Г. С. Маканин, Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 2, 35–88

DOI: 10.4213/dm284

Дискретная математика

том 13 выпуск 2 * 2001

УДК 512.4

Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе

© 2001 г. Г. С. Маканин

Дана конечная параметризация множества всех решений уравнения

$$x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$$

в свободной группе. Уравнение тесно связано с гипотезой Пуанкаре. Параметризующие функции зависят от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются последовательности натуральных переменных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00027.

1. Введение

Пусть F_r, $r \geqslant 2$, — свободная группа со свободными образующими $a_1, \dots, a_r$. Слова в алфавите $(a_1, \dots, a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1})$ называются словами группы F_r. Преобразования вида $a_i a_i^{-1} \to 1$ называются сокращениями. Слово, которое не допускает сокращений, называется несократимым. Длина слова A обозначается через $|A|$, пустое слово через 1.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — алфавит словарных переменных, то есть переменных, значениями которых являются слова группы F_r.

Уравнением в свободной группе F_r мы называем равенство слов $\Phi = \Psi$ в групповом алфавите $(x_1, \dots, x_n)$. Если Φ, Ψ — пустые слова, то уравнение $\Phi = \Psi$ мы будем называть тривиальным уравнением. Систему уравнений будем называть уравнением.

Преобразование

$$T = \begin{cases} x_1 \to X_1, \\ \quad \dots \\ x_n \to X_n, \end{cases}$$

где $X_1, \dots, X_n$ — несократимые слова группы F_r, называется решением уравнения $\Phi = \Psi$, если в результате применения преобразования T к уравнению $\Phi = \Psi$ и последующих сокращений мы получаем тривиальное уравнение. Преобразование T иногда мы будем записывать в виде

$$T = \{x_1 \to X_1, \dots, x_n \to X_n\}.$$

Мы рассматриваем уравнения со щелями. Щель — это знак, который указывает, в каком месте уравнения после применения преобразования T возможно сокращение. Обозначается щель вертикальной чертой. Решением уравнения со щелями считаем такое преобразование, в результате которого уравнение после сокращений становится тривиальным, а всякое, не содержащее щелей подслово уравнения, оказывается несократимым словом.

Мы рассматриваем уравнение вместе с условиями на длины словарных переменных. Условие имеет вид

$$L_1(\partial(x_1), \dots, \partial(x_n)) =, <, \leqslant L_2(\partial(x_1), \dots, \partial(x_n)),$$

где $\partial(x)$ — длина словарной переменной x, а L_1, L_2 — линейные формы. Решение T удовлетворяет приведенному условию, если соответствующее ему выражение

$$L_1(|X_1|, \dots, |X_n|) =, <, \leqslant L_2(|X_1|, \dots, |X_n|)$$

истинно.

Объединяя преобразование переменных фигурной скобкой, мы указываем, что в данном случае преобразование выписанных переменных происходит одновременно. Преобразование неподвижной переменной часто не выписывается.

Будем говорить, что уравнение E переводится

преобразованием T_1 в уравнение E_1,

...

преобразованием T_k в уравнение E_k,

если $ET_i = E_i$ для всех $i = 1, \dots, k$ и если для каждого решения S уравнения E найдется некоторое решение S_i некоторого уравнения E_i такое, что $S = T_i S_i$.

Малыми латинскими буквами x, y, z, u, v, w, быть может, с индексами, обозначаются словарные переменные, греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ натуральные переменные.

В конце каждого параграфа (2–10) выписано дерево его параметрических преобразований. Объединение этих деревьев в единое дерево параметрических преобразований позволяет выписать множество всех решений исходного уравнения (10.7) при помощи конечного числа параметрических преобразований вида

$$\begin{cases} x \to X(u_1, u_2, u_3, \omega_1, \dots, \omega_p), \\ y \to Y(u_1, u_2, u_3, \omega_1, \dots, \omega_p), \\ z \to Z(u_1, u_2, u_3, \omega_1, \dots, \omega_p), \\ v \to V(u_1, u_2, u_3, \omega_1, \dots, \omega_p), \end{cases}$$

где u_1, u_2, u_3 — словарные переменные, $\omega_1, \dots, \omega_p$ — составные натуральные переменные. Рассматриваемое в статье уравнение (10.7) тесно связано с гипотезой Пуанкаре (см. [1–3]).

2. Примитивная параметризация. Уравнения (2.1)–(2.7)

Параметризовать решения уравнения в свободной группе, значит выписать общее решение (множество всех решений) этого уравнения при помощи конечных формул, зависящих от параметров.

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения в свободной группе F_r без щелей. Общее решение всякого уравнения этого пункта может быть параметризовано конечным числом примитивно параметрических слов, то есть формул, зависящих от словарных переменных (значениями которых являются слова группы F_r) и от натуральных переменных (значениями которых являются натуральные числа).

Лемма 2.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3, \\ x_1^{-1} &= x_2^{-1}x_3^{-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^{\alpha+\beta}, \quad x_2 \to u_1^{\alpha}, \quad x_3 \to u_1^{\beta}\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 2.2. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1} &= z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^{\alpha}, \quad x_2 \to (u_1u_2)^{\beta}, \quad z_1 \to (u_1u_2)^{\gamma}u_1, \quad z_2 \to u_2(u_1u_2)^{\delta}\}$$

с условием $\alpha+\beta=\gamma+\delta+1$ в тривиальное уравнение.

Лемма 2.3. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3x_4, \\ x_1^{-1} &= x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^{\alpha+\beta+\gamma+1}u_1, \quad x_2 \to (u_1u_2)^{\alpha}u_1, \quad x_3 \to u_2(u_1u_2)^{\beta}, \quad x_4 \to (u_1u_2)^{\gamma}u_1\}$$

в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^{\alpha+\beta+\gamma}, \quad x_2 \to u_1^{\alpha}, \quad x_3 \to u_1^{\beta}, \quad x_4 \to u_1^{\gamma}\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 2.4. *Уравнение*

$$x_1x_2 = x_3x_4,\qquad x_1^{-1}x_2^{-1} = x_3^{-1}x_4^{-1} \tag{2.4}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^\alpha u_1,\quad x_2 \to u_2(u_1u_2)^\beta,\quad x_3 \to (u_1u_2)^\gamma u_1,\quad x_4 \to u_2(u_1u_2)^\delta\}$$

с условием $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^\alpha,\quad x_2 \to u_1^\beta,\quad x_3 \to u_1^\gamma,\quad x_4 \to u_1^\delta\}$$

с условием $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ в тривиальное уравнение.

Лемма 2.5. *Уравнение*

$$x_1y_1 = z_1z_2x_2x_3x_4,\qquad x_1^{-1}z_1z_2 = y_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1} \tag{2.5}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^{\alpha+\beta+\gamma+1}u_1,\quad x_2 \to (u_1u_2)^\alpha u_1,\quad x_3 \to u_2(u_1u_2)^\beta,\quad x_4 \to (u_1u_2)^\gamma u_1,\quad y_1 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^{\alpha+\beta+\gamma},\quad x_2 \to u_1^\alpha,\quad x_3 \to u_1^\beta,\quad x_4 \to u_1^\gamma,\quad y_1 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to 1,\quad x_2 \to 1,\quad x_3 \to 1,\quad x_4 \to 1,\quad y_1 \to u_1u_2,\quad z_1 \to u_1,\quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 2.6. *Уравнение*

$$x_1y_1x_2 = z_1z_2x_3x_4,\qquad x_1^{-1}z_1z_2x_2^{-1} = y_1x_3^{-1}x_4^{-1} \tag{2.6}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^\alpha u_1,\quad x_2 \to u_2(u_1u_2)^\beta,\quad x_3 \to (u_1u_2)^\gamma u_1,\quad x_4 \to u_1(u_1u_2)^\delta,\quad y_1 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

с условием $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^\alpha,\quad x_2 \to u_1^\beta,\quad x_3 \to u_1^\gamma,\quad x_4 \to u_1^\delta,\quad y_1 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

с условием $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to 1,\quad x_2 \to u_1^{\alpha+\beta},\quad x_3 \to u_1^\alpha,\quad x_4 \to u_1^\beta,\quad y_1 \to u_2u_3,\quad z_1 \to u_2,\quad z_2 \to u_3\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 2.7. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1 y_1 x_2 x_3 = z_1 z_2 x_4, \\ x_1^{-1} z_1 z_2 x_2^{-1} x_3^{-1} = y_1 x_4^{-1} \end{gathered} \tag{2.7}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to (u_1u_2)^{\alpha}u_1, \quad x_2 \to u_2(u_1u_2)^{\beta}, \quad x_3 \to (u_1u_2)^{\gamma}u_1,$$
$$x_4 \to (u_1u_2)^{\alpha+\delta+\gamma+1}u_1, \quad y_1 \to 1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to u_1^{\alpha}, \quad x_2 \to u_1^{\beta}, \quad x_3 \to u_1^{\gamma},$$
$$x_4 \to u_1^{\alpha+\beta+\gamma}, \quad y_1 \to 1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение; преобразованием

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to u_1^{\alpha}, \quad x_3 \to u_1^{\beta},$$
$$x_4 \to u_1^{\alpha+\beta}, \quad y_1 \to u_2u_3, \quad z_1 \to u_2, \quad z_2 \to u_3\}$$

в тривиальное уравнение.

Леммы 2.1–2.7 доказываются по порядку. Чтобы убедиться, что преобразование, выписанное в формулировке доказываемой леммы, является параметрическим решением уравнения этой леммы, нужно применить это преобразование к уравнению и проверить, является ли тождеством полученное выражение. С другой стороны, если преобразование вида

$$T = \{x_1 \to X_1, \dots, x_n \to X_n\},$$

где $X_1, \dots, X_n$ — слова группы F_r, является решением уравнения доказываемой леммы, то слова $X_1, \dots, X_n$ связаны конкретными условиями, которые задаются уравнением этой леммы. Используя эти условия и доказанные ранее леммы, несложно определить структуру слов $X_1, \dots, X_n$, после чего легко проверить, что решение T содержится в одном из преобразований доказываемой леммы. Уравнения доказываемых лемм не содержат щелей, поэтому в леммах 2.5, 2.6, 2.7 компоненты решения переменных x_1, y_1 не могут быть непустыми одновременно.

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$\begin{gathered} (2.1) \to 1 = 1, \\ \dots \\ (2.7) \to 1 = 1. \end{gathered}$$

3. Параметризующие функции. Уравнения (3.1)–(3.8)

Дадим индуктивное определение составной натуральной переменной. Всякая натуральная переменная называется составной натуральной переменной. Всякая переменная, значениями которой являются конечные последовательности составных натуральных переменных, называется составной натуральной переменной.

Параметризующей функцией называется выражение вида $F(x_1, \dots, x_n, \omega)$, где $x_1, \dots, x_n$ — словарные переменные, ω — составная натуральная переменная. При этом, если последовательность $\omega_1, \dots, \omega_k$ является значением составной натуральной переменной ω, то выражение $F(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_k)$ должно быть суперпозицией примитивно параметрических слов и параметризующих функций.

Суперпозиция примитивно параметрических слов и параметризующих функций называется параметрическим словом.

Лемма 3.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 z_2 x_2 x_3, \\ x_1^{-1} &= z_2^{-1} z_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ переводится преобразованием

$$t_1((3.1)) = \{x_1 \to (x_1x_2)^{\alpha+1}x_1, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to (x_1x_2)^{\alpha}x_1\}$$

в уравнение (3.2). *Уравнение* (3.1) *с условием $\partial(x_3) = \partial(x_1)$ переводится преобразованием*

$$t_2((3.1)) = \{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.2. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= z_1 z_2 x_3, \\ x_1^{-1} x_2^{-1} &= z_2^{-1} z_1^{-1} x_3^{-1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_3)$ переводится преобразованием

$$t_1((3.2)) = \{x_2 \to (x_2x_3)^{\alpha}x_2, \quad x_3 \to (x_2x_3)^{\alpha+1}x_2\}$$

в уравнение (3.1). *Уравнение* (3.2) *с условием $\partial(x_3) < \partial(x_2)$ переводится преобразованием*

$$t_2((3.2)) = \{x_2 \to (x_2x_3)^{\alpha+1}x_2, \quad x_3 \to (x_2x_3)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (3.3).

Уравнение (3.2) *с условием $\partial(x_2) = \partial(x_3)$ переводится преобразованием*

$$t_3((3.2)) = \{x_1 \to u_1u_2, \quad x_2 \to u_3, \quad x_3 \to u_3, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.3. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} &= z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned} t_1((3.3)) = \{x_1 \to x_2,\quad x_2 \to x_1,\quad & x_3 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta}, \\ & z_1 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\beta}z_1,\quad z_2 \to z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha}\} \end{aligned}$$

в уравнение (3.2); *преобразованием*

$$t_2((3.3)) = \{x_3 \to (z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2,\quad z_1 \to (z_1z_2x_3)^{\beta}z_1,\quad z_2 \to z_2(x_3z_1z_2)^{\alpha}\}$$

с $\alpha+\beta > 0$ *в уравнение* (3.2). *Уравнение* (3.3) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((3.3)) = \{x_1 \to 1,\quad x_2 \to 1,\quad x_3 \to u_1u_2,\quad z_1 \to u_1,\quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.4. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2z_1z_2x_3, \\ x_1^{-1} &= x_2^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_3^{-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((3.4)) = \{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2,\quad x_2 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (3.2). *Уравнение* (3.4) *с условием* $\partial(x_2) = \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((3.4)) = \{x_1 \to u_1,\quad x_2 \to u_1,\quad x_3 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.5. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1x_1 &= x_2x_3x_4y_2, \\ y_2x_1^{-1} &= x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}y_1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

переводится преобразованием

$$\{y_1 \to 1,\quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (2.3); *преобразованием*

$$\{x_1 \to 1,\quad x_2 \to 1,\quad x_3 \to 1,\quad x_4 \to 1,\quad y_1 \to u_1,\quad y_2 \to u_1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.6. *Уравнение*

$$
\begin{gathered}
x_1x_2y_1 = x_3y_2x_4,\\
x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 = x_3^{-1}y_1x_4^{-1}
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

переводится преобразованием

$$\{y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (2.4)*; преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_1, \quad x_4 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1\}$$

в уравнение (2.1).

Лемма 3.7. *Уравнение*

$$
\begin{gathered}
y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3 = x_4,\\
y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1} = x_4^{-1}
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((3.7)) = \{x_3 \to (x_3x_4)^{\alpha}x_3, \quad x_4 \to (x_3x_4)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (3.8)*. Уравнение* (3.7) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((3.7)) = \{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to u_1, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 3.8. *Уравнение*

$$
\begin{gathered}
y_1^{-1}x_1x_2y_1 = x_3x_4,\\
y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 = x_3^{-1}x_4^{-1}
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((3.8)) = \{x_3 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (3.7)*. Уравнение* (3.8) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$
\begin{aligned}
t_2((3.8)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to y_2^{-1}x_4^{-1}y_1,&\\
x_4 \to x_1, \quad y_1 \to x_4y_2, \quad y_2 \to x_4^{-1}y_1\}&
\end{aligned}
$$

в уравнение (3.5)*. Уравнение* (3.8) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((3.8)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3y_2\}$$

в уравнение (3.6).

Рассмотрим уравнение (3.2) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_1((3.2))$ при $\alpha = \lambda_{2k-1}$ и $t_1((3.1))$ при $\alpha = \lambda_{2k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} x_1 \to (x_1x_2)^{\lambda_{2k}+1}x_1, \\ x_2 \to (x_3(x_1x_2)^{\lambda_{2k}}x_1)^{\lambda_{2k-1}}x_3, \\ x_3 \to (x_3(x_1x_2)^{\lambda_{2k}}x_1)^{\lambda_{2k-1}+1}x_3. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}$, где $i = 1, 2, 3$; x_1, x_2, x_3 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_i &= x_i, \\ {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}} &= {}^{\mathrm{Ba}}((x_1x_2)^{\lambda_{2s}+1}x_1, (x_3(x_1x_2)^{\lambda_{2s}}x_1)^{\lambda_{2s-1}}x_3, \\ &\qquad (x_3(x_1x_2)^{\lambda_{2s}}x_1)^{\lambda_{2s-1}}x_3)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-3}, \lambda_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Ba}}(u_1, u_2, u_3)_r^{\mu}$, где $r = 1, 2, 3$; u_1, u_2, u_3 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных четной длины.

Рассмотрим уравнение (3.2) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение преобразования $t_2((3.2))$ при $\alpha = \lambda_{3k-2}$ на преобразование $t_1((3.3))$ при $\alpha = \lambda_{3k-1}$, $\beta = \lambda_{3k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} x_2 \to (x_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k-1}+\lambda_{3k}})^{\lambda_{3k-2}+1}x_2, \\ x_3 \to (x_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k-1}+\lambda_{3k}})^{\lambda_{3k-2}}x_2, \\ z_1 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k}}z_1, \\ z_2 \to z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k-1}}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{3s-2}, \lambda_{3s-1}, \lambda_{3s}}$, где $i = 1, 2, 3, 4$; x_2, x_3, z_1, z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{3s-2}, \lambda_{3s-1}, \lambda_{3s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_1 &= x_2, \\ {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_2 &= x_3, \\ {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_3 &= z_1, \\ {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_4 &= z_2, \end{aligned}$$

и

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{Bb}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
&\quad={}^{\mathrm{Bb}}\big((x_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s-1}+\lambda_{3s}})^{\lambda_{3s-2}+1}x_2,(x_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s-1}+\lambda_{3s}})^{\lambda_{3s-2}}x_2,\\
&\qquad\qquad x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s}}z_1,z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s}-1}\big)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-5},\lambda_{3s-4},\lambda_{3s-3}}.
\end{aligned}
$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1,T_2,\dots$ совпадает с преобразованием

$$
\begin{cases}
x_2\to{}^{\mathrm{Bb}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_1^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
x_3\to{}^{\mathrm{Bb}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_2^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
z_1\to{}^{\mathrm{Bb}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_3^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
z_2\to{}^{\mathrm{Bb}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_4^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}.
\end{cases}
$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Bb}}(u_1,u_2,u_3,u_4)_r^{\mu}$, где $r=1,2,3,4$; u_1,u_2,u_3,u_4 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных длины кратной трем.

Рассмотрим уравнение (3.2) и последовательность преобразований T_k, $k=1,2,\dots$, где каждое T_k есть произведение преобразования $t_2((3.2))$ при $\alpha=\lambda_{3k-2}$ на преобразование $t_2((3.3))$ при $\alpha=\lambda_{3k-1}$, $\beta=\lambda_{3k}$. Легко видеть, что

$$
T_k=\begin{cases}
x_2\to(x_2(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k-1}+\lambda_{3k}-1}z_1z_2)^{\lambda_{3k-2}+1}x_2,\\
x_3\to(x_2(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k-1}+\lambda_{3k}-1}z_1z_2)^{\lambda_{3k-2}}x_2,\\
z_1\to(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3k}}z_1,\\
z_2\to z_2(x_3z_1z_2)^{\lambda_{3k-1}}.
\end{cases}
$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}$, где $i=1,2,3,4$; x_2,x_3,z_1,z_2 — словарные переменные; $s\geqslant 0$; $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_1&=x_2,\\
{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_2&=x_3,\\
{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_3&=z_1,\\
{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_4&=z_2,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
&={}^{\mathrm{Bb}}\big((x_2(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s-1}+\lambda_{3s}-1}z_1z_2)^{\lambda_{3s-2}+1}x_2,(x_2(z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s-1}+\lambda_{3s}-1}z_1z_2)^{\lambda_{3s-2}}x_2,\\
&\qquad\qquad (z_1z_2x_3)^{\lambda_{3s}}z_1,z_2(x_3z_1z_2)^{\lambda_{3s}-1}\big)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-5},\lambda_{3s-4},\lambda_{3s-3}}.
\end{aligned}
$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1,T_2,\dots$ совпадает с преобразованием

$$
\begin{cases}
x_2\to{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_1^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
x_3\to{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_2^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
z_1\to{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_3^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}\\
z_1\to{}^{\mathrm{Bc}}(x_2,x_3,z_1,z_2)_4^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{3s-2},\lambda_{3s-1},\lambda_{3s}}.
\end{cases}
$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Bc}}(u_1, u_2, u_3, u_4)_r^{\mu}$, где $r = 1,2,3,4$; u_1, u_2, u_3, u_4 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных длины кратной трем.

Рассмотрим уравнение (3.2) и последовательность преобразований T_k, $k = 1,2,\ldots$, где каждое T_k есть последовательное произведение трех преобразований

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu_{3k-2}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu_{3k-2}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Ba}}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_{3k-2}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \to {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_1^{\mu_{3k-1}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_2^{\mu_{3k-1}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_3^{\mu_{3k-1}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Bb}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_4^{\mu_{3k-1}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \to {}^{\mathrm{Bc}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_1^{\mu_{3k}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Bc}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_2^{\mu_{3k}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Bc}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_3^{\mu_{3k}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Bc}}(x_2, x_3, z_1, z_2)_4^{\mu_{3k}}. \end{cases}$$

Пусть

$$T_k = \begin{cases} x_1 \to R_1(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3k-2}, \mu_{3k-1}, \mu_{3k}), \\ x_2 \to R_2(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3k-2}, \mu_{3k-1}, \mu_{3k}), \\ x_3 \to R_3(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3k-2}, \mu_{3k-1}, \mu_{3k}), \\ z_1 \to R_4(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3k-2}, \mu_{3k-1}, \mu_{3k}), \\ z_2 \to R_5(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3k-2}, \mu_{3k-1}, \mu_{3k}). \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_i^{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{3s-2}, \mu_{3s-1}, \mu_{3s}}$, где $i = 1,2,3,4,5$; x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots, \mu_{3s-2}$, μ_{3s-1}, μ_{3s} — последовательность переменных, значениями которых являются последовательности натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_i &= x_i, \qquad && i = 1,2,3, \\ {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_i &= z_{i-3}, \qquad && i = 4,5, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_i^{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{3s-2}, \mu_{3s-1}, \mu_{3s}} \\ &\qquad = {}^{\mathrm{Bd}}\big(R_1(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3s-2}, \mu_{3s-1}, \mu_{3s}), \ldots, \\ &\qquad\quad R_5(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \mu_{3s-2}, \mu_{3s-1}, \mu_{3s})\big)_i^{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{3s-5}, \mu_{3s-4}, \mu_{3s-3}} \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_1^{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{3s-2},\mu_{3s-1},\mu_{3s}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_2^{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{3s-2},\mu_{3s-1},\mu_{3s}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_3^{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{3s-2},\mu_{3s-1},\mu_{3s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_4^{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{3s-2},\mu_{3s-1},\mu_{3s}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_5^{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{3s-2},\mu_{3s-1},\mu_{3s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Bd}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)_r^{\nu}$, где $r = 1,2,3,4,5$; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 — словарные переменные; ν — переменная для последовательностей μ-переменных длины кратной трем.

Обозначим через ${}^{\mathrm{Bd}}$ преобразование

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_1^{\nu}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_2^{\nu}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_3^{\nu}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_4^{\nu}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Bd}}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)_5^{\nu}. \end{cases}$$

Предложение 3.1. *Уравнение* (3.2) *переводится*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Bd}}t_1((3.2))t_1((3.1))$ *в тривиальное уравнение,*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Bd}}t_2((3.2))t_3((3.3))$ *в тривиальное уравнение,*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Bd}}t_3((3.2))$ *в тривиальное уравнение.*

Рассмотрим уравнение (3.8) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_1((3.8))$ и $t_1((3.7))$ при $\alpha = \lambda_k$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} x_3 \to (x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_k}, \\ x_4 \to (x_3x_4)^{\lambda_k+1}x_3, \\ y_1 \to y_1(x_3x_4)^{\lambda_k}x_3, \\ y_2 \to y_2x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_k}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_i^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}$, где $i = 1,2,3,4$; x_3, x_4, y_1, y_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_1 &= x_3, \\ {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_2 &= x_4, \\ {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_3 &= y_1, \\ {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_4 &= y_2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_i^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s} \\ &\quad = {}^{\mathrm{Be}}(x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_s}, (x_3x_4)^{\lambda_s+1}x_3, y_1(x_3x_4)^{\lambda_s}x_3, y_2x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_s})_i^{\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_3 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_1^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}, \\ x_4 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_2^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_3^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_4^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Be}}(u_1, u_2, u_3, u_4)_r^{\mu}$, где $r = 1, 2, 3, 4$; u_1, u_2, u_3, u_4 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных.

Обозначим через ${}^{\mathrm{Be}}$ преобразование

$$\{x_3 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_1^{\mu}, \quad x_4 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_2^{\mu}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_3^{\mu}, \quad y_2 \to {}^{\mathrm{Be}}(x_3, x_4, y_1, y_2)_4^{\mu}\}.$$

Предложение 3.2. *Уравнение* (3.8) *переводится*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Be}}t_1((3.8))t_2((3.7))$ *в тривиальное уравнение,*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Be}}t_2((3.8))$ *в уравнение* (3.5),

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Be}}t_3((3.8))$ *в уравнение* (3.6).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$\begin{array}{lll} (3.1) \to 1 = 1, & (3.1) \to (3.2), & \\ (3.2) \to 1 = 1, & & \\ (3.3) \to 1 = 1, & (3.3) \to (3.2), & \\ (3.4) \to 1 = 1, & (3.4) \to (3.2), & \\ (3.5) \to 1 = 1, & (3.5) \to (2.3), & \\ (3.6) \to (2.1), & (3.6) \to (2.4), & \\ (3.7) \to 1 = 1, & (3.7) \to (3.8), & \\ (3.8) \to 1 = 1, & (3.8) \to (3.5), & (3.8) \to (3.6). \end{array}$$

4. Уравнения (4.1)–(4.8)

Лемма 4.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= y_2 z_1 z_2 x_2 x_3, \\ x_1^{-1} y_2 &= y_1 z_2^{-1} z_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение. Уравнение (4.1) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.1).

Лемма 4.2. *Уравнение*

$$x_1y_1 = y_2x_2z_1z_2x_3,$$
$$x_1^{-1}y_2 = y_1x_2^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_3^{-1} \tag{4.2}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение. Уравнение (4.2) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.4).

Лемма 4.3. *Уравнение*

$$x_1y_1 = y_2x_2x_3z_1z_2,$$
$$x_1^{-1}y_2 = y_1x_2^{-1}x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \tag{4.3}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение. Уравнение (4.3) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.1).

Лемма 4.4. *Уравнение*

$$y_1x_1x_2 = x_3y_2z_1z_2,$$
$$y_2x_1^{-1}x_2^{-1} = x_3^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \tag{4.4}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1\}$$

в уравнение (2.2). *Уравнение* (4.4) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.2).

Лемма 4.5. *Уравнение*

$$x_1y_1x_2x_3 = y_2z_1z_2,$$
$$x_1^{-1}y_2x_2^{-1}x_3^{-1} = y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \tag{4.5}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1\}$$

в уравнение (2.2). *Уравнение* (4.5) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.3).

Лемма 4.6. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1z_1z_2 &= x_3y_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1} &= x_3^{-1}y_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

с условием $\partial(y_1) \leqslant \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3, \quad x_3 \to x_1, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.1). *Уравнение* (4.6) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в уравнение (2.1).

Лемма 4.7. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1 &= x_3y_2z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 &= x_3^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

с условием $\partial(y_1) \leqslant \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.2). *Уравнение* (4.7) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в уравнение (2.1).

Лемма 4.8. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3y_1 &= y_2z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2 &= y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

с условием $\partial(y_1) \leqslant \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1\}$$

в уравнение (3.3). *Уравнение* (4.8) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad y_1 \to u_1, \quad y_2 \to u_1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} &(4.1) \to 1 = 1, && (4.1) \to (3.1), \\ &(4.2) \to 1 = 1, && (4.2) \to (3.4), \\ &(4.3) \to 1 = 1, && (4.3) \to (3.1), \\ &(4.4) \to (2.2), && (4.4) \to (3.2), \\ &(4.5) \to (2.2), && (4.5) \to (3.3), \\ &(4.6) \to (2.1), && (4.6) \to (3.1), \\ &(4.7) \to (2.1), && (4.7) \to (3.2), \\ &(4.8) \to 1 = 1, && (4.8) \to (3.3). \end{aligned}$$

5. Уравнения (5.1)–(5.5)

Лемма 5.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1z_1z_2 &= x_3, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1} &= x_3^{-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

переводится преобразованием

$$t_1((5.1)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3y_2\}$$

в уравнение (4.6).

Лемма 5.2. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1 &= x_3z_1z_2, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 &= x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((5.2)) = \{x_3 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (5.3). *Уравнение* (5.2) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((5.2)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3^{-1}y_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}$$

в уравнение (4.8). *Уравнение* (5.2) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((5.2)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3y_2\}$$

в уравнение (4.7).

Лемма 5.3. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3 &= z_1z_2, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1} &= z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((5.3)) = \{x_3 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta}, \quad z_1 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha}\}$$

в уравнение (5.2); *преобразованием*

$$\begin{aligned} t_2((5.3)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2, \\ y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1, \quad z_1 \to (z_1z_2x_3)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_3z_1z_2)^{\alpha}\} \end{aligned}$$

с $\alpha + \beta > 0$ *в уравнение* (5.2). *Уравнение* (5.3) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((5.3)) = \{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to u_1u_2, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 5.4. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1 &= x_3x_4, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2 &= x_3^{-1}x_4^{-1} \end{aligned} \tag{5.4}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(z_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((5.4)) = \{x_3 \to x_3^{-1},\quad y_1 \to y_1x_3,\quad z_2 \to z_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (5.5). *Уравнение* (5.4) *с условием* $\partial(z_2) \leqslant \partial(x_3) \leqslant \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((5.4)) = \{x_3 \to z_2^{-1}z_1^{-1},\quad x_4 \to x_3,\quad y_1 \to y_1z_1z_2,\quad z_1 \to y_2z_2^{-1},\quad z_2 \to z_1^{-1}\}$$

в уравнение (5.1). *Уравнение* (5.4) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned} t_3((5.4)) = \{x_1 \to x_4,\quad x_2 \to x_3,\quad x_3 \to y_1x_2z_2^{-1}z_1^{-1}, \\ x_4 \to x_1,\quad y_1 \to y_1^{-1},\quad z_1 \to z_2^{-1},\quad z_2 \to z_1^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (2.6); *преобразованием*

$$\begin{aligned} t_4((5.4)) = \{x_1 \to x_4,\quad x_2 \to x_3,\quad x_3 \to y_1x_2^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}, \\ x_4 \to x_1,\quad y_1 \to x_2,\quad z_1 \to x_2^{-1}z_2^{-1},\quad z_2 \to z_1^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (2.5); *преобразованием*

$$\begin{aligned} t_5((5.4)) = \{x_1 \to x_3,\quad x_3 \to y_1z_2^{-1}z_1^{-1}y_2^{-1},\quad x_4 \to x_1, \\ y_1 \to z_1z_2y_1^{-1},\quad z_1 \to z_2^{-1},\quad z_2 \to z_1^{-1}y_2^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (4.1).

Лемма 5.5. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3 &= x_4, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2x_3^{-1} &= x_4^{-1} \end{aligned} \tag{5.5}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((5.5)) = \{x_3 \to (x_3x_4)^{\alpha}x_3,\quad x_4 \to (x_3x_4)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (5.4). *Уравнение* (5.5) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((5.5)) = \{x_1 \to 1,\quad x_2 \to 1,\quad x_3 \to u_1,\quad x_4 \to u_1,\quad y_1 \to 1,\quad z_1 \to 1,\quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Рассмотрим уравнение (5.2) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_1((5.2))$ и $t_1((5.3))$ при $\alpha = \lambda_{2k-1}, \beta = \lambda_{2k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} x_3 \to (x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1})^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}x_3^{-1}, \\ y_1 \to y_1x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}, \\ y_2 \to y_2(x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1})^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}, \\ z_1 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2k}}z_1, \\ z_2 \to z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2k-1}}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$; x_3, y_1, y_2, z_1, z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1 &= x_3, \\ {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2 &= y_1, \\ {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3 &= y_2, \\ {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4 &= z_1, \\ {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5 &= z_2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}} \\ &\quad = {}^{\mathrm{Da}}\big((x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1})^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}}x_3^{-1}, y_1x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}}, y_2(x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1})^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}}, \\ &\qquad\qquad x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2s}}z_1, z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\lambda_{2s-1}}\big)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-3},\lambda_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_3 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Da}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)_r^{\mu}$, где $r = 1, 2, 3, 4, 5$; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных четной длины.

Рассмотрим уравнение (5.2) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_1((5.2))$ и

$t_1((5.3))$ при $\alpha = \lambda_{2k-1}, \beta = \lambda_{2k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} x_1 \to x_2, \\ x_2 \to x_1, \\ x_3 \to z_2^{-1} z_1^{-1} (x_3^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1})^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-1}, \\ y_1 \to y_2 (z_1 z_2 x_3)^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-1} z_1 z_2, \\ y_2 \to y_1 z_2^{-1} z_1^{-1} (x_3^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1})^{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-1}, \\ z_1 \to (z_1 z_2 x_3)^{\lambda_{2k}} z_1, \\ z_2 \to z_2 (x_3 z_1 z_2)^{\lambda_{2k-1}}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}$, где $i = 1, \dots, 7$; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1 z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}$, λ_{2s} — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = x_i, && i = 1, 2, 3, \\ &{}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = y_{i-3}, && i = 4, 5, \\ &{}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = z_{i-5}, && i = 6, 7, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}} \\ &\quad = {}^{\mathrm{Db}}\big(x_2, x_1, z_2^{-1} z_1^{-1} (x_3^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1})^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}-1}, y_2 (z_1 z_2 x_3)^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}-1} z_1 z_2, \\ &y_1 z_2^{-1} z_1^{-1} (x_3^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1})^{\lambda_{2s-1}+\lambda_{2s}-1} (z_1 z_2 x_3)^{\lambda_{2s}} z_1, z_2 (x_3 z_1 z_2)^{\lambda_{2s-1}}\big)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-3}, \lambda_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, \dots, T_k, \dots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_6^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_7^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Db}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)_r^{\mu}$, где $r = 1, \dots, 7$; u_i — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных четной длины.

Рассмотрим уравнение (5.2) и последовательность преобразований T_k,

$k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований

$$\begin{cases} x_3 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\mu_{2k-1}}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\mu_{2k-1}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\mu_{2k-1}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\mu_{2k-1}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Da}}(x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\mu_{2k-1}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\mu_{2k}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\mu_{2k}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\mu_{2k}}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\mu_{2k}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\mu_{2k}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_6^{\mu_{2k}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Db}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_7^{\mu_{2k}}. \end{cases}$$

Пусть

$$T_k = \begin{cases} x_1 \to R_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ x_2 \to R_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ x_3 \to R_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ y_1 \to R_4(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ y_2 \to R_5(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ z_1 \to R_6(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}), \\ z_2 \to R_7(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}). \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}}$, где $i = 1, \ldots, 7$; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}$ — последовательность переменных, значениями которых являются последовательности натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = x_i, && i = 1, 2, 3, \\ &{}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = y_{i-3}, && i = 4, 5, \\ &{}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i = y_{i-5}, && i = 6, 7, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_i^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}} \\ &\qquad = {}^{\mathrm{Dc}}\big(R_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}), \ldots, \\ &\qquad\qquad R_7(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, \mu_{2s-1}, \mu_{2s})\big)_i^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2s-3}, \mu_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_6^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_7^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Dc}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)_r^{\nu}$, где $r = 1, \ldots, 7$; u_i — словарные переменные; ν — переменная для последовательностей μ-переменных четной длины.

Обозначим через ${}^{\mathrm{Dc}}$ преобразование

$$\begin{cases} x_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_1^{\nu}, \\ x_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_2^{\nu}, \\ x_3 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_3^{\nu}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_4^{\nu}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_5^{\nu}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_6^{\nu}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Dc}}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2)_7^{\nu}. \end{cases}$$

Предложение 5.1. *Уравнение* (5.2) *переводится*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Dc}}t_1((5.2))t_3((5.3))$ *в тривиальное уравнение,*

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Dc}}t_2((5.2)$ *в уравнение* (4.8),

– *преобразованием* ${}^{\mathrm{Dc}}t_3((5.2)$ *в уравнение* (4.7).

Рассмотрим уравнение (5.4) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_1((5.4))$ и $t_1((5.5))$ при $\alpha = \lambda_k$. Легко видеть, что

$$T_k = \{x_3 \to x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_k}, \quad x_4 \to (x_3x_4)^{\lambda_{k+1}}x_3, \\ y_1 \to y_1(x_3x_4)^{\lambda_k}x_3, \quad z_2 \to z_2x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_k}\}.$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_i^{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}$, где $i = 1, 2, 3, 4$; x_3, x_4, y_1, z_2 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_1 &= x_3, \\ {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_2 &= x_4, \\ {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_3 &= y_1, \\ {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_4 &= z_2 \end{aligned}$$

и

$$^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_i^{\lambda_1,\dots,\lambda_s} = {}^{\mathrm{Dd}}(x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_s}, (x_3x_4)^{\lambda_s+1}x_3, y_1(x_3x_4)^{\lambda_s}x_3, z_2x_3^{-1}(x_4^{-1}x_3^{-1})^{\lambda_s})_i^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{s-1}}.$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \dots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_3 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_1^{\lambda_1,\dots,\lambda_s}, \\ x_4 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_2^{\lambda_1,\dots,\lambda_s}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_3^{\lambda_1,\dots,\lambda_s}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_4^{\lambda_1,\dots,\lambda_s}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию $^{\mathrm{Dd}}(u_1, u_2, u_3, u_4)_r^{\mu}$, где $r = 1, 2, 3, 4$; u_1, u_2, u_3, u_4 — словарные переменные, μ — переменная для последовательностей натуральных переменных.

Обозначим через $^{\mathrm{Dd}}$ преобразование

$$\begin{cases} x_3 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_1^{\mu}, \\ x_4 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_2^{\mu}, \\ y_1 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_3^{\mu}, \\ z_2 \to {}^{\mathrm{Dd}}(x_3, x_4, y_1, z_2)_4^{\mu}. \end{cases}$$

Предложение 5.2. *Уравнение* (5.4) *переводится*

– *преобразованием* $^{\mathrm{Dd}}t_1((5.4))t_2((5.5))$ *в тривиальное уравнение,*

– *преобразованием* $^{\mathrm{Dd}}t_2((5.4))t_1((5.1))$ *в* (4.6),

– *преобразованием* $^{\mathrm{Dd}}t_3((5.4))$ *в* (2.6),

– *преобразованием* $^{\mathrm{Dd}}t_4((5.4))$ *в* (2.5),

– *преобразованием* $^{\mathrm{Dd}}t_5((5.4))$ *в* (4.1).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

(5.1) → (4.6),

(5.2) → (5.3), (5.2) → (4.8), (5.2) → (4.7),

(5.3) → 1 = 1, (5.3) → (5.2),

(5.4) → (5.5), (5.4) → (5.1), (5.4) → (2.6), (5.4) → (2.5), (5.4) → (4.1),

(5.5) → 1 = 1, (5.5) → (5.4).

6. Параметризующие графы. Уравнения (6.1)–(6.39)

Параметризующий граф — это граф, вершинами которого являются уравнения, а ориентированными ребрами — преобразования. Ориентированное ребро, соединяющее вершину A с вершиной B, это преобразование T такое, что $AT = B$.

В параметризующем графе выделены две вершины, начальная и конечная. Всякая последовательность вершин и ориентированных ребер графа

$$A_1, T_1, A_2, T_2, \dots, A_m, T_m, A_{m+1},$$

где A_1 — начальная вершина, A_{m+1} — конечная вершина, T_i — ребро, соединяющее вершину A_i с вершиной A_{i+1}, называется собственным путем параметризующего графа.

Путь без самопересечений, соединяющий начальную и конечную вершины графа, называется главным путем параметризующего графа.

Докажем, что множество всех собственных путей параметризующего графа может быть собрано в конечный список параметрических преобразований.

Перенумеруем каким-либо образом все вершины графа. Собственной петлей r-й вершины назовем путь, который исходит из r-й вершины, пересекает вершины с номерами большими, чем r, и возвращается в r-ю вершину. Пусть некоторая вершина A с номером s имеет $p > 0$ собственных петель, и ни одна вершина с номером большим, чем s, собственных петель не имеет. Для каждой петли вершины A произведение всех преобразований может быть собрано в одно преобразование при помощи параметризующей функции, аналогичной функции $^{\mathrm{Ba}}$. Произведение всех преобразований вершины A может быть собрано в одно преобразование при помощи параметризующей функции, аналогичной функции $^{\mathrm{Bd}}$. Внесем полученное преобразование внутрь вершины A и будем считать, что вершина A собственных петель не имеет. Пусть некоторая вершина A_1 с номером $s_1 < s$ имеет $p_1 > 0$ собственных петель и ни одна вершина с номером большим, чем s_1, собственных петель не имеет. Продолжая описанную процедуру собирания решений при помощи параметризующих функций типа $^{\mathrm{Ba}}$ и $^{\mathrm{Bd}}$, мы получим граф, каждый собственный путь которого главный. Перемножив параметризующие функции главных путей графа, мы получим искомый список параметризующих преобразований.

Лемма 6.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3y_1 &= y_2z_1z_2x_4x_5, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2 &= y_1z_2^{-1}z_1^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.1}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ переводится преобразованием

$$\{x_1 \to x_3^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}$$

в уравнение (6.1). *Уравнение* (6.1) *с условием $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1) \leqslant 2\partial(y_1)$ переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_2x_3^{-1}y_1^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.4). *Уравнение* (6.1) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_1x_3y_2^{-1}, \quad x_3 \to x_1, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_4, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.6).

Лемма 6.2. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1x_1x_2 &= x_3x_4x_5y_2z_1z_2, \\ y_2x_1^{-1}x_2^{-1} &= x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.2}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_5^{-1}, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad y_1 \to x_5^{-1}y_1, \quad y_2 \to x_5y_2\}$$

в уравнение (6.2). *Уравнение* (6.2) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned}\{x_1 \to x_4, \quad x_2 \to x_5, \quad x_3 \to y_2x_3^{-1}y_1^{-1}, \quad x_4 \to x_1,& \\ x_5 \to x_2, \quad x_6 \to x_1, \quad y_1 \to y_2x_3^{-1}, \quad y_2 \to y_1x_3\}&\end{aligned}$$

в уравнение (6.7). *Уравнение* (6.2) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to y_2x_3y_1^{-1}, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.16).

Лемма 6.3. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3y_1 &= z_1z_2x_4x_5x_6, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}z_1z_2 &= y_1x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1} \end{aligned} \tag{6.3}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad z_1 \to x_3^{-1}z_1\}$$

в уравнение (6.3). *Уравнение* (6.3) *с условием* $\partial(z_1) \leqslant \partial(x_1) \leqslant 2\partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned}\{x_1 \to z_2^{-1}z_1^{-1}, \quad x_2 \to x_5, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_3,& \\ x_5 \to x_2, \quad x_6 \to x_1, \quad y_1 \to z_1z_2y_1^{-1}, \quad z_1 \to z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}y_2^{-1}\}&\end{aligned}$$

в уравнение (6.1). *Уравнение* (6.3) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to z_1z_2x_3^{-1}y_1^{-1}, \quad x_2 \to x_2^{-1}, \quad x_3 \to x_1^{-1}, \quad x_4 \to x_6^{-1}, \quad x_5 \to x_5^{-1}, \quad x_6 \to x_4^{-1}\}$$

в уравнение (6.18); *преобразованием*

$$\{x_1 \to z_1z_2x_3^{-1}y_1^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad z_2 \to z_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.18); *преобразованием*

$$\{x_1 \to y_2 z_2^{-1} z_1^{-1} y_1^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3, \\ x_5 \to x_4, \quad x_6 \to x_5, \quad y_1 \to y_1 z_1 z_2, \quad z_1 \to y_2 z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}\}$$

в уравнение (6.35).

Лемма 6.4. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1} x_1 x_2 y_1 x_3 &= z_1 z_2 x_4 x_5, \\ y_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} y_2 x_3^{-1} &= z_2^{-1} z_1^{-1} x_4^{-1} x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.4}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_4 x_3)^{\alpha} x_4, \quad x_4 \to x_5, \\ x_5 \to (x_4 x_3)^{\alpha+1} x_4, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.32). *Уравнение* (6.4) *с условием* $\partial(x_5) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_3 x_4)^{\alpha+1} x_3, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to (x_3 x_4)^{\alpha} x_3\}$$

в уравнение (6.15). *Уравнение* (6.4) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to u_1, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (5.2).

Лемма 6.5. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1} x_1 x_2 y_1 x_3 &= x_4 z_1 z_2 x_5, \\ y_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} y_2 x_3^{-1} &= x_4^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1} x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.5}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_4 x_3)^{\alpha} x_4, \quad x_4 \to x_5, \\ x_5 \to (x_4 x_3)^{\alpha+1} x_4, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.31). *Уравнение* (6.5) *с условием* $\partial(x_5) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_3 x_4)^{\alpha+1} x_3, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to (x_3 x_4)^{\alpha} x_3\}$$

в уравнение (6.37). *Уравнение* (6.5) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to u_1\}$$

в уравнение (5.2).

Лемма 6.6. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3 &= x_4x_5z_1z_2, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1} &= x_4^{-1}x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.6}$$

с условием $\partial(z_1z_2) < \partial(x_3)$ переводится преобразованием

$$\{x_3 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta+2}, \quad z_1 \to x_3(z_1z_2x_3)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_3(z_1z_2x_3)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.7)*; преобразованием*

$$\{x_3 \to (z_1z_2x_3)^{\alpha+\beta+1}z_1z_2, \quad z_1 \to (z_1z_2x_3)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_3z_1z_2)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.8)*. Уравнение* (6.6) *с условием $\partial(x_3) < \partial(z_1z_2)$ переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta}, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad z_1 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.32)*; преобразованием*

$$\{x_3 \to (z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad z_1 \to (z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_5z_1z_2)^{\alpha}\}$$

с $\alpha+\beta > 0$ в уравнение (6.31)*. Уравнение* (6.6) *с условием $\partial(x_3) = \partial(z_1z_2)$ переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to u_1u_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в уравнение (3.8)*.*

Лемма 6.7. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3z_1z_2 &= x_4x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} &= x_4^{-1}x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.7}$$

с условием $\partial(z_1z_2) < \partial(x_5)$ переводится преобразованием

$$\{x_5 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta+2}, \quad z_1 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.6)*; преобразованием*

$$\{x_5 \to (z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta+1}z_1z_2, \quad z_1 \to (z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_5z_1z_2)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.5)*. Уравнение* (6.7) *с условием $\partial(x_5) < \partial(z_1z_2)$ переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_4(z_1z_2x_4)^{\alpha+\beta}, \quad z_1 \to x_4(z_1z_2x_4)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_4(z_1z_2x_4)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.36)*; преобразованием*

$$\{x_4 \to x_5, \quad x_3 \to (z_1z_2x_4)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2, \quad z_1 \to (z_1z_2x_4)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_4z_1z_2)^{\alpha}\}$$

с $\alpha+\beta > 0$ в уравнение (6.25)*. Уравнение* (6.7) *с условием $\partial(x_5) = \partial(z_1z_2)$ переводится преобразованием*

$$\{x_5 \to u_1u_2, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в уравнение (3.7)*.*

Лемма 6.8. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_1^{-1}x_1x_2y_1z_1z_2x_3 &= x_4x_5,\\
y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1}x_3^{-1} &= x_4^{-1}x_5^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_4x_5)^{\alpha}x_4, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to (x_4x_5)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (6.35). *Уравнение* (6.8) *с условием* $\partial(x_5) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_3x_4)^{\alpha+1}x_3, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to (x_3x_4)^{\alpha}x_3\}$$

в уравнение (6.24). *Уравнение* (6.8) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to u_1\}$$

в уравнение (5.1).

Лемма 6.9. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
x_1x_2y_1 &= x_3y_2z_1z_2x_4x_5,\\
x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 &= x_3^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_3x_2)^{\alpha}x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_3x_2)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (6.21). *Уравнение* (6.9) *с условием* $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (6.1). *Уравнение* (6.9) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to u_1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_3\}$$

в уравнение (4.1).

Лемма 6.10. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
x_1y_1x_2x_3 &= x_4x_5y_2z_1z_2,\\
x_1^{-1}y_2x_2^{-1}x_3^{-1} &= x_4^{-1}x_5^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_4x_3)^{\alpha}x_4, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to (x_4x_3)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (6.2). *Уравнение* (6.10) *с условием* $\partial(x_4) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (6.17). *Уравнение* (6.10) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to u_1, \quad x_5 \to x_3\}$$

в уравнение (4.4).

Лемма 6.11. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1 &= x_3z_1z_2x_4x_5x_6, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2 &= x_3^{-1}y_1x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1} \end{aligned} \tag{6.11}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_3x_2)^\alpha x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_3x_2)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (6.30). *Уравнение* (6.11) *с условием* $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to (x_2x_1)^\alpha x_2\}$$

в уравнение (6.3). *Уравнение* (6.11) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_3, \quad x_6 \to x_4\}$$

в уравнение (2.5).

Лемма 6.12. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1x_3 &= x_4z_1z_2x_5x_6, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2x_3^{-1} &= x_4^{-1}y_1x_5^{-1}x_6^{-1} \end{aligned} \tag{6.12}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_4x_3)^\alpha x_4, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to (x_4x_3)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (6.20). *Уравнение* (6.12) *с условием* $\partial(x_4) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_5x_6)^{\alpha+1}x_5, \quad x_2 \to x_4, \quad x_4 \to (x_5x_6)^\alpha x_5,$$
$$x_5 \to x_2, \quad x_6 \to x_1, \quad y_1 \to y_1^{-1}, \quad z_1 \to z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}\}$$

в уравнение (6.11). *Уравнение* (6.12) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to u_1, \quad x_5 \to x_3, \quad x_6 \to x_4\}$$

в уравнение (2.6).

Лемма 6.13. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1 &= x_3y_2x_4z_1z_2x_5, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 &= x_3^{-1}y_1x_4^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.13}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_3x_2)^\alpha x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_3x_2)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (6.22). *Уравнение* (6.13) *с условием* $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (6.33). *Уравнение* (6.13) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_3\}$$

в уравнение (4.2).

Лемма 6.14. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1x_2y_1 = x_3y_2x_4x_5z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 = x_3^{-1}y_1x_4^{-1}x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \end{gathered} \tag{6.14}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_3x_2)^{\alpha}x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_3x_2)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (6.23). *Уравнение* (6.14) *с условием* $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (6.34). *Уравнение* (6.14) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_3\}$$

в уравнение (4.3).

Лемма 6.15. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4 = z_1z_2x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}x_4^{-1} = z_2^{-1}z_1^{-1}x_5^{-1} \end{gathered} \tag{6.15}$$

с условием $\partial(x_4) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to (x_4x_5)^{\alpha}x_4, \quad x_5 \to (x_4x_5)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (6.4). *Уравнение* (6.15) *с условием* $\partial(x_5) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to (x_4x_5)^{\alpha+1}x_4, \quad x_5 \to (x_4x_5)^{\alpha}x_4\}$$

в уравнение (6.26). *Уравнение* (6.15) *с условием* $\partial(x_4) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to u_1, \quad x_5 \to u_1\}$$

в уравнение (5.3).

Лемма 6.16. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= x_3y_1^{-1}x_4x_5y_1z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1} &= x_3^{-1}y_2^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.16}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_3x_2)^\alpha x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to (x_3x_2)^{\alpha+1}x_3\}$$

в уравнение (6.28). *Уравнение* (6.16) *с условием* $\partial(x_3) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_4x_3)^{\alpha+1}x_4, \quad x_2 \to x_5, \quad x_3 \to (x_4x_3)^\alpha x_4, \quad x_4 \to x_1, \quad x_5 \to x_2\}$$

в уравнение (6.35). *Уравнение* (6.16) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_1, \quad x_5 \to x_2\}$$

в уравнение (5.1).

Лемма 6.17. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2y_1x_3x_4 &= x_5y_2z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}x_4^{-1} &= x_5^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.17}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_5x_4)^\alpha x_5, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to (x_5x_4)^{\alpha+1}x_5\}$$

в уравнение (6.10). *Уравнение* (6.17) *с условием* $\partial(x_5) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to (x_2x_1)^\alpha x_2\}$$

в уравнение (6.38). *Уравнение* (6.17) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to u_1\}$$

в уравнение (6.17).

Лемма 6.18. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3 &= x_4x_5x_6, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2x_3^{-1} &= x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1} \end{aligned} \tag{6.18}$$

с условием $\partial(x_3) < \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_5x_6)^\alpha x_5, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad x_6 \to (x_5x_6)^{\alpha+1}x_5\}$$

в уравнение (6.39). *Уравнение* (6.18) *с условием* $\partial(x_6) < \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_3x_4)^{\alpha+1}x_3, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_6, \quad x_6 \to (x_3x_4)^\alpha x_3\}$$

в уравнение (6.19). *Уравнение* (6.18) *с условием* $\partial(x_3) = \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to u_1, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad x_6 \to u_1\}$$

в уравнение (5.4).

Лемма 6.19. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4 = x_5x_6, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2x_3^{-1}x_4^{-1} = x_5^{-1}x_6^{-1} \end{gathered} \tag{6.19}$$

с условием $\partial(x_4) < \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to (x_5x_6)^\alpha x_5, \quad x_5 \to x_4, \quad x_6 \to (x_5x_6)^{\alpha+1}x_5\}$$

в уравнение (6.18). *Уравнение* (6.19) *с условием* $\partial(x_6) < \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to (x_4x_5)^{\alpha+1}x_4, \quad x_5 \to x_6, \quad x_6 \to (x_4x_5)^\alpha x_4\}$$

в уравнение (6.29). *Уравнение* (6.19) *с условием* $\partial(x_4) = \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to u_1, \quad x_5 \to x_4, \quad x_6 \to u_1\}$$

в уравнение (5.5).

Лемма 6.20. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1y_1x_2 = x_3x_4z_1z_2x_5x_6, \\ x_1^{-1}z_1z_2x_2^{-1} = x_3^{-1}x_4^{-1}y_1x_5^{-1}x_6^{-1} \end{gathered} \tag{6.20}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_2 \to (x_5x_6)^\alpha x_5, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4, \quad x_6 \to (x_5x_6)^{\alpha+1}x_5\}$$

в уравнение (6.30). *Уравнение* (6.20) *с условием* $\partial(x_6) < \partial(x_2)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned} \{x_1 \to x_4^{-1}, \quad x_2 \to (x_5^{-1}x_6^{-1})^{\alpha+1}x_5^{-1}, \quad x_3 \to x_1^{-1}, \\ x_4 \to x_2^{-1}, \quad x_5 \to x_3^{-1}, \quad x_6 \to (x_5^{-1}x_6^{-1})^\alpha x_5^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (6.12). *Уравнение* (6.20) *с условием* $\partial(x_2) = \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned} \{x_1 \to x_4, \quad x_2 \to u_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_1, \\ x_6 \to u_1, \quad y_1 \to y_1^{-1}, \quad z_1 \to z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (2.7).

Лемма 6.21. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1y_1 = x_2x_3x_4z_1z_2x_4x_5, \\ x_1^{-1}y_2 = x_2^{-1}x_3^{-1}y_1z_2^{-1}z_1^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1} \end{gathered} \tag{6.21}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((6.21)) = \{x_1 \to (x_2x_1)^{\alpha+1}x_2, \quad x_2 \to (x_2x_1)^{\alpha}x_2\}$$

в уравнение (6.9). *Уравнение* (6.21) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((6.21)) = \{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to u_1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1,$$
$$x_5 \to 1, \quad y_1 \to u_2, \quad y_2 \to u_2, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.22. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1y_1 &= x_2x_3y_2x_4z_1z_2x_5, \\ x_1^{-1}y_2 &= x_2^{-1}x_3^{-1}y_1x_4^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.22}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.21))$ *в уравнение* (6.13). *Уравнение* (6.22) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_2)$ *переводится преобразованием* $t_2((6.21))$ *в тривиальное уравнение.*

Лемма 6.23. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1y_1 &= x_2x_3y_2x_4x_5z_1z_2, \\ x_1^{-1}y_2 &= x_2^{-1}x_3^{-1}y_1x_4^{-1}x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.23}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.21))$ *в уравнение* (6.14). *Уравнение* (6.23) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_2)$ *переводится преобразованием* $t_2((6.21))$ *в тривиальное уравнение.*

Лемма 6.24. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1z_1z_2x_3x_4 &= x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1} &= x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.24}$$

с условием $\partial(x_4) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((6.24)) = \{x_4 \to (x_4x_5)^{\alpha}x_4, \quad x_5 \to (x_4x_5)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (6.8). *Уравнение* (6.24) *с условием* $\partial(x_4) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((6.24)) = \{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to u_1, \quad x_5 \to u_1,$$
$$y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.25. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3z_1z_2x_4 &= x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_4^{-1} &= x_5^{-1} \end{aligned} \tag{6.25}$$

с условием $\partial(x_4) < \partial(x_5)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.24))$ *в уравнение* (6.7). *Уравнение* (6.25) *с условием* $\partial(x_4) = \partial(x_5)$ *переводится преобразованием* $t_2((6.24))$ *в тривиальное уравнение.*

Лемма 6.26. *Уравнение*

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4x_5 &= z_1z_2,\\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1} &= z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.26}$$

с условием $\partial(x_5) < \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_5 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta}, \quad z_1 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.37); *преобразованием*

$$\{x_5 \to (z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2, \quad z_1 \to (z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_5z_1z_2)^{\alpha}\}$$

с $\alpha+\beta>0$ *в уравнение* (6.15). *Уравнение* (6.26) *с условием* $\partial(x_5) = \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1, \quad x_5 \to u_1u_2,$$
$$y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.27. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1y_1^{-1}x_2x_3y_1x_4x_5 &= z_1z_2,\\ x_1^{-1}y_2^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2x_4^{-1}x_5^{-1} &= z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.27}$$

с условием $\partial(x_1) < \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_4,$$
$$z_1 \to x_5(z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2x_5(z_1z_2x_5)^{\alpha}\}$$

в уравнение (6.15); *преобразованием*

$$\{x_1 \to (z_1z_2x_5)^{\alpha+\beta-1}z_1z_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad x_4 \to x_3,$$
$$x_5 \to x_4, \quad z_1 \to (z_1z_2x_5)^{\beta}z_1, \quad z_2 \to z_2(x_5z_1z_2)^{\alpha}\}$$

с $\alpha+\beta>0$ *в уравнение* (6.37). *Уравнение* (6.27) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1u_2, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1, \quad x_5 \to 1,$$
$$y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1, \quad z_1 \to u_1, \quad z_2 \to u_2\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.28. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3y_1^{-1}x_4x_5y_1z_1z_2,\\ x_1^{-1} &= x_2^{-1}x_3^{-1}y_2^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1} \end{aligned} \tag{6.28}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.21))$ *в уравнение* (6.16). *Уравнение* (6.28) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to u_1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1,$$
$$x_5 \to 1, \quad y_1 \to 1, \quad y_2 \to 1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.29. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4x_5 = x_6, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1} = x_6^{-1} \end{gathered} \tag{6.29}$$

с условием $\partial(x_5) < \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_5 \to (x_5x_6)^\alpha x_5, \quad x_6 \to (x_5x_6)^{\alpha+1}x_5\}$$

в уравнение (6.19). *Уравнение* (6.29) *с условием* $\partial(x_5) = \partial(x_6)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1,$$
$$x_5 \to u_1, \quad x_6 \to u_1, \quad y_1 \to 1, \quad z_1 \to 1, \quad z_2 \to 1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.30. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1y_1 = x_2x_3z_1z_2x_4x_5x_6, \\ x_1^{-1}z_1z_2 = x_2^{-1}x_3^{-1}y_1x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1} \end{gathered} \tag{6.30}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.21))$ *в уравнение* (6.28). *Уравнение* (6.30) *с условием* $\partial(x_1) = \partial(x_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to u_1, \quad x_2 \to u_1, \quad x_3 \to 1, \quad x_4 \to 1,$$
$$x_5 \to 1, \quad x_6 \to 1, \quad y_1 \to u_2u_3, \quad z_1 \to u_2, \quad z_2 \to u_3\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 6.31. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1 = x_3x_4z_1z_2x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 = x_3^{-1}x_4^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_5^{-1} \end{gathered} \tag{6.31}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((6.31)) = \{x_3 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.5). *Уравнение* (6.31) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((6.31)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3^{-1}y_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}$$

в уравнение (6.33). *Уравнение* (6.31) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((6.31)) = \{x_3 \to y_1^{-1}x_3y_2\}$$

в уравнение (6.13).

Лемма 6.32. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_1^{-1}x_1x_2y_1 &= x_3x_4x_5z_1z_2,\\
y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2 &= x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.31))$ *в уравнение* (6.6). *Уравнение* (6.32) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием* $t_2((6.31))$ *в уравнение* (6.34). *Уравнение* (6.32) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием* $t_3((6.31))$ *в уравнение* (6.14).

Лемма 6.33. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
x_1x_2x_3y_1 &= y_2x_4z_1z_2x_5,\\
x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2 &= y_1x_4^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}x_5^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$
t_1((6.33)) = \{x_1 \to x_3^{-1},\quad x_2 \to x_1,\quad x_3 \to x_2,\quad y_1 \to x_3y_1,\quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}
$$

в уравнение (6.33). *Уравнение* (6.33) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$
t_2((6.33)) = \{x_1 \to y_2x_3^{-1}y_1^{-1},\quad x_2 \to x_1,\quad x_3 \to x_2,\quad y_1 \to y_1x_3,\quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}
$$

в уравнение (6.5). *Уравнение* (6.33) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$
\begin{aligned}
t_3((6.33)) = \{x_1 \to y_1x_3y_2^{-1},\quad x_3 \to x_1,\quad x_4 \to x_5,\quad x_5 \to x_4,&\\
y_1 \to y_2,\quad y_2 \to y_1\}&
\end{aligned}
$$

в уравнение (6.5).

Лемма 6.34. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
x_1x_2x_3y_1 &= y_2x_4x_5z_1z_2,\\
x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2 &= y_1x_4^{-1}x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием* $t_1((6.33))$ *в уравнение* (6.34). *Уравнение* (6.34) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием* $t_2((6.33))$ *в уравнение* (6.6). *Уравнение* (6.34) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием* $t_3((6.33))$ *в уравнение* (6.4).

Лемма 6.35. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_1^{-1}x_1x_2y_1z_1z_2 &= x_3x_4x_5,\\
y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2z_2^{-1}z_1^{-1} &= x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$
\{x_3 \to x_3^{-1},\quad y_1 \to y_1x_3,\quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}
$$

в уравнение (6.7). *Уравнение* (6.35) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to y_2^{-1}x_5^{-1}y_1, \quad x_4 \to x_1, \quad x_5 \to x_2, y_1 \to x_5y_2, \quad y_2 \to x_5^{-1}y_1\}$$

в уравнение (6.2). *Уравнение* (6.35) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_4, \quad x_2 \to x_5, \quad x_3 \to y_2^{-1}x_1y_1, \quad x_4 \to x_2, \quad x_5 \to x_3, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.10).

Лемма 6.36. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4z_1z_2 = x_5, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}x_4^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} = x_5^{-1} \end{gathered} \tag{6.36}$$

переводится преобразованием

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to y_2^{-1}x_1y_1, \quad y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1\}$$

в уравнение (6.23).

Лемма 6.37. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1x_3x_4 = x_5z_1z_2, \\ y_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}y_2x_3^{-1}x_4^{-1} = x_5^{-1}z_2^{-1}z_1^{-1} \end{gathered} \tag{6.37}$$

с условием $\partial(x_5) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.26). *Уравнение* (6.37) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_5) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to y_1^{-1}x_3^{-1}y_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}$$

в уравнение (6.38). *Уравнение* (6.37) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_5 \to y_1^{-1}x_5y_2\}$$

в уравнение (6.17).

Лемма 6.38. *Уравнение*

$$\begin{gathered} x_1x_2x_3y_1x_4x_5 = y_2z_1z_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}y_2x_4^{-1}x_5^{-1} = y_1z_2^{-1}z_1^{-1} \end{gathered} \tag{6.38}$$

с условием $\partial(x_1) \leqslant \partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad y_2 \to x_3^{-1}y_2\}$$

в уравнение (6.38). *Уравнение* (6.38) *с условием* $\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1) \leqslant 2\partial(y_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_2x_3^{-1}y_1^{-1}, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_2, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad y_2 \to y_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.26). *Уравнение* (6.38) *с условием* $2\partial(y_1) \leqslant \partial(x_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_2x_1y_1^{-1}\}$$

в уравнение (6.27).

Лемма 6.39. *Уравнение*

$$\begin{gathered} y_1^{-1}x_1x_2y_1 = x_3x_4x_5x_6, \\ z_2^{-1}z_1^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}z_1z_2 = x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1} \end{gathered} \tag{6.39}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to y_1x_3, \quad z_2 \to z_2x_3^{-1}\}$$

в уравнение (6.18). *Уравнение* (6.39) *с условием* $\partial(z_2) \leqslant \partial(x_3) \leqslant 2\partial(z_1z_2)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{aligned} \{x_3 \to z_2^{-1}z_1^{-1}, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_6, \quad x_6 \to x_5, \quad y_1 \to y_1z_1z_2, \\ z_1 \to y_2z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (6.35). *Уравнение* (6.39) *с условием* $\partial(z_1z_2) \leqslant \partial(x_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to y_1^{-1}x_3z_1z_2\}$$

в уравнение (6.28); *преобразованием*

$$\{x_3 \to y_1^{-1}x_3^{-1}z_1z_2, \quad y_1 \to x_3y_1, \quad z_1 \to x_3^{-1}z_1\}$$

в уравнение (6.3); *преобразованием*

$$\begin{aligned} \{x_1 \to x_5, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to y_1z_2^{-1}z_1^{-1}y_2^{-1}, \quad x_4 \to x_3, \quad x_5 \to x_2, \\ x_6 \to x_1, \quad y_1 \to z_1z_2y_1^{-1}, \quad z_1 \to z_2^{-1}, \quad z_2 \to z_1^{-1}y_2^{-1}\} \end{aligned}$$

в уравнение (6.1).

Рассмотрим граф, вершинами которого являются уравнения (6.1)–(6.39), а ориентированными ребрами преобразования, соединяющие уравнения (6.1)–(6.39):

(6.1) → (6.1), (6.1) → (6.4), (6.1) → (6.6),
(6.2) → (6.2), (6.2) → (6.7), (6.2) → (6.16),
(6.3) → (6.3), (6.3) → (6.1), (6.3) → (6.18), (6.3) → (6.18), (6.3) → (6.35),
(6.4) → (6.32), (6.4) → (6.15),
(6.5) → (6.31), (6.5) → (6.37),
(6.6) → (6.7), (6.6) → (6.8), (6.6) → (6.32), (6.6) → (6.31),

$(6.7) \to (6.6)$, $(6.7) \to (6.5)$, $(6.7) \to (6.36)$, $(6.7) \to (6.25)$,
$(6.8) \to (6.35)$, $(6.8) \to (6.24)$,
$(6.9) \to (6.21)$, $(6.9) \to (6.1)$,
$(6.10) \to (6.2)$, $(6.10) \to (6.17)$,
$(6.11) \to (6.30)$, $(6.11) \to (6.3)$,
$(6.12) \to (6.20)$, $(6.12) \to (6.11)$,
$(6.13) \to (6.22)$, $(6.13) \to (6.33)$,
$(6.14) \to (6.23)$, $(6.14) \to (6.34)$,
$(6.15) \to (6.4)$, $(6.15) \to (6.26)$,
$(6.16) \to (6.28)$, $(6.16) \to (6.35)$,
$(6.17) \to (6.10)$, $(6.17) \to (6.38)$,
$(6.18) \to (6.39)$, $(6.18) \to (6.19)$,
$(6.19) \to (6.18)$, $(6.19) \to (6.29)$,
$(6.20) \to (6.30)$, $(6.20) \to (6.12)$,
$(6.21) \to (6.9)$,
$(6.22) \to (6.13)$,
$(6.23) \to (6.14)$,
$(6.24) \to (6.8)$,
$(6.25) \to (6.7)$,
$(6.26) \to (6.37)$, $(6.26) \to (6.15)$,
$(6.27) \to (6.15)$, $(6.27) \to (6.37)$,
$(6.28) \to (6.16)$,
$(6.29) \to (6.19)$,
$(6.30) \to (6.11)$,
$(6.31) \to (6.5)$, $(6.31) \to (6.33)$, $(6.31) \to (6.13)$,
$(6.32) \to (6.6)$, $(6.32) \to (6.34)$, $(6.32) \to (6.14)$,
$(6.33) \to (6.33)$, $(6.33) \to (6.5)$, $(6.33) \to (6.5)$,
$(6.34) \to (6.34)$, $(6.34) \to (6.6)$, $(6.34) \to (6.4)$,
$(6.35) \to (6.7)$, $(6.35) \to (6.2)$, $(6.35) \to (6.10)$,
$(6.36) \to (6.23)$,
$(6.37) \to (6.26)$, $(6.37) \to (6.38)$, $(6.37) \to (6.17)$,
$(6.38) \to (6.38)$, $(6.38) \to (6.26)$, $(6.38) \to (6.27)$,
$(6.39) \to (6.18)$, $(6.39) \to (6.35)$, $(6.39) \to (6.11)$, $(6.39) \to (6.3)$, $(6.39) \to (6.1)$.

Выделив в графе начальную и конечную вершины, мы получим параметризующий граф. Начальную вершину выбираем из списка вершин (6.1)–(6.12), конечную вершину из списка вершин (6.4)–(6.30). Всего мы получим $12 \cdot 27 = 324$ параметризующих графа. Обозначим эти графы через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{324}$.

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \to (6.4) \to (5.2) \\
 & & \to (6.5) \to (5.2) \\
 & & \to (6.6) \to (3.8) \\
 & & \to (6.7) \to (3.7) \\
 & & \to (6.8) \to (5.1) \\
 & & \to (6.9) \to (4.1) \\
 & & \to (6.10) \to (4.4) \\
(6.1) \to & & \to (6.11) \to (2.5) \\
(6.2) \to & \Gamma_1 & \to (6.12) \to (2.6) \\
(6.3) \to & \dots & \to (6.13) \to (4.2) \\
(6.4) \to & \Gamma_{324} & \to (6.14) \to (4.3) \\
\dots & & \to (6.15) \to (5.3) \\
(6.12) \to & & \to (6.16) \to (5.1) \\
 & & \to (6.17) \to (4.5) \\
 & & \to (6.18) \to (5.4) \\
 & & \to (6.19) \to (5.5) \\
 & & \to (6.20) \to (2.7) \\
 & & \to (6.21) \to 1 = 1 \\
 & & \dots \\
 & & \to (6.30) \to 1 = 1
\end{array}
$$

7. Уравнения (7.1)–(7.6)

Лемма 7.1. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4 = y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1}y_1y_2y_4y_3 \tag{7.1}$$

с условием $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \leqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.1)) = \{x_3 \to y_2,\quad x_4 \to y_1x_3,\quad y_1 \to x_4,\quad y_2 \to x_5,\quad y_3 \to z_2,\quad y_4 \to z_1\}$$

в уравнение (6.6). *Уравнение* (7.1) *с условием* $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \geqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_2((7.1)) = \{x_1 \to x_2,\quad x_2 \to x_1,\quad x_3 \to y_1x_3,\quad x_4 \to y_2,$$
$$y_1 \to x_5,\quad y_2 \to x_4,\quad y_3 \to z_2,\quad y_4 \to z_1\}$$

в уравнение (6.4).

Лемма 7.2. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4 = y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1}y_2y_1y_3y_4 \tag{7.2}$$

с условием $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \leqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.2)) = \{x_3 \to y_2,\quad x_4 \to y_1x_3,\quad y_1 \to z_2,\quad y_2 \to z_1,\quad y_3 \to x_4,\quad y_4 \to x_5\}$$

в уравнение (6.4). *Уравнение* (7.2) *с условием* $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \geqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_2((7.2)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to y_1x_3, \quad x_4 \to y_2, \quad y_1 \to z_2, \quad y_2 \to z_1, \quad y_3 \to x_5, \quad y_4 \to x_4\}$$

в уравнение (6.6).

Лемма 7.3. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4 = y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1}y_1y_3y_2y_4 \tag{7.3}$$

с условием $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \leqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.3)) = \{x_3 \to y_2, \quad x_4 \to y_1x_3, \quad y_1 \to x_4, \quad y_2 \to z_2, \quad y_3 \to z_1, \quad y_4 \to x_5\}$$

в уравнение (6.5). *Уравнение* (7.3) *с условием* $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \geqslant \partial(y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$t_2((7.3)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to y_1x_3, \quad x_4 \to y_2, \quad y_1 \to x_5, \quad y_2 \to z_2, \quad y_3 \to z_1, \quad y_4 \to x_4\}$$

в уравнение (6.5).

Лемма 7.4. *Уравнение*

$$z_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1 = y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_1y_3y_2 \tag{7.4}$$

с условием $\partial(z_1) \geqslant \partial(y_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.4)) = \{y_1 \to y_1y_2, \quad y_2 \to y_2(y_1y_2)^\alpha, \quad z_1 \to z_1y_2(y_1y_2)^\alpha\}$$

в уравнение (7.6). *Уравнение* (7.4) *с условием* $\partial(z_1) \leqslant \partial(y_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((7.4)) = \{y_1 \to y_1y_2, \quad y_2 \to y_3y_2(y_1y_2)^\alpha, \quad y_3 \to y_4, \quad z_1 \to y_2(y_1y_2)^\alpha\}$$

в уравнение (7.1).

Лемма 7.5. *Уравнение*

$$z_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1 = y_2^{-1}y_1^{-1}y_3^{-1}y_1y_2y_3 \tag{7.5}$$

с условием $\partial(z_1) \geqslant \partial(y_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.5)) = \{y_2 \to y_2(y_3y_2)^\alpha, \quad y_3 \to y_3y_2, \quad z_1 \to z_1y_2(y_3y_2)^\alpha\}$$

в уравнение (7.6). *Уравнение* (7.5) *с условием* $\partial(z_1) \leqslant \partial(y_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((7.5)) = \{y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1y_3(y_4y_3)^\alpha, \quad y_3 \to y_4y_3, \quad z_1 \to y_3(y_4y_3)^\alpha\}$$

в уравнение (7.2).

Лемма 7.6. *Уравнение*

$$z_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1 = y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_1y_2y_3 \tag{7.6}$$

с условием $\partial(y_3) \geqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((7.6)) = \{y_1 \to y_1y_3, \quad y_3 \to y_4y_3(y_2y_1y_3)^\alpha, \quad z_1 \to y_3(y_2y_1y_3)^\alpha\}$$

в уравнение (7.3); *преобразованием*

$$t_2((7.6)) = \{y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_1y_3, \quad y_3 \to y_4y_3y_2(y_1y_3y_2)^\alpha, \quad z_1 \to y_3y_2(y_1y_3y_2)^\alpha\}$$

в уравнение (7.2). *Уравнение* (7.6) *с условием* $\partial(y_3) \leqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$t_3((7.6)) = \{y_1 \to y_1y_3, \quad y_3 \to y_3(y_2y_1y_3)^\alpha, \quad z_1 \to z_1y_3(y_2y_1y_3)^\alpha\}$$

в уравнение (7.4); *преобразованием*

$$t_4((7.6)) = \{y_2 \to y_2y_3, \quad y_3 \to y_3y_1(y_2y_3y_1)^\alpha, \quad z_1 \to z_1y_3y_1(y_2y_3y_1)^\alpha\}$$

в уравнение (7.5).

Рассмотрим уравнение (7.6) и последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_3((7.6))$ при $\alpha = \lambda_{2k-1}$ и $t_1((7.4))$ при $\alpha = \lambda_{2k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} y_1 \to y_1y_2y_3, \\ y_2 \to y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2k}}, \\ y_3 \to y_3(y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2k}+1}y_3)^{\lambda_{2k-1}}, \\ z_1 \to z_1y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2k}}y_3(y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2k}+1}y_3)^{\lambda_{2k-1}}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}$, где $i = 1, 2, 3, 4$; y_1, y_2, y_3, z_1 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i = y_i, \qquad i = 1, 2, 3, \\ &{}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_4 = z_1, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}} = {}^{\mathrm{Ja}}(&y_1y_2y_3, y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2s}}, y_3(y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2s}+1}y_3)^{\lambda_{2s-1}}, \\ &z_1y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2s}}y_3(y_2(y_1y_2)^{\lambda_{2s}+1}y_3)^{\lambda_{2s-1}})_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-3},\lambda_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} y_1 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_1^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_2^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ y_3 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_3^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_4^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Ja}}(u_1,u_2,u_3,u_4)_r^{\mu}$, где $r = 1,2,3,4$; u_1,u_2,u_3,u_4 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных четной длины.

Рассмотрим уравнение (7.6) и последовательность преобразований T_k, $k = 1,2,\ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований $t_4((7.6))$ при $\alpha = \lambda_{2k-1}$ и $t_1((7.5))$ при $\alpha = \lambda_{2k}$. Легко видеть, что

$$T_k = \begin{cases} y_2 \to y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2k+1}}, \\ y_3 \to y_3y_2y_1(y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2k}+1}y_1)^{\lambda_{2k-1}}, \\ z_1 \to z_1y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2k}+1}y_1(y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2k}+1}y_1)^{\lambda_{2k-1}}. \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}$, где $i = 1,2,3$; y_2,y_3,z_1 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_i &= y_{i+1}, \qquad i = 1,2, \\ {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_3 &= z_1, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}} = {}^{\mathrm{Jb}}(&y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2s}+1}, y_3y_2y_1(y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2s}+1}y_1)^{\lambda_{2s-1}}, \\ &z_1y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2s}+1}y_1(y_2(y_3y_2)^{\lambda_{2s}+1}y_1)^{\lambda_{2s-1}})_i^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-3},\lambda_{2s-2}}. \end{aligned}$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1,T_2,\ldots$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} y_2 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_1^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ y_3 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_2^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_3^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2s-1},\lambda_{2s}}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Jb}}(u_1,u_2,u_3)_r^{\mu}$, где $r = 1,2,3$; u_1,u_2,u_3 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных четной длины.

Рассмотрим уравнение (7.6) и последовательность преобразований T_k, $k = 1,2,\ldots$, где каждое T_k есть произведение двух преобразований

$$\begin{cases} y_1 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1,y_2,y_3,z_1)_1^{\mu_{2k-1}}, \\ y_2 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1,y_2,y_3,z_1)_2^{\mu_{2k-1}}, \\ y_3 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1,y_2,y_3,z_1)_3^{\mu_{2k-1}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Ja}}(y_1,y_2,y_3,z_1)_4^{\mu_{2k-1}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_1^{\mu_{2k}}, \\ y_3 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_2^{\mu_{2k}}, \\ z_1 \to {}^{\mathrm{Jb}}(y_2,y_3,z_1)_3^{\mu_{2k}}. \end{cases}$$

Пусть

$$T_k = \begin{cases} y_1 \to R_1(y_1,y_2,y_3,z_1,\mu_{2k-1},\mu_{2k}), \\ y_2 \to R_2(y_1,y_2,y_3,z_1,\mu_{2k-1},\mu_{2k}), \\ y_3 \to R_3(y_1,y_2,y_3,z_1,\mu_{2k-1},\mu_{2k}), \\ z_1 \to R_4(y_1,y_2,y_3,z_1,\mu_{2k-1},\mu_{2k}). \end{cases}$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}$, где $i = 1,2,3,4$; y_1, y_2, y_3, z_1 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}$ — последовательность переменных, значениями которых являются последовательности натуральных переменных, полагая

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i = y_i, \qquad i = 1,2,3,\\
&{}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_4 = z_1,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_i^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}} = {}^{\mathrm{Jb}}(&R_1(y_1, y_2, y_3, z_1, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}), \dots,\\
&R_4(y_1, y_2, y_3, z_1, \mu_{2s-1}, \mu_{2s}))_i^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-3},\mu_{2s-4}}.
\end{aligned}
$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \dots$ совпадает с преобразованием

$$
\begin{cases}
y_1 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_1^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}},\\
y_2 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_2^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}},\\
y_3 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_3^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}},\\
z_1 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_4^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2s-1},\mu_{2s}}.
\end{cases}
$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Jc}}(u_1, u_2, u_3, u_4)_r^{\nu}$, где $r = 1,2,3,4$; u_1, u_2, u_3, u_4 — словарные переменные; ν — переменная для последовательностей μ-переменных четной длины.

Обозначим через ${}^{\mathrm{Jc}}$ преобразование

$$
\begin{cases}
y_1 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_1^{\nu},\\
y_2 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_2^{\nu},\\
y_3 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_3^{\nu},\\
z_1 \to {}^{\mathrm{Jc}}(y_1, y_2, y_3, z_1)_4^{\nu}.
\end{cases}
$$

Предложение 7.1. *Уравнение* (7.6) *переводится*

- *преобразованием* ${}^{\mathrm{Jc}}t_3((7.6))t_2((7.4))$ *в уравнение* (7.1),
- *преобразованием* ${}^{\mathrm{Jc}}t_4((7.6))t_2((7.5))$ *в уравнение* (7.2),
- *преобразованием* ${}^{\mathrm{Jc}}t_1((7.6))$ *в уравнение* (7.3),
- *преобразованием* ${}^{\mathrm{Jc}}t_2((7.6))$ *в уравнение* (7.2).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$
\begin{array}{lll}
(7.1) \to (6.6), & (7.1) \to (6.4), & \\
(7.2) \to (6.4), & (7.2) \to (6.6), & \\
(7.3) \to (6.5), & & \\
(7.4) \to (7.1), & (7.4) \to (7.6), & \\
(7.5) \to (7.2), & (7.5) \to (7.6), & \\
(7.6) \to (7.1), & (7.6) \to (7.2), & (7.6) \to (7.3).
\end{array}
$$

8. Уравнения (8.1)–(8.11)

Лемма 8.1. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_4z_1^{-1} &= x_3y_4^{-1}y_1y_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_4^{-1}x_3y_4^{-1}z_1 &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \end{aligned} \tag{8.1}$$

с условием $\partial(y_3) \leqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_6, \quad x_2 \to x_5, \quad x_3 \to z_2^{-1}, \quad y_1 \to x_2, \quad y_2 \to x_1, \quad y_3 \to y_1, \quad y_4 \to z_1, \quad z_1 \to x_3^{-1}y_1\}$$

в уравнение (6.11). *Уравнение* (8.1) *с условием* $\partial(z_1) \leqslant \partial(y_3) \leqslant \partial(y_4^{-1}z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to z_1, \quad x_4 \to x_3, \quad y_1 \to x_5, \quad y_2 \to x_6, \quad y_3 \to x_4y_1^{-1}, \quad y_4 \to x_4^{-1}z_2^{-1}, \quad z_1 \to y_1^{-1}\}$$

в уравнение (6.3). *Уравнение* (8.1) *с условием* $\partial(y_4^{-1}z_1) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to y_2z_1, \quad x_4 \to x_3, \quad y_1 \to x_4, \quad y_2 \to x_5, \quad y_3 \to z_1z_2y_1^{-1}, \quad y_4 \to z_2^{-1}, \quad z_1 \to y_1^{-1}\}$$

в уравнение (6.1).

Лемма 8.2. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_4x_3^{-1}z_1^{-1} &= y_4^{-1}y_1y_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}y_4^{-1}z_1 &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \end{aligned} \tag{8.2}$$

с условием $\partial(z_1) \geqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_5, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to z_2^{-1}, \quad x_4 \to z_1, \quad y_1 \to x_2, \quad y_2 \to x_1, \quad y_3 \to y_1, \quad y_4 \to y_2, \quad z_1 \to x_3^{-1}y_1\}$$

в уравнение (6.9). *Уравнение* (8.2) *с условием* $\partial(z_1) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_5, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to z_2^{-1}, \quad x_4 \to z_1, \quad y_1 \to x_2, \quad y_2 \to x_1, \quad y_3 \to x_3y_1, \quad y_4 \to x_3^{-1}y_2, \quad z_1 \to y_1\}$$

в уравнение (6.1).

Лемма 8.3. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1x_2x_4y_4z_1^{-1} &= x_3y_1y_2, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_4^{-1}x_3z_1y_4^{-1} &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \end{aligned} \tag{8.3}$$

с условием $\partial(y_3) \geqslant \partial(y_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to y_1, \quad x_4 \to y_5, \quad y_1 \to x_1, \\ y_2 \to x_2, \quad y_3 \to y_2^{-1}, \quad y_4 \to y_2 z_1, \quad z_1 \to z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.2). *Уравнение* (8.3) *с условием* $\partial(y_4) \leqslant \partial(y_3) \leqslant \partial(z_1 y_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_6^{-1}, \quad x_2 \to x_5^{-1}, \quad x_3 \to y_1^{-1}, \quad x_4 \to x_4^{-1}, \quad y_1 \to x_2^{-1}, \\ y_2 \to x_1^{-1}, \quad y_3 \to z_1 z_2, \quad y_4 \to z_2^{-1}, \quad z_1 \to x_3 y_1\}$$

в уравнение (6.11). *Уравнение* (8.3) *с условием* $\partial(z_1 y_4^{-1}) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_1^{-1}, \quad x_2 \to x_2^{-1}, \quad x_3 \to y_1 x_4^{-1}, \quad x_4 \to x_3^{-1}, \quad y_1 \to x_5^{-1}, \\ y_2 \to x_6^{-1}, \quad y_3 \to x_4^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1}, \quad y_4 \to z_1, \quad z_1 \to z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.3).

Лемма 8.4. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_4 z_1^{-1} &= y_4^{-1} x_3 y_1 y_2, \\ x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 z_1 x_4^{-1} &= y_4 y_3^{-1} y_1^{-1} y_2^{-1} y_3 \end{aligned} \tag{8.4}$$

с условием $\partial(y_3) \leqslant \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\begin{cases} x_1 \to x_4, \\ x_2 \to x_5, \\ x_3 \to y_1, \\ x_4 \to y_2 z_1, \\ y_1 \to x_2, \\ y_2 \to x_3, \\ y_3 \to y_2^{-1}, \\ y_4 \to x_1^{-1}, \\ z_1 \to z_2^{-1} \end{cases}$$

в уравнение (6.10). *Уравнение* (8.4) *с условием* $\partial(y_4) \leqslant \partial(y_3) \leqslant \partial(z_1 x_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_1^{-1}, \quad x_2 \to x_2^{-1}, \quad x_3 \to y_1, \quad x_4 \to z_1, \quad y_1 \to x_5^{-1}, \\ y_2 \to x_6^{-1}, \quad y_3 \to z_2^{-1} z_1^{-1}, \quad y_4 \to x_4, \quad z_1 \to x_3 z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.12). *Уравнение* (8.4) *с условием* $\partial(z_1 x_4^{-1}) \leqslant \partial(y_3) \leqslant \partial(x_3 z_1 x_4^{-1})$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_1^{-1}, \quad x_2 \to x_2^{-1}, \quad x_3 \to y_1 x_4^{-1}, \quad x_4 \to z_1, \quad y_1 \to x_5^{-1}, \\ y_2 \to x_6^{-1}, \quad y_3 \to x_4^{-1} z_2^{-1} z_1^{-1}, \quad y_4 \to x_3, \quad z_1 \to z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.11).

Лемма 8.5. *Уравнение*

$$x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1^{-1} = x_3y_4^{-1}y_1y_2,\qquad x_1^{-1}x_2^{-1}x_3y_4^{-1}z_1 = y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \tag{8.5}$$

с условием $\partial(x_3) \geqslant \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_4^{-1}x_3\}$$

в уравнение (8.1). *Уравнение* (8.5) *с условием* $\partial(x_3) \leqslant \partial(x_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to x_4x_3^{-1},\quad y_4 \to y_4x_4\}$$

в уравнение (8.2).

Лемма 8.6. *Уравнение*

$$x_1x_2x_4 = z_1x_3y_4^{-1}y_1y_2,\qquad x_1^{-1}x_2^{-1}x_3y_4^{-1} = z_1^{-1}x_4y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \tag{8.6}$$

с условием $\partial(y_4) \geqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to z_1,\quad x_4 \to y_1,\quad y_1 \to x_5,\quad y_2 \to x_6,\quad y_3 \to y_4,\quad y_4 \to x_2^{-1}z_2^{-1},\quad z_1 \to x_3\}$$

в уравнение (6.11). *Уравнение* (8.6) *с условием* $\partial(y_4) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to y_2z_1,\quad x_4 \to y_1,\quad y_1 \to x_4,\quad y_2 \to x_5,\quad y_3 \to z_1z_2,\quad y_4 \to z_2^{-1},\quad z_1 \to x_3\}$$

в уравнение (6.9).

Лемма 8.7. *Уравнение*

$$x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1^{-1} = y_4^{-1}x_3y_1y_2,\qquad x_1^{-1}x_2^{-1}x_3z_1y_4^{-1} = y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \tag{8.7}$$

с условием $\partial(x_4) \geqslant \partial(y_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to x_4y_4,\quad x_3 \to x_4^{-1}x_3\}$$

в уравнение (8.3). *Уравнение* (8.7) *с условием* $\partial(x_4) \leqslant \partial(y_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_4 \to y_4x_4,\quad y_3 \to y_3y_4^{-1}\}$$

в уравнение (8.4).

Лемма 8.8. *Уравнение*

$$x_1x_2x_4 = z_1y_4^{-1}x_3y_1y_2,\qquad x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1} = y_4z_1^{-1}y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \tag{8.8}$$

с условием $\partial(x_4) \geqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_3,\quad x_3 \to y_1^{-1},\quad x_4 \to y_2^{-1}x_1,\quad y_1 \to x_5,\quad y_2 \to x_4,\quad y_3 \to y_2,\quad y_4 \to z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.10). *Уравнение* (8.8) *с условием* $\partial(x_4) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to y_1^{-1}x_5, \quad x_4 \to y_2^{-1}, \\ y_1 \to x_4, \quad y_2 \to x_3, \quad y_3 \to x_5y_2, \quad y_4 \to z_2^{-1}\}$$

в уравнение (6.2).

Лемма 8.9. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1^{-1}x_2^{-1}x_3y_4^{-1}z_1 &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3, \\ x_4^{-1}x_1x_2x_4 &= z_1x_3y_4^{-1}y_1y_2 \end{aligned} \tag{8.9}$$

с условием $\partial(x_4) \geqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to x_4z_1^{-1}\}$$

в уравнение (8.5). *Уравнение* (8.9) *с условием* $\partial(x_4) \leqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{z_1 \to x_4^{-1}z_1, \quad y_3 \to y_3x_4^{-1}z_1\}$$

в уравнение (8.6).

Лемма 8.10. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1^{-1}x_2^{-1}x_3z_1y_4^{-1} &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3, \\ x_4^{-1}x_1x_2x_4 &= z_1y_4^{-1}x_3y_1y_2 \end{aligned} \tag{8.10}$$

с условием $\partial(x_4) \geqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_4 \to x_4z_1^{-1}\}$$

в уравнение (8.7). *Уравнение* (8.10) *с условием* $\partial(x_4) \leqslant \partial(z_1)$ *переводится преобразованием*

$$\{z_1 \to x_4^{-1}z_1, \quad y_3 \to y_3z_1y_4^{-1}\}$$

в уравнение (8.8).

Лемма 8.11. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_1^{-1}x_2^{-1}x_3y_4^{-1}z_1 &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3x_3, \\ x_4^{-1}x_1x_2x_4 &= z_1y_4^{-1}y_1y_2 \end{aligned} \tag{8.11}$$

переводится преобразованием

$$\{x_3 \to (x_3y_4^{-1}z_1)^\alpha x_3, \quad z_1 \to z_1x_3\}$$

в уравнение (8.9); *преобразованием*

$$\{x_3 \to (x_3z_1y_4^{-1})^\alpha x_3z_1, \quad y_4 \to x_3^{-1}y_4\}$$

в уравнение (8.10).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$
\begin{array}{lll}
(8.1) \to (6.11), & (8.1) \to (6.3), & (8.1) \to (6.1),\\
(8.2) \to (6.9), & (8.2) \to (6.1), & \\
(8.3) \to (6.2), & (8.3) \to (6.11), & (8.3) \to (6.3),\\
(8.4) \to (6.10), & (8.4) \to (6.12), & (8.4) \to (6.11),\\
(8.5) \to (8.1), & (8.5) \to (8.2), & \\
(8.6) \to (6.11), & (8.6) \to (6.9), & \\
(8.7) \to (8.3), & (8.7) \to (8.4), & \\
(8.8) \to (6.10), & (8.8) \to (6.2), & \\
(8.9) \to (8.5), & (8.9) \to (8.6), & \\
(8.10) \to (8,7), & (8.10) \to (8.8), & \\
(8.11) \to (8.9), & (8.11) \to (8.11). &
\end{array}
$$

9. Уравнения (9.1)–(9.8)

Лемма 9.1. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_3^{-1}x_3^{-1}x_1x_2x_3 &= z_1y_4y_3^{-1}y_1y_2,\\
x_4^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_4y_4z_1 &= y_1^{-1}y_2^{-1}
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

переводится преобразованием

$$
\{x_3 \to y_1z_1z_2x_3,\quad x_4 \to y_2,\quad y_1 \to x_4,\quad y_2 \to x_5,\quad y_3 \to (z_1z_2x_3)^\alpha z_1,\quad y_4 \to z_2^{-1},\quad z_1 \to z_1^{-1}x_3^{-1}\}
$$

в уравнение (6.8)*; преобразованием*

$$
\{x_3 \to y_1x_3z_1z_2,\quad x_4 \to y_2,\quad y_1 \to x_4,\quad y_2 \to x_5,\quad y_3 \to (x_3z_1z_2)^\alpha x_3z_1,\quad y_4 \to x_3^{-1}z_2^{-1},\quad z_1 \to z_1^{-1}\}
$$

в уравнение (6.7).

Лемма 9.2. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_4^{-1}x_4^{-1}x_1x_2x_4 &= z_1y_4^{-1}y_1y_2,\\
x_1^{-1}x_2^{-1}x_3z_1 &= y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3x_3
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

переводится преобразованием

$$
\{y_4 \to (y_1z_1^{-1})^\alpha y_4,\quad z_1 \to y_4^{-1}z_1\}
$$

в уравнение (8.11).

Лемма 9.3. *Уравнение*

$$
\begin{aligned}
y_3^{-1}x_3^{-1}x_1x_2x_3 &= z_1y_3^{-1}y_1y_2,\\
x_4^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_4y_4z_1 &= y_1^{-1}y_2^{-1}y_4
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

переводится преобразованием

$$\{y_4 \to y_4(z_1y_4)^\alpha, \quad z_1 \to z_1y_4\}$$

в уравнение (9.1).

Лемма 9.4. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_3^{-1}x_1x_2x_3 &= z_1y_3^{-1}y_1y_2y_3, \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_4z_1 &= y_4^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_4x_4 \end{aligned} \tag{9.4}$$

с условием $\partial(x_3) \leqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_2, \quad x_2 \to y_1, \quad x_3 \to y_4, \quad x_4 \to y_3, \quad y_1 \to x_2,$$
$$y_2 \to x_1, \quad y_3 \to x_4y_4, \quad y_4 \to x_3, \quad z_1 \to z_1^{-1}\}$$

в уравнение (9.3). *Уравнение* (9.4) *с условием* $\partial(x_3) \geqslant \partial(y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_4y_4, \quad x_4 \to x_3, \quad y_3 \to y_4, \quad y_4 \to y_3\}$$

в уравнение (9.2).

Лемма 9.5. *Уравнение*

$$\begin{aligned} x_3^{-1}x_1x_2x_3 &= z_1y_3^{-1}y_1y_2y_3, \\ x_4^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_4z_1 &= y_4^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_4 \end{aligned} \tag{9.5}$$

с условием $\partial(x_4) \geqslant \partial(y_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_3y_3, \quad x_4 \to x_4y_4\}$$

в уравнение (9.3). *Уравнение* (9.5) *с условием* $\partial(x_4) \leqslant \partial(y_4)$ *переводится преобразованием*

$$\{y_4 \to y_4x_4\}$$

в уравнение (9.4).

Лемма 9.6. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4 = y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3y_4^{-1}y_1y_2y_4 \tag{9.6}$$

с условием $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \leqslant \partial(y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_3, \quad y_3 \to y_4, \quad y_4 \to y_3\}$$

в уравнение (9.5). *Уравнение* (9.6) *с условием* $\partial(x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3) \geqslant \partial(y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3)$ *переводится преобразованием*

$$\{x_1 \to y_1, \quad x_2 \to y_2, \quad x_3 \to y_4, \quad x_4 \to y_3, \quad y_1 \to x_1,$$
$$y_2 \to x_2, \quad y_3 \to x_4, \quad y_4 \to x_3\}$$

в уравнение (9.5).

Лемма 9.7. *Уравнение*

$$z_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4z_1 = y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3y_4^{-1}y_1y_2y_4 \tag{9.7}$$

с условием $\partial(z_1) = 0$ *переводится преобразованием*

$$\{z_1 \to 1\}$$

в уравнение (9.6). *Уравнение* (9.7) *с условием* $\partial(y_3) = 0$ *переводится преобразованием*

$$\{y_3 \to 1, \quad y_4 \to y_3\}$$

в уравнение (7.6). *Уравнение* (9.7) *с условием* $\partial(y_4) = 0$ *переводится преобразованием*

$$\{y_1 \to y_2, \quad y_2 \to y_3, \quad y_3 \to y_1, \quad y_4 \to 1\}$$

в уравнение (7.6).

Лемма 9.8. *Уравнение*

$$w_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4w_1 = w_2^{-1}y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3y_4^{-1}y_1y_2y_4w_2 \tag{9.8}$$

с условием $\partial(w_1) \geqslant \partial(w_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_1((9.8)) = \{w_1 \to z_1w_2\}$$

в уравнение (9.7). *Уравнение* (9.8) *с условием* $\partial(w_1) \leqslant \partial(w_2)$ *переводится преобразованием*

$$t_2((9.8)) = \{x_i \to y_i, \quad y_i \to x_i, \quad w_2 \to z_1w_1\}$$

где $i = 1, 2, 3, 4$, *в уравнение* (9.7).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$\begin{array}{lll}
(9.1) \to (6.8), & (9.1) \to (6.7), & \\
(9.2) \to (8.11), & & \\
(9.3) \to (9.1), & & \\
(9.4) \to (9.3), & (9.4) \to (9.2), & \\
(9.5) \to (9.3), & (9.5) \to (9.4), & \\
(9.6) \to (9.5), & (9.6) \to (9.5), & \\
(9.7) \to (9.6), & (9.7) \to (7.6), & (9.7) \to (7.6), \\
(9.8) \to (9,2), & (9,8) \to (9.7). &
\end{array}$$

10. Уравнения (10.1)–(10.7)

Лемма 10.1. *Уравнение*

$$w_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4w_1 = z_1 \tag{10.1}$$

переводится преобразованием

$$\{z_1 \to w_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_1x_2x_4w_1\}$$

в тривиальное уравнение.

Лемма 10.2. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_2^{-1}x_4^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_1 \mid x_3 = z_1 \tag{10.2}$$

переводится преобразованием

$$t_1((10.2)) = \{x_1 \to x_4x_3^{-1}, \quad x_2 \to x_1,$$
$$x_3 \to x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_2\}$$

в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$t_2((10.2)) = \{x_1 \to x_1^{-1}, \quad x_2 \to x_2,$$
$$x_3 \to x_1x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_4x_3^{-1}\}$$

в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$t_3((10.2)) = \{x_1 \to x_2^{-1}, \quad x_2 \to x_4x_3^{-1},$$
$$x_3 \to x_2x_1x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_1^{-1}\}$$

в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$t_4((10.2)) = \{x_1 \to x_3x_4^{-1}, \quad x_2 \to x_1^{-1},$$
$$x_3 \to x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_2^{-1}\}$$

в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$t_5((10.2)) = \{x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_2^{-1},$$
$$x_3 \to x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_3x_4^{-1}\}$$

в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$t_6((10.2)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3x_4^{-1},$$
$$x_3 \to x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3(x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_4x_3^{-1}x_2x_1x_3)^\alpha w_1, \quad x_4 \to x_1\}$$

в уравнение (10.1).

Рассмотрим последовательность преобразований T_k, $k = 1, 2, \ldots$, где каждое T_k есть произведение преобразований

$$\{x_1 \to x_3^{-1}x_1\},$$
$$\{x_2 \to x_1^{\lambda_k}x_2\},$$
$$\{x_1 \to x_2x_1\}.$$

Легко видеть, что

$$T_k = \{x_1 \to x_3^{-1}x_2x_1, \quad x_2 \to (x_2x_1)^{\lambda_k}x_2\}.$$

Определим рекурсивную функцию ${}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$, где $i = 1, 2, 3$; x_1, x_2, x_3 — словарные переменные; $s \geqslant 0$; $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — последовательность натуральных переменных, полагая

$$
\begin{gathered}
{}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_i = x_i, \\
{}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = {}^{\mathrm{Ma}}(x_3^{-1} x_2 x_1, (x_2 x_1)^{\lambda_s} x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}}.
\end{gathered}
$$

Для каждого натурального s произведение первых s преобразований из последовательности преобразований $T_1, T_2, \dots$ совпадает с преобразованием

$$
\{x_r \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_r^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}\}, \qquad r = 1, 2, 3.
$$

Введем в рассмотрение параметризующую функцию ${}^{\mathrm{Ma}}(u_1, u_2, u_3)_r^{\mu}$, где $r = 1, 2, 3$; u_1, u_2, u_3 — словарные переменные; μ — переменная для последовательностей натуральных переменных.

Лемма 10.3. *Уравнение*

$$
x_4^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 \mid x_1 x_2 x_4 = z_1 \tag{10.3}
$$

переводится преобразованием

$$
\begin{aligned}
t_1((10.3)) &= \{x_1 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu}, \quad x_2 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu}, \quad x_3 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu}\}, \\
t_2((10.3)) &= \{x_1 \to x_3^{-1} x_2, \quad x_2 \to x_4, \quad x_3 \to x_1 x_3, \quad x_4 \to w_1\},
\end{aligned}
$$

где μ — переменная для последовательностей натуральных переменных, в уравнение (10.1)*; преобразованием*

$$
\begin{aligned}
t_1((10.3)) &= \{x_1 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu}, \quad x_2 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu}, \quad x_3 \to {}^{\mathrm{Ma}}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu}\}, \\
t_3((10.3)) &= \{x_1 \to x_2^{-1}, \quad x_2 \to (x_4^{-1} x_1^{-1})^{\alpha} x_4^{-1}, \quad x_3 \to x_1 x_4 x_2, \quad x_4 \to x_3\},
\end{aligned}
$$

где α — натуральная переменная, μ — переменная для последовательностей натуральных переменных, в уравнение (10.2).

Лемма 10.4. *Уравнение*

$$
x_3^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 \mid x_4^{-1} x_1 x_2 x_4 = z_1 \tag{10.4}
$$

переводится преобразованием

$$
t_1((10.4)) = \{x_3 \to x_3 x_4\}
$$

в уравнение (10.3)*; преобразованием*

$$
t_2((10.4)) = \{x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_3 x_4, \quad z_1 \to z_1^{-1}\}
$$

в уравнение (10.3)*; преобразованием*

$$
t_3((10.4)) = \{x_3 \to x_3 w_1, \quad x_4 \to x_4 w_1\}
$$

в уравнение (10.1).

Обозначим через $M_1, \dots, M_{12}$ преобразования

$$t_i((10.4))t_1((10.3))t_3((10.3))t_j((10.2)), \quad i = 1,2, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Обозначим через M_{13}, M_{14} преобразования

$$t_i((10.4))t_1((10.3))t_2((10.3)), \qquad i = 1,2.$$

Обозначим через M_{15} преобразование $t_3((10.4))$.

Пусть при $s = 1, \dots, 15$

$$M_s = \begin{cases} x_1 \to P_s(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_2 \to Q_s(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_3 \to R_s(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_4 \to S_s(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1). \end{cases}$$

Лемма 10.5. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3 \mid x_4^{-1}x_1x_2x_4 \mid y_3^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}y_3 \mid y_4^{-1}y_1y_2y_4 = 1 \tag{10.5}$$

переводится преобразованием $t_{1,1}((10.5))$ *в уравнение* (9.8), ..., *преобразованием* $t_{15,15}((10.5))$ *в уравнение* (9.8), *где*

$$t_{r,s}((10.5)) = \begin{cases} x_1 \to P_r(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_2 \to Q_r(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_3 \to R_r(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ x_4 \to S_r(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1), \\ y_1 \to P_s(y_1, y_2, y_3, y_4, w_2), \\ y_2 \to Q_s(y_1, y_2, y_3, y_4, w_2), \\ y_3 \to R_s(y_1, y_2, y_3, y_4, w_2), \\ y_4 \to S_s(y_1, y_2, y_3, y_4, w_2) \end{cases}$$

при $r, s = 1, \dots, 15$.

Лемма 10.6. *Уравнение*

$$x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3 \mid x_4^{-1}x_1x_2x_4 \mid z^{-1} \mid v^{-1} \mid z \mid v = 1 \tag{10.6}$$

переводится преобразованием

$$t_1((10.6)) = \{z \to y_4^{-1}y_1y_3, \quad v \to y_3^{-1}y_2y_4\}$$

в уравнение (10.5); *преобразованием*

$$t_2((10.6)) = \{z \to y_4^{-1}(y_1y_2)^{\alpha+1}y_1y_3, \quad v \to y_3^{-1}y_1^{-1}(y_2^{-1}y_1^{-1})^{\alpha}y_4\}$$

в уравнение (10.5); *преобразованием*

$$t_3((10.6)) = \{z \to y_4^{-1}(y_2^{-1}y_1^{-1})^{\alpha}y_2^{-1}y_3, \quad v \to y_3^{-1}y_2(y_1y_2)^{\alpha+1}y_4\}$$

в уравнение (10.5).

Лемма 10.7. *Уравнение*

$$x^{-1} \mid y^{-1} \mid x \mid y \mid z^{-1} \mid v^{-1} \mid z \mid v = 1 \tag{10.7}$$

переводится преобразованием

$$t_1((10.7)) = \{x \to x_4^{-1}x_1x_3, \quad y \to x_3^{-1}x_2x_4\}$$

в уравнение (10.6)*; преобразованием*

$$t_2((10.7)) = \{x \to x_4^{-1}(x_1x_2)^{\alpha+1}x_1x_3, \quad y \to x_3^{-1}x_1^{-1}(x_2^{-1}x_1^{-1})^{\alpha}x_4\}$$

в уравнение (10.6)*; преобразованием*

$$t_3((10.7)) = \{x \to x_4^{-1}(x_2^{-1}x_1^{-1})^{\alpha}x_2^{-1}x_3, \quad y \to x_3^{-1}x_2(x_1x_2)^{\alpha+1}x_4\}$$

в уравнение (10.6).

Дерево параметрических преобразований имеет вид

$$(10.7) \to (10.6),$$
$$(10.6) \to (10.5),$$
$$(10.5) \to (9.8).$$

Список литературы

1. Seifert H., Threlfall W., *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, Leipzig, 1934.
2. Stallings J. R., On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups. *Fund. Math.* (1962) **51**, 191–194.
3. Jaco W., Heergaard splitting homomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1969) **144**, 365–379.

Статья поступила 08.07.1999.