1/2}^{n+1/2}$, необходимые для вычисления величин

$$F_{m+1/2}^{n+1/2} = F\left(v_{m+1/2}^{n+1/2}\right),$$

берутся равными в точке $((n+1/2)\tau, (m+1/2)h)$ решению задачи Римана о распаде разрыва для уравнения (1) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$u_0^n(x) = \begin{cases} v_m^n, & x < (m+1/2)h, \\ v_{m+1}^n, & x > (m+1/2)h \end{cases}$$

при $t = n\tau$.

Иными словами, для определения значений $v_{m+1/2}^{n+1/2}$ ищется точное решение уравнения (1) с кусочно-постоянной начальной функцией u_0^n при $t = n\tau$, равной на интервале $((m-1/2)h, (m+1/2)h)$ значению v_m^n, и за значение $v_{m+1/2}^{n+1/2}$ принимается величина этого решения в точке $((n+1/2)\tau, (m+1/2)h)$. Чтобы избежать влияния двух различных точек разрыва функции u_0 на значение в точке $((n+1/2)\tau, (m+1/2)h)$, шаг τ выбирается из условия

$$\max_m \left|F'(v_m^n)\right| \frac{\tau}{h} < 1.$$

Из сказанного следует, что метод Годунова в описанном здесь варианте существенно использует возможность точно решить для уравнения (1) задачу Коши с начальной функцией вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases}$$

где u^- и u^+ — произвольные константы.

Такая задача называется задачей Римана о распаде разрыва. Для ее решения требуется знать теорию разрывных обобщенных решений для уравнения (1).

5. Удароулавливающие разностные схемы. Для достижения высокой точности численного решения как в разрывных, так и в гладких областях предложены удароулавливающие схемы, называемые схемами высокого разрешения. Основная идея, стоящая за всеми подобными схемами, — как можно больше использовать схемы высших порядков в областях гладкости решения и в то же время разумно добавлять достаточное рассеяние в локализованную область высокого градиента с тем, чтобы избежать возможной численной осцилляции. В результате удароулавливающие схемы нелинейны даже при применении их к линейным задачам. Более подробно с этими методами можно ознакомиться по монографии [8].

Опишем простейшие удароулавливающие разностные схемы. Интегрируя уравнение (1) по области $Q_{nm} = \{(t,x) | n\tau < t < (n+1)\tau,\ (m-1/2)h < x < (m+1/2)h\}$, получаем

$$\int\limits_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u((n+1)\tau, x)\,dx = \int\limits_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} u(n\tau, x)\,dx - \int\limits_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t,(m+1/2)h)\,dt + \int\limits_{n\tau}^{(n+1)\tau} F(t,(m-1/2)h)\,dt.$$

Заменив точные интегралы их приближениями, получаем разностную схему

$$\hat{v} = v - \frac{\tau}{h}\left(f_{m+1/2} - f_{m-1/2}\right), \tag{6}$$

в которой члены $f_{m+1/2}$ и $f_{m-1/2}$ называются граничными потоками и являются функциями F на одном или более временных слоях. Правильное вычисление граничных потоков является ключом к построению хорошей разностной схемы.

Граничный поток в противопотоковой схеме первого порядка можно записать в виде

$$f^{UP}_{m+1/2} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \operatorname{sign}(a_{m+1/2})\,\frac{F_{m+1} - F_m}{2},$$

или

$$f^{UP}_{m+1/2} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - |a_{m+1/2}|\,\frac{\Delta_{m+1/2}}{2}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_{m+1/2} = v_{m+1} - v_m. \tag{8}$$

Скорость волны a вычисляется как

$$a_{m+1/2} = \begin{cases} \dfrac{F_{m+1} - F_m}{\Delta_{m+1/2}}, & \text{если} \quad \Delta_{m+1/2} \neq 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u}, & \text{если} \quad \Delta_{m+1/2} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Скорость волны a и шаги сетки задают число Куранта — важный параметр при решении гиперболических уравнений:

$$\lambda = \frac{a\tau}{h}.$$

Выбор граничного потока в виде (7) может не удовлетворять условию неубывания энтропии, поэтому $|a_{m+1/2}|$ заменяется на $\psi(a_{m+1/2})$, которое определяется как

$$\psi(a_{m+1/2}) = \max\left(|a_{m+1/2}|, \delta\right), \tag{10}$$

где δ — малое положительное число.

Граничный поток в схеме с центральной разностью записывается в виде

$$f^{CN}_{m+1/2} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2}.$$

В схеме "тренога" (в зарубежной литературе она называется схемой Лакса–Вендроффа) поток определяется следующим образом:

$$f^{LW}_{m+1/2} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2} - \frac{\tau a^2_{m+1/2}}{2h}\,\Delta_{m+1/2}.$$

Хорошо известно, что противопотоковая схема слишком диссипативная, в то время как схемы с центральной разностью и "тренога" слишком дисперсионные в области сильных градиентов.

Рассмотрим, следуя [16], два подхода для построения удароулавливающих схем: алгебраический и геометрический.

5.1. Алгебраический подход. Большинство методов, созданных на основе алгебраического подхода, используют для определения граничных потоков линейную комбинацию приближений низкого f^L и высокого f^H порядков:

$$f_{m+1/2} = f^L_{m+1/2} + \varphi_{m+1/2}\bigl(f^H_{m+1/2} - f^L_{m+1/2}\bigr). \tag{11}$$

5.1.1. TVD-схемы. Ключ к успеху в алгебраическом подходе заключается в правильном вычислении весовой функции $\varphi_{m+1/2}$ таким образом, чтобы решение, вычисленное с использованием численного потока, определенного по формуле (11), удовлетворяло некоторым требованиям. Одно из таких требований, названное *уменьшением общей вариации* (total variation diminishing, TVD), предложено для разработки свободных от осцилляции схем.

Первая схема:

$$f^L_{m+1/2} = f^{UP}_{m+1/2}, \qquad f^H_{m+1/2} = f^{LW}_{m+1/2}. \tag{12}$$

Весовая функция вычисляется одним из следующих способов:

$$\varphi(r)_1 = \operatorname{minimod}(1, r); \quad \varphi(r)_2 = \frac{r + |r|}{1 + r}; \quad \varphi(r)_3 = \max\bigl(0, \min(2, 2r, (1 + r)/2)\bigr);$$

$$\varphi(r)_4 = \max\bigl(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)\bigr); \quad \varphi(r^+, r^-)_5 = \operatorname{minimod}(1, r^+, r^-);$$

$$\varphi(r^+, r^-)_6 = \operatorname{minimod}(1, r^+) + \operatorname{minimod}(1, r^-) - 1;$$

$$\varphi(r^+, r^-)_7 = \max\bigl(0, \min(2, 2r^+, 2r^-, (r^+ + r^-)/2))\bigr).$$

Функция minimod от двух аргументов определяется как

$$\operatorname{minimod}(a, b) = \operatorname{sign}(a)\max\bigl(0, \min(|a|, \operatorname{sign}(a)\cdot b)\bigr).$$

"Трехаргументная" функция minimod равна наименьшему по модулю аргументу, если все аргументы одного знака. В противном случае ее значение берется равным нулю.

Двухпараметрические весовые функции могут быть получены на основе однопараметрических функций $\varphi(r)$ по следующей формуле:

$$\varphi(r^+, r^-) = \varphi(r^+) + \varphi(r^-) - c,$$

где константа c может быть 1 (для minimod) или 2 (для других). Величина r вычисляется по формуле

$$r = \frac{\bigl(|a_{m+1/2-\sigma}| - \tau a^2_{m+1/2-\sigma}/h\bigr)\Delta_{m+1/2-\sigma}}{\bigl(|a_{m+1/2}| - \tau a^2_{m+1/2}/h\bigr)\Delta_{m+1/2}},$$

где $\sigma = \operatorname{sign}(a_{m+1/2})$, а величины r^+ и r^- определяются отношениями

$$r^+ = \frac{\Delta_{m+1/2+1}}{\Delta_{m+1/2}}, \qquad r^- = \frac{\Delta_{m+1/2-1}}{\Delta_{m+1/2}}. \tag{13}$$

Вторая схема:

$$f^L_{m+1/2} = f^{UP}_{m+1/2}, \qquad f^H_{m+1/2} = f^{CN}_{m+1/2}. \tag{14}$$

Весовая функция вычисляется следующим образом:

$$\varphi(r) = \frac{3-\eta}{4}\,\mathrm{minimod}\left[\frac{r}{\omega}, 1\right] + \frac{1+\eta}{4}\,\mathrm{minimod}\,(1, r\omega),$$

где ω — параметр сжатия: $1 \leqslant \omega \leqslant (3-\eta)/(1-\eta)$. Величина η может принимать одно из следующих значений: -1, $-1/3$, 0, $1/3$, $1/2$, 1. Параметр r определяется как

$$r = \frac{a_{m+1/2-\sigma} \cdot \Delta_{m+1/2-\sigma}}{a_{m+1/2} \cdot \Delta_{m+1/2}},$$

где $\sigma = \mathrm{sign}\,(a_{m+1/2})$.

Приведенная схема имеет первый порядок точности по времени. Повысить точность можно за счет замены эйлеровской временной дискретизации (6) каким-либо линейным одношаговым методом, таким как дискретизация Рунге–Кутта. Например,

$$v_m^{n+1/2} = v_m^n - \frac{\tau}{2h}\left(f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n\right), \quad v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\tau}{h}\left(f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2}\right). \tag{15}$$

Третья схема:

$$f_{m+1/2} = f_{m+1/2}^{UP} + \frac{\varphi(r^+) + \varphi(r^-)}{2}\left(f_{m+1/2}^{LW} - f_{m+1/2}^{UP}\right) - \frac{1}{2}\left(\psi(a_{m+1/2} + \gamma_{m+1/2}) - \psi(a_{m+1/2})\right)\Delta_{m+1/2},$$

где функции Δ, a, ψ, r^+ и r^- определяются формулами (8) – (10) и (13) соответственно. Коэффициент γ задается выражением

$$\gamma_{m+1/2} = \frac{\psi(a_{m+1/2}) - \tau a_{m+1/2}^2/h}{2}\begin{cases} \dfrac{F_{m+1} - F_m}{\Delta_{m+1/2}}, & \text{если} \;\; \Delta_{m+1/2} \neq 0, \\ 0, & \text{если} \;\; \Delta_{m+1/2} = 0. \end{cases}$$

Выбор весовой функция φ может быть осуществлен одним из способов, описанных в методе (12).

Четвертая схема. Представим функцию F в точке m в виде суммы

$$F_m = F^+ + F^-,$$

где

$$F_m^+ = F(a_m^+), \quad F_m^- = F(a_m^-), \quad a_m^+ = \max(v_m, 0), \quad a_m^- = \min(v_m, 0).$$

В литературе эту операцию называют расщеплением потока.

Поток в противопотоковой схеме в терминах расщепления потока записывается в виде

$$f_{m+1/2}^{UP} = F_m^+ + F_{m+1}^-,$$

а поток в схеме "тренога" — следующим образом:

$$f_{m+1/2}^{LW} = \frac{F_m + F_{m+1}}{2} - \frac{\tau}{2h}\,a_{m+1/2}(F_{m+1} - F_m).$$

В результате TVD-поток приобретает вид

$$\begin{aligned} f_{m+1/2} = f_{m+1/2}^{UP} &+ \frac{\varphi_m(r^+) + \varphi_{m+1}(r^-)}{2}\left(f_{m+1/2}^{LW} - f_{m+1/2}^{UP}\right) - \\ &- \frac{\varphi_m(r^+) + \varphi_{m+1}(r^-)}{2}\left(\Delta^+ F_m - \tau a_{m+1/2}\Delta^+(F_m^+ - F_m^-)/h\right), \end{aligned}$$

где

$$r^+ = \frac{\Delta^- f^+}{\Delta^+ f^+}, \quad r^- = \frac{\Delta^+ f^-}{\Delta^- f^-}, \quad \Delta^+ = (\;)_{m+1} - (\;)_m, \quad \Delta^- = (\;)_m - (\;)_{m-1}.$$

Выбор весовой функция φ может быть осуществлен одним из способов, описанных в методе (12).

FCT-схемы. Важным подклассом TVD-схем являются схемы, называемые схемами потока, корректирующего перенос (flux corrected transport, FCT). С точки зрения сохранения монотонности решения

FCT является одним из типов TVD-схемы. Отличие же в том, что обычные TVD-схемы (например, приведенные выше) одношаговые, тогда как у FCT два шага. Двухшаговая FCT-схема — это, по существу, гибридная схема, состоящая из комбинированных схем первого и высшего порядков. Она вычисляет предварительные данные из схемы первого порядка, а затем фильтрует поправку высшего порядка, используя весовые множители, чтобы предотвратить появление новых экстремумов. Таким образом, в области, где искомая функция изменяется плавно, используется схема высшего порядка. В области резкого изменения искомой функции предпочтение отдается схеме низшего порядка.

FCT-процедура состоит из следующих этапов:

— вычисляется поток низкого порядка $f^L_{m+1/2}$;

— вычисляется поток высокого порядка $f^H_{m+1/2}$;

— определяется антидиффузионный поток $A_{m+1/2} = f^H_{m+1/2} - f^L_{m+1/2}$;

— вычисляется решение низкого порядка

$$v^{td}_m = v^n_m - \frac{\tau}{h}\left(f^L_{m+1/2} - f^L_{m-1/2}\right);$$

— ограничивается или корректируется антидиффузионный поток $A^c = A^c(A)$;

— вычисляется решение на верхнем временном слое с использованием ограниченного антидиффузионного потока

$$v^{n+1}_m = v^{td}_m - \frac{\tau}{h}\left(A^c_{m+1/2} - A^c_{m-1/2}\right).$$

Первая схема. Поток высокого порядка определяется схемой “тренога”, а поток низкого порядка — противопотоковой схемой. Ограниченный антидиффузионный поток задается формулой

$$A^c_{m+1/2} = s\cdot\max\left\{0,\, \min\left[\left|A_{m+1/2}\right|,\ \frac{s\cdot h(v^{td}_{m+2} - v^{td}_{m+1})}{\tau},\ \frac{s\cdot h(v^{td}_{m} - v^{td}_{m-1})}{\tau}\right]\right\},\quad s = \operatorname{sign}(A_{m+1/2}). \tag{16}$$

Вторая схема. Поток высокого порядка определяется формулой

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}f_m - \dfrac{1}{2}f_{m-1}, & \text{если}\quad a_{m+1/2} \geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{3}{2}f_{m+2} - \dfrac{1}{2}f_{m+1}, & \text{если}\quad a_{m+1/2} < 0. \end{cases}$$

Поток низкого порядка задается противопотокой схемой первого порядка, а ограниченный антидиффузионный поток — формулой (16).

5.2. Геометрический подход. В геометрическом подходе воссоздается в каждой ячейке зависимая переменная v, подчиненная определенным монотонным ограничениям. Такие ограничения переменная v получает на обеих сторонах границы: $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m+1/2,R}$. Граничный поток затем вычисляется с использованием приближенного или точного риманова аппарата. Первым схему такого рода предложил С.К. Годунов в работе [4].

5.2.1. MUSCL-схемы. Можно увеличить порядок аппроксимации по пространственной переменной, если заменить в первоначальной схеме Годунова кусочно постоянную функцию на нижнем слое на кусочно линейную. В зарубежной литературе такие схемы получили название MUSCL (monotonic upwind scheme for conservational laws – монотонная противопотоковая схема для законов сохранения).

Первая схема. Значение зависимой переменной на границе ячейки сетки получается посредством следующего ограничителя наклона:

$$\begin{aligned} v_{m+1/2,R} &= v_{m+1} - \frac{1}{4}\left[(1-\eta)\Delta^*_{m+3/2} + (1+\eta)\Delta^{**}_{m+1/2}\right],\\ v_{m+1/2,L} &= v_m + \frac{1}{4}\left[(1-\eta)\Delta^{**}_{m-1/2} + (1+\eta)\Delta^*_{m+1/2}\right],\\ \Delta^*_{m+1/2} &= \operatorname{minimod}\left[\Delta_{m+1/2}, \omega\Delta_{m-1/2}\right],\\ \Delta^{**}_{m+1/2} &= \operatorname{minimod}\left[\Delta_{m+1/2}, \omega\Delta_{m+3/2}\right], \end{aligned}$$

где величина $\Delta_{m+1/2}$ определяется равенством (8), а величины ω и η выбираются так же, как в TVD-схеме (14). Граничный поток определяется по формуле

$$f_{m+1/2} = \frac{1}{2}\left[F(v_{m+1/2,R}) + F(v_{m+1/2,L}) - \left|\frac{F(v_{m+1/2,R}) - F(v_{m+1/2,L})}{v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}}\right|\left(v_{m+1/2,R} - v_{m+1/2,L}\right)\right].$$

Для достижения временной дискретизации второго порядка (в дополнение к приведенной выше пространственной дискретизации) можно заменить явную эйлеровскую дискретизацию (6) дискретизацией типа Рунге–Кутта (например, задаваемой формулами (15)).

Вторая схема. Кусочно-линейная функция v на отрезке $[x_{m-1/2}, x_{m+1/2}]$ задается формулой

$$v(t^n, x) = v_m^n + s_m^n \frac{x - x_m}{h}, \tag{17}$$

где s_m^n определяется из некоторых ограничительных функций, например,

$$s_m^n = \operatorname{minimod}(\Delta_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2}).$$

С помощью функции v вычисляются $v_{m+1/2,R}^n$ и $v_{m+1/2,L}^n$:

$$v_{m+1/2,R}^n = v_{m+1}^n - \frac{s_{m+1}^n}{2}, \quad v_{m+1/2,L}^n = v_m^n + \frac{s_m^n}{2}.$$

Введем кусочно-линейную функцию потока g с углом наклона g'_m:

$$g'_m = \begin{cases} \dfrac{F(v_{m+1/2,R}^n) - F(v_{m+1/2,L}^n)}{v_{m+1/2,R}^n - v_{m+1/2,L}^n}, & \text{если } s_m^n \neq 0, \\ F'(v_m^n), & \text{если } s_m^n = 0. \end{cases}$$

Тогда поток равен

$$f_{m+1/2} = \frac{1}{\tau} \int\limits_{n\tau}^{(n+1)\tau} g\big(v(x_{m+1/2}, t)\big)\, dt = \begin{cases} F(v_{m+1/2,R}^n) - \dfrac{\tau s_m^n}{2h} (g'_m)^2, & \text{если } F' > 0, \\ F(v_{m+1/2,L}^n) - \dfrac{\tau s_m^n}{2h} (g'_{m+1})^2, & \text{если } F' < 0. \end{cases}$$

Третья схема. Для расчета угла наклона s_m^n функции v (17) на каждом отрезке используется следующий двухшаговый алгоритм. Первый шаг — это монотонизированный центрально-разностный алгоритм:

$$\delta_m = 2 \operatorname{minimod}(\Delta_{m+1/2}, \Delta_{m-1/2}), \tag{18}$$

$$\delta_m^f = \min\left[\frac{\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}}{2}, \delta_m\right] \cdot \operatorname{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}). \tag{19}$$

На втором шаге выбирается угол наклона по формуле

$$s_m^n = \min\left[\frac{2}{3}\left|\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2} - \frac{1}{4}(\delta_{m+1}^f - \delta_m^f)\right|, \delta_m^f\right] \cdot \operatorname{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}). \tag{20}$$

Если минимум в уравнениях (18)–(20) достигается в первом аргументе, то получаем конечно-разностное приближение для первой производной функции v четвертого порядка точности:

$$s_m^n = \frac{2}{3}(v_{m+1} - v_{m-1}) - \frac{1}{12}(v_{m+2} - v_{m-2}).$$

Четвертая схема. Угол наклона s_m^n функции v (17) на каждом отрезке задается формулой

$$s_m^n = \operatorname{sign}(\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}) \min\left[\frac{1}{2}\left|\Delta_{m+1/2} + \Delta_{m-1/2}\right|, 2\left|\Delta_{m+1/2}\right|, 2\left|\Delta_{m-1/2}\right|\right],$$

если $\Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} > 0$; в противном случае значение s_m^n полагается равным нулю. Далее применяется двухшаговый алгоритм

$$v_m^{n+1/2} = v_m^n - \frac{\tau}{2h}\left[F\left(v_m^n + \frac{s_m^n}{2}\right) - F\left(v_m^n - \frac{s_m^n}{2}\right)\right], \quad v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\tau}{h}\left[f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2}\right],$$

где

$$f_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left[F(v_{m+1/2,R}^{n+1/2}) + F(v_{m+1/2,L}^{n+1/2}) - \left|\frac{F(v_{m+1/2,R}^{n+1/2}) - F(v_{m+1/2,L}^{n+1/2})}{v_{m+1/2,R}^{n+1/2} - v_{m+1/2,L}^{n+1/2}}\right| \left(v_{m+1/2,R}^{n+1/2} - v_{m+1/2,L}^{n+1/2}\right)\right],$$

$$v_{m+1/2,L}^{n+1/2} = v_m^{n+1/2} + s_m^n/2, \qquad v_{m+1/2,R}^{n+1/2} = v_{m+1}^{n+1/2} - s_{m+1}^n/2.$$

5.2.2. ENO-схемы. TVD-схемы имеют порядок точности не выше первого. Схемы, имеющие равномерно второй порядок точности, были названы ENO-схемами (essentially nonosciallatory — существенно неколебательные). Данные схемы не имеют нежелательных обрезающих свойств, но значительно превышают TVD-схемы по временным затратам. Это вызвано тем, что ENO-схемы используют более широкий (7-точечный вместо 5-точечного) конечно-разностный шаблон.

Первая схема. Угол наклона s_m^n функции v (17) на каждом отрезке задается формулой

$$s_m^n = \mathrm{minimod}\left[\Delta_{m+1/2} - D_{m+1/2},\, \Delta_{m-1/2} + D_{m-1/2}\right], \tag{21}$$

где величина D характеризует кривизну графика функции v:

$$D_{m+1/2} = \mathrm{minimod}\left[v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1},\, v_{m+2} - 2v_{m+1} + v_m\right].$$

Величина потока на границе вычисляется по формуле

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \dfrac{F(v_m^n) + a_{m+1/2}(1 - \tau a_{m-1/2}/h) s_m^n/2}{1 + \tau(a_{m+1/2} - a_{m-1/2})/h}, & \text{если} \quad a_{m+1/2} \geqslant 0, \\ \dfrac{F(v_{m+1}^n) - a_{m+1/2}(1 + \tau a_{m+3/2}/h) s_{m+1}^n/2}{1 + \tau(a_{m+1/2} - a_{m-1/2})/h}, & \text{если} \quad a_{m+1/2} < 0. \end{cases}$$

Вторая схема. Коэффициент s_m^n вычисляется по формуле (21), а величина потока на границе вычисляется по формуле

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} F\left(v_m^n + \dfrac{1 - \tau(a_{m+1/2} + a_{m+3/2})/(2h)}{1 + \tau(a_{m+1/2} - a_{m-1/2})/(2h)} \dfrac{s_m^n}{2}\right), & \text{если} \quad a_{m+1/2} \geqslant 0, \\ F\left(v_{m+1}^n + \dfrac{1 - \tau(a_{m+1/2} + a_{m+3/2})/(2h)}{1 + \tau(a_{m+3/2} - a_{m+1/2})/(2h)} \dfrac{s_{m+1}^n}{2}\right), & \text{если} \quad a_{m+1/2} < 0. \end{cases}$$

5.2.3. PPM-схема. По схеме PPM (piecewise-parabolic method — кусочно-параболический метод) ищется кусочно-непрерывная функция v, которая на каждом отрезке $[x_{m-1/2},\, x_{m+1/2}]$ является многочленом второй степени, записанным в форме

$$v(x) = v_{m-1/2,R} + \xi\left[\Delta v_m + w_m(1 - \xi)\right], \tag{22}$$

где

$$\xi = \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}}, \quad \Delta v_m = v_{m+1/2,L} - v_{m-1/2,R}, \quad w_m = 6\left[v_m - (v_{m+1/2,L} + v_{m-1/2,R})/2\right].$$

Для определения значений $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$ вычислим значения $v_{m+1/2}$ и $v_{m-1/2}$ по формуле

$$v_{m+1/2} = (v_{m+1} + v_m)/2 + (\delta_l v_m - \delta_l v_{m+1})/6,$$

где

$$\delta_l v_m = \begin{cases} \min\left(|\delta v_m|,\, 2\Delta_{m+1/2},\, 2\Delta_{m-1/2}\right) \mathrm{sign}\,(\delta v_m), & \text{если} \quad \Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \Delta_{m+1/2} \cdot \Delta_{m-1/2} \leqslant 0, \end{cases}$$

и $\delta v_m = (v_{m+1} - v_{m-1})/2$. Если $\delta_l v_m = \delta v_m$, то величина $v_{m+1/2}$ вычисляется по формуле

$$v_{m+1/2} = \frac{7}{12}(v_{m+1} + v_m) - \frac{1}{12}(v_{m+2} + v_{m-1}).$$

Величины $v_{m+1/2}$ и $v_{m-1/2}$ определяют значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$:

$$v_{m+1/2,L} = v_{m+1/2}, \quad v_{m-1/2,R} = v_{m-1/2}, \tag{23}$$

если функция $v(x)$, задаваемая формулой (22), принимает на отрезке $[x_{m-1/2},\, x_{m+1/2}]$ значения только между $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$. Другими словами, $v(x)$ должна быть монотонна на $[x_{m-1/2},\, x_{m+1/2}]$. Это свойство будет выполняться в области гладкости искомой функции и, в результате, функция $v(x)$ будет непрерывна в точках $x_{m+1/2}$.

В противном случае значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$ меняются так, чтобы $v(x)$ стала монотонной функцией на каждом отрезке $[x_{m-1/2},\, x_{m+1/2}]$ по следующему правилу. Обозначим $d_1 = v_{m+1/2,L} - v_m$, $d_2 = v_{m-1/2,R} - v_m$ и изменим значения $v_{m+1/2,L}$ и $v_{m-1/2,R}$, определенные в (23), по формулам

$$\begin{array}{ll} v_{m+1/2,L} = v_m, \quad v_{m-1/2,R} = v_m, & -d_1 \cdot d_2 \leqslant 0, \\ v_{m-1/2,R} = 3v_m - 2v_{m+1/2,L}, & -(d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3, \\ v_{m+1/2,L} = 3v_m - 2v_{m-1/2,R}, & (d_1^2 - d_2^2) > (d_1 - d_2)^2/3. \end{array}$$

В конечном итоге поток на границе ячейки вычисляется так:

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} F\left(\tilde{v}_{m+1/2,L}(a_{m+1/2}\tau)\right), & \text{если } a_{m+1/2} \geqslant 0, \\ F\left(\tilde{v}_{m+1/2,R}(-a_{m+1/2}\tau)\right), & \text{если } a_{m+1/2} < 0, \end{cases}$$

где

$$\tilde{v}_{m+1/2,L}(x) = v_{m+1/2,L} - \frac{\xi}{2}\left[\Delta v_m - \left(1 - \frac{2}{3}\xi\right) w_m\right], \quad \xi = \frac{x - x_m}{x_{m+1/2} - x_{m-1/2}},$$

и

$$\tilde{v}_{m+1/2,R}(x) = v_{m+1/2,R} + \frac{\xi}{2}\left[\Delta v_{m+1} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) w_{m+1}\right], \quad \xi = \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3/2} - x_{m+1/2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. *Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сборник. **47**. 271–306.
5. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
6. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
7. *Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999.
8. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. *Попов А.В.* Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2003.
10. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
11. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // ДАН СССР. 1968. **180**, № 6. 1303–1305.
12. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
14. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1973.
15. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
16. *Yang H.Q., Przekwas A.J.* A comparative study of advanced shock-capturing schemes applied to Burgers' equation // J. of Computational Physics. 1992. **102**. 139–159.

Поступила в редакцию
21.03.2003