Е. Б. Яровая, Монотонность вероятности возвращения в источник в моделях ветвящегося случайного блуждания, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, номер 2, 44–47

Пусть $P \lhd R$. По теореме об l-изоморфизме имеем $I/(P \cap I) \cong (P + I)/P$. Так как $R/P \in \mathcal{K}$ и $(P+I)/P \lhd R/P$, то по свойству (A) определения специального класса $(P + I)/P \in \mathcal{K}$, т.е. $I/(P \cap I) \in \mathcal{K}$. Поэтому $P \cap I$ входит в пересечение (1).

Следовательно, $\rho(I) \subseteq \rho(R) \cap I$, т.е. $\rho(I) = \rho(R) \cap I$.

Пересечение l-идеалов является l-идеалом. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Мир, 1984.
2. *Фукс Л.* Упорядоченные алгебраические системы. М.: Наука, 1965.
3. *Шаталова М.А.* l_A- и l_I-кольца // Сиб. матем. журн. 1966. **7**, № 6. 1383–1389.
4. *Шавгулидзе Н.Е.* Радикалы l-колец и односторонние l-идеалы // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, вып. 8. 233–245.
5. *Шаталова М.А.* К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах // Матем. заметки. 1968. **4**, № 6. 639–648.
6. *Anderson T., Divinsky N., Sulinski A.* Hereditary radicals in associative and alternative rings // Can. J. Math. 1965. **17**. 594–603.
7. *Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М.* Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
29.04.2009

УДК 519.21

МОНОТОННОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ВОЗВРАЩЕНИЯ В ИСТОЧНИК В МОДЕЛЯХ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Е. Б. Яровая[1]

Рассматриваются две модели ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке с размножением и гибелью частиц в одном из ее узлов — источнике ветвления. В первой модели случайное блуждание предполагается симметричным, а во второй это свойство нарушается из-за введения параметра, позволяющего усилить степень преобладания свойства ветвления или блуждания в источнике. Доказана монотонность вероятности возвращения в источник для второй модели, являющаяся ключевым свойством при анализе ветвящихся случайных блужданий.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, вероятность возвращения в источник, монотонность.

The paper deals with two models of a branching random walk on a multidimensional lattice with birth and death of particles at a single site, the source of branching. In the first model the underlying random walk is assumed to be symmetric. In the second one an additional parameter is introduced to intensify artificially prevalence of branching or walk at the source. As the result, it violates the symmetry of the random walk. The monotonicity of the return probability into the source is proved for the second model which is a key property in the analysis of branching random walks.

Key words: branching random walks, return probability, monotonicity.

1. Постановка задачи. Модель симметричного ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по решетке $\mathbb{Z}^d$ и одним источником ветвления, расположенным в начале координат, была исследована в работах [1–4]. В дальнейшем эту модель будем называть моделью I.

Случайное блуждание частиц определяется бесконечномерной матрицей переходных интенсивностей $A = \|a(x,y)\|_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ и предполагается симметричным: $a(x,y) = a(y,x)$, однородным: $a(x,y) = a(0, y-x) =$

[1] *Яровая Елена Борисовна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yarovaya@mech.math.msu.su.

$a(y-x)$, неприводимым (т.е. любая точка $y \in \mathbb{Z}^d$ достижима), регулярным: $\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x) = 0$ с $a(x) \geqslant 0$, $x \neq 0$, $a(0) < 0$, с конечной дисперсией скачков: $\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} x^2 a(x) < \infty$. В силу свойств симметричности и однородности случайного блуждания для матрицы A выполнены условия $\sum_{y\in\mathbb{Z}} |a(x,y)| = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |a(x,y)| = -2a(0)$. В этих условиях, как показано в [3], матрица A определяет линейный ограниченный оператор $A : l^2(\mathbb{Z}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$, причем $\|A\|_{l^q(\mathbb{Z}^d)} \leqslant -2a(0)$. Если через δ_0, как обычно, обозначить вектор-столбец в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, отвечающий функции $\delta_0(\cdot)$ на $\mathbb{Z}^d$, которая принимает единичное значение в начале координат и обращается в нуль в остальных точках, то бесконечномерную матрицу с единственным единичным элементом, соответствующим точке $x = 0$ на решетке $\mathbb{Z}^d$, можно представить как $\varDelta_0 = \delta_0\delta_0^T$. Тогда асимптотическое поведение числа частиц в произвольном узле $\mathbb{Z}^d$ в этой модели будет определяться структурой спектра линейного самосопряженного оператора $H = A + \beta\varDelta_0$, где параметр β характеризует интенсивность источника.

Через $p(t,x,y)$ обозначается переходная вероятность случайного блуждания, т.е. вероятность того, что в момент $t \geqslant 0$ частица находится в точке y при условии, что при $t = 0$ она находилась в точке x. При этом вероятность возвращения в источник $p(t,0) := p(t,0,0)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова [3]. Как показано в [5], одним из ключевых факторов при доказательстве предельных теорем в модели I является монотонность вероятности $p(t,0)$. Это свойство доказано в работах [5, 6] методом преобразований Фурье уравнений, описывающих динамику $p(t,0)$. Доказательство монотонности $p(t,0) = \langle p(t), \delta_0\rangle$ также нетрудно получить, если трактовать уравнение

$$\frac{dp}{dt} = Ap, \quad p(0) = \delta_0, \tag{1}$$

как задачу Коши в банаховом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ [3]. Из (1) и неравенства $\langle Ax, x\rangle \leqslant 0$, $x \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, в [3, лемма 3.3.5] с использованием спектрального разложения для A получено, что $\langle p'(t), \delta_0\rangle = \langle Ae^{At}\delta_0, \delta_0\rangle \leqslant 0$, и, значит, функция $p(t,0) = \langle p(t), \delta_0\rangle$ монотонно не возрастает. Доказательство леммы 3.3.5 в [3] опирается на стандартное в спектральной теории самосопряженных операторов представление оператора-функции e^{At} в виде операторного интеграла Стилтьеса по спектральному разложению оператора A [7, 8].

Модель II была впервые исследована, по-видимому, в [6] для критического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}$. Отличительная особенность данной модели — введение параметра $0 < \alpha < 1$, управляющего эволюцией процесса в источнике ветвления и вызывающего нарушение симметричности матрицы переходных интенсивностей — генератора случайного блуждания A_2, имеющего в этом случае вид $A_2 = A - \varDelta_0 A + \frac{(\alpha-1)}{a(0)}\varDelta_0 A$.

В [9] показано, что для решеток произвольных размерностей модели I и II могут быть описаны в сопоставимых терминах, а асимптотическое поведение числа частиц в источнике в модели II определяется структурой спектра линейного оператора $H_2 = A_2 + \check{\beta}\varDelta_0$, действующего в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, где число $\check{\beta}$ характеризует интенсивность источника в модели II. Там же показано, что вероятность возвращения в источник $\check{p}(t,0)$ в модели II выражается через решение задачи Коши

$$\frac{d\check{p}}{dt} = A_2\check{p}, \quad \check{p}(0) = \delta_0, \tag{2}$$

в банаховом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом: $\check{p}(t,0) = \langle \check{p}(t), \delta_0\rangle$.

В модели II, так же как и в модели I, весьма существенным свойством для дальнейших исследований является монотонность вероятности $\check{p}(t,0)$. Однако оператор A_2 уже не является самосопряженным, а для его матрицы не выполняется свойство однородности (в отличие от матрицы оператора A), что затрудняет исследование модели II. Тем не менее и в модели II для решения задачи Коши (2) справедливо свойство монотонности, а именно справедлива

Теорема. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $a(0) < 0$. Если A — ограниченный самосопряженный оператор в $l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $A_2 = A - \Delta_0 A + \frac{(\alpha-1)}{a(0)}\Delta_0 A$, то функция $\check{p}(t,0) = \langle \check{p}(t), \delta_0\rangle$, где $\check{p}(t)$ — решение задачи Коши (2), неотрицательна и монотонно не возрастает на полуинтервале $[0,\infty)$. Более того, для старших производных функции $\langle \check{p}(t), \delta_0\rangle$ выполняются неравенства $(-1)^{(n)}\langle \check{p}^{(n)}(t), \delta_0\rangle \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$.*

2. Доказательство теоремы. Нам понадобится вспомогательное утверждение, являющееся очевидным обобщением леммы 3.3.5 из [3].

Лемма. *Пусть B — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве E со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если при этом $\langle Bx, x\rangle \leqslant 0$ при всех $x \in E$,* *то при каждом целом* $n \geqslant 0$

$$(-1)^n \langle B^n e^{Bt} x, x\rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in E,\ t \geqslant 0. \tag{3}$$

Если дополнительно $\langle Bx, x\rangle < 0$ *при* $x \neq 0$, *то неравенства в* (3) *строгие при* $x \neq 0$.

Введем обозначение

$$\varkappa = \frac{\alpha - 1}{a(0)} - 1. \tag{4}$$

Вначале покажем, что оператор A_2 представим в виде произведения двух самосопряженных операторов. Оператор A_2 имеет вид

$$A_2 = A + \varkappa\delta_0\delta_0^T A = DA, \quad \text{где} \quad D = I + \varkappa\delta_0\delta_0^T = I + \left(\frac{\alpha-1}{a(0)} - 1\right)\delta_0\delta_0^T.$$

Здесь оператор A — самосопряженный оператор по условию теоремы. А поскольку для произвольных $x, y \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ справедливы равенства

$$\langle Dx, y\rangle = \langle x, y\rangle + \varkappa\langle\delta_0\delta_0^T x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \varkappa\langle\delta_0, x\rangle\langle\delta_0, y\rangle = \langle x, Dy\rangle,$$

то $D = D^T$, и оператор D также самосопряженный. Более того, поскольку

$$\langle Dx, x\rangle = \langle x, x\rangle + \varkappa\langle\delta_0, x\rangle\langle\delta_0, x\rangle = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} x_i^2 + \varkappa x_0^2 \geqslant 0$$

при $1 + \varkappa > 0$, то оператор D является положительно-определенным: $\langle Dx, x\rangle \geqslant 0$. Аналогично легко показать, что при $1 + \varkappa > 0$ оператор D обратим, т.е. для него существует ограниченный обратный D^{-1}.

Возвращаясь к обозначению (4), получаем, что в условиях теоремы $0 < \alpha < 1$ и $a(0) < 0$, и потому $\varkappa > -1$. Таким образом, оператор D обратим, симметричен и положительно определен. Значит [7, 8], для него определен (симметрический, обратимый и положительно-определенный) квадратный корень $D^{1/2}$. Впрочем, учитывая простой вид оператора D, существование $D^{1/2}$ можно доказать непосредственно.

Вернемся к задаче Коши (2) и сделаем замену переменных $\check{p} = D^{1/2}y$, после которой уравнение (2) примет вид

$$\frac{dD^{1/2}y}{dt} = A_2 D^{1/2} y, \quad D^{1/2}y(0) = \delta_0.$$

В силу обратимости оператора D и операторного равенства $A_2 = DA$ получаем

$$\frac{dy}{dt} = D^{1/2}AD^{1/2}y, \quad y(0) = D^{-1/2}\delta_0. \tag{5}$$

Оператор $B = D^{1/2}AD^{1/2}$ самосопряженный и отрицательно-определенный ($\langle Bx, x\rangle = \langle D^{1/2}AD^{1/2}x, x\rangle = \langle AD^{1/2}x, D^{1/2}x\rangle \leqslant 0$). При этом $y'(t) = Be^{Bt}y(0)$. Поэтому по лемме для решения задачи Коши (5) справедливо соотношение

$$\langle y'(t), y(0)\rangle = \langle y'(t), D^{-1/2}\delta_0\rangle \leqslant 0.$$

Следовательно, функция $\langle y(t), D^{-1/2}\delta_0\rangle = \langle D^{-1/2}\check{p}(t), D^{-1/2}\delta_0\rangle = \langle \check{p}(t), D^{-1}\delta_0\rangle$ не возрастает.

Найдем явный вид оператора D^{-1}. Представим оператор D^{-1} как $D^{-1} = I + \varrho\delta_0\delta_0^T$, где ϱ — некоторая постоянная, определяемая из условия $D^{-1}D = I$, которое может быть теперь переписано в виде

$$(I + \varrho\delta_0\delta_0^T)(I + \varkappa\delta_0\delta_0^T) = I.$$

Из этого равенства в силу соотношения $\delta_0^T\delta_0 = \langle\delta_0, \delta_0\rangle = 1$ получаем

$$I + (\varrho + \varkappa)\delta_0\delta_0^T + \varrho\varkappa\delta_0\delta_0^T = I.$$

Таким образом, ϱ является корнем уравнения $\varrho + \varkappa + \varrho\varkappa = 0$, т.е. $\varrho = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa}$. При этом $D^{-1} = I - \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\delta_0\delta_0^T$ и $D^{-1}\delta_0 = \delta_0 - \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\delta_0\delta_0^T\delta_0 = \frac{1}{1+\varkappa}\delta_0$. Отсюда следует равенство

$$\langle\check{p}', \delta_0\rangle = \frac{1}{1+\varkappa}\langle\check{p}', D^{-1}\delta_0\rangle,$$

из которого получаем, что функция $\langle \check{p}(t), \delta_0 \rangle = \check{p}(t, 0)$, где $\check{p}(t)$ — решение задачи Коши (2), монотонно не возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$.

Аналогично проводится доказательство неотрицательности функции $\langle \check{p}(t, 0), \delta_0 \rangle$ и неравенства $(-1)^{(n)} \langle \check{p}^{(n)}(t), \delta_0 \rangle \geqslant 0$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00266а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев Л.В., Яровая Е.Б.* Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником // Докл. РАН. 1998. **363**, № 4. 439–442.
2. *Яровая Е.Б.* Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве // Теор. и матем. физ. 1991. **88**, № 1. 25–30.
3. *Яровая Е.Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
4. *Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. A. 1998. **326**. 975–980.
5. *Яровая Е.Б.* Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей // Дискретная математика. 2009. **21**, № 1. 117–138.
6. *Topchii V., Vatutin V., Yarovaya E.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers // Teor. jmovirn. ta matem. statist. 2003. **69**. 158–172.
7. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
9. *Яровая Е.Б.* Об исследовании ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам // Современные проблемы математики и механики. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. А.Н. Ширяева. М.: Изд-во МГУ, 2009. 119–136.

Поступила в редакцию
27.05.2009

УДК 512.62

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Зайцева[1]

Получена оценка числа решений мультиоднородных систем уравнений с использованием свойств функции Гильберта мультиоднородных идеалов.

Ключевые слова: число решений, мультиоднородные уравнения, функция Гильберта, произведение проективных пространств, нульмерные идеалы.

An estimnate for the number of solutions to multi-homogenious systems of equations is obtained using properties of the Hilbert function of multi-homogeneous ideals.

Key words: number of solutions, multiprojective equations, Hilbert function, multi-projective space, zero-dimensional ideals.

Рассмотрим кольцо многочленов $R = K[x_{1,0}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{p,0}, \dots, x_{p,n_p}]$ над алгебраически замкнутым полем K характеристики нуль. Будем называть многочлен $F \in R$ мультиоднородным или однородным по p группам переменных $\mathbf{y_1} = (x_{1,0}, \dots, x_{1,n_1})$, ..., $\mathbf{y_p} = (x_{p,0}, \dots, x_{p,n_p})$, если с некоторыми неотрицательными целыми $D_1, \dots, D_p$ для всех ненулевых $t_1, \dots, t_p \in K$ выполняется соотношение

$$F(t_1 x_{1,0}, \dots, t_1 x_{1,n_1}, \dots, t_p x_{p,0}, \dots, t_n x_{p,n_p}) = t_1^{D_1} \dots t_p^{D_p} F(x_{1,0}, \dots, x_{p,n_p}).$$

[1] *Зайцева Анастасия Николаевна* — студ. каф. теории чисел мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zaytsevaan@gmail.com.