

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, Многообразия Фано рода 12 и компактификации \mathbb{C}^3 , *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 4, 162–170

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 января 2025 г., 12:34:09



© 1991 г.

МНОГООБРАЗИЯ ФАНО РОДА 12 И КОМПАКТИФИКАЦИИ \mathbb{C}^3

Ю. Г. ПРОХОРОВ

Строится семейство многообразий Фано индекса 1 рода 12 с $b_2 = 1$, каждое из которых содержит гиперплоское сечение G такое, что дополнение к G изоморфно \mathbb{C}^3 .

ВВЕДЕНИЕ

В 1954 г. Ф.Хирцебрух сформулировал следующую проблему: классифицировать все компактификации \mathbb{C}^n со вторым числом Бетти $b_2 = 1$ (см. [1]).

Определение. Компактификацией \mathbb{C}^n называется пара (X, G) , где X — гладкое компактное комплексное многообразие с $b_2 = 1$, G — замкнутое аналитическое подмножество такое, что $X \setminus G \simeq \mathbb{C}^n$ (биголоморфно). Две компактификации (X_1, G_1) и (X_2, G_2) называются изоморфными, если существует биголоморфизм $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ такой, что $\varphi(G_1) = G_2$.

В случае $n = 1, 2$ существует только тривиальная компактификация \mathbb{C}^n : $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ (см. [2]). Задача о классификации компактификаций \mathbb{C}^3 полностью не решена. В настоящее время неизвестно, все ли они являются проективными алгебраическими многообразиями (см. [3, 4]). Если же (X, G) — проективная компактификация \mathbb{C}^3 , то X — многообразие Фано, $\text{Pic} X = \mathbb{Z}$ и G — обильный дивизор, порождающий $\text{Pic} X$ (см. [4]). Индекс $r = r(X)$ может принимать значения 1, 2, 3 или 4 (см. [5]). Известно, что все проективные компактификации \mathbb{C}^3 описываются следующей таблицей.

Номер	r	X	G
1	4	\mathbb{P}^3	\mathbb{P}^2
2	3	$Q \subset \mathbb{P}^4$ -квадрика	Q_0 -квадратичный конус
3	2	$W_5 \subset \mathbb{P}^6$ — многообразие Фано степени 5 [5]	Нормальная поверхность дель Пеццо с единственной особой точкой типа A_4 [6]
4	2	$W_5 \subset \mathbb{P}^6$	Поверхность, заметаемая прямыми, пересекающимися фиксированную прямую типа $(1, -1)$ [7]
5	1	$V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — многообразие Фано рода 12 [5, 8]	Поверхность, имеющая особенность вдоль одной или двух гладких рациональных кривых [9, 10]

Ключевые слова: многообразия Фано, компактификация, биголоморфизм, поверхность дель Пеццо.

Компактификации 1, 2, 3, 4 единственны с точностью до изоморфизма. Полной классификации компактификаций индекса 1(5) пока не получено.

В настоящей статье будет доказан следующий результат:

Теорема. *Существует 4-мерное семейство проективных компактификаций \mathbb{C}^3 . Каждая компактификация (X, G) из этого семейства является многообразием Фано $V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$. Поверхность G особа вдоль прямой и заматается кониками, проходящими через эту прямую.*

Сформулированная теорема будет доказана в § 3, § 1 и 2 являются вспомогательными. В § 1 строится способ восстановления многообразий $V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ по гладкой рациональной кривой $Y \subset W_5 \subset \mathbb{P}^6$ степени 5. Эта конструкция обратна конструкции, приведенной в [8]. В § 2 обсуждается связь между нормальными пучками прямых на V_{22} и гиперплоскими сечениями W_5 , проходящими через Y .

Обозначения. Через \mathbb{F}_n мы будем обозначать рациональную геометрически линейчатую поверхность $\mathbb{P}(\mathcal{O} + \mathcal{O}(-n))$, через s и f — отрицательное сечение и слой \mathbb{F}_n . Если $Z \subset X$ — гладкая рациональная кривая на гладком многообразии X , $\dim X = 3$, то для нормального пучка Z имеем разложение $N_{Z/X} = \mathcal{O}_z(a_1) \oplus \mathcal{O}_z(a_2)$. Мы будем говорить, что Z имеет тип (a_1, a_2) или, короче, Z является (a_1, a_2) -кривой. Основное поле всюду предполагается полем \mathbb{C} .

Автор благодарит В.А.Исковских за полезные советы и внимание к работе.

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО РОДА 12

В настоящем параграфе мы опишем конструкцию, позволяющую получать все многообразия Фано индекса 1 рода 12 с $b_2 = 1$.

Обозначим через $W = W_5 \subset \mathbb{P}^6$ многообразие Фано индекса 2 степени 5. Согласно [5], многообразие W единственно с точностью до изоморфизма, $b_2(W) = 1, b_3(W) = 0$, и W может быть реализовано как гладкое сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ подпространством коразмерности 3.

Пусть теперь $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — многообразие Фано индекса 1 рода 12 с $b_2 = 1$, т.е. $\text{Pic} V = \mathbb{Z} \cdot (-K_V), (-K_V)^3/2 + 1 = 12$. Согласно [11], на V существует прямая Z .

Теорема 1.1. (Исковский, [8]). *Существует диаграмма бирациональных отображений*

$$\begin{array}{ccccccc}
 F' & & V' & \xrightarrow{\chi} & V^+ & & Y^+ \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \varphi & & \downarrow \\
 & & Z & & V & & W & & Y
 \end{array} \tag{1.1}$$

где $\sigma : V' \rightarrow V$ раздутие $Z, F' = \sigma^{-1}(Z), \chi : V' \rightarrow V^+ - \text{флор (см. [12])}$, изоморфизм вне подмножеств $E' \subset V'$ и $E^+ \subset V^+$ коразмерности 2, $\varphi : V^+ \rightarrow W - \text{стягивание экстремального луча (в смысле работы [13])}$, $Y^+ \sim -K_{V^+} - 2F^+$. Морфизм φ стягивает дивизор Y^+ на гладкую рациональную кривую Y степени 5.

Теорема 1.2. (i) *Пусть $Y \subset W = W_5 \subset \mathbb{P}^6 - \text{гладкая рациональная кривая степени 5}$, тогда существует следующая диаграмма бирациональных отображений:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y^+ & & V^+ & \xrightarrow{\rho} & V' & & F' \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma & & \downarrow \\
 & & Y & & W & & V & & Z
 \end{array} \tag{1.2}$$

где $\varphi : V^+ \rightarrow W$ раздутие Y , $Y^+ = \varphi^{-1}(Y)$, $\rho : V^+ \rightarrow V'$ — флор, $\sigma : V' \rightarrow V$ — стягивание экстремального луча, $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — гладкое многообразие Фано индекса 1 рода 12 с $b_2 = 1$. Морфизм σ стягивает дивизор F' на прямую $Z \subset V$. Дивизор F' является образом $\rho(F^+)$ неприводимого дивизора $F^+ \subset V^+$ такого, что $\varphi(F^+)$ — гиперплоское сечение, содержащее Y .

(ii) Конструкция (1.2) обратна конструкции (1.1).

Доказательство. Пусть $\varphi : V^+ \rightarrow W$ раздутие Y , $H \in \text{Pic}W$ — гиперплоское сечение, $H^+ = \varphi^*H$, $Y^+ = \varphi^{-1}(Y)$. Так как $\text{Pic}W = H \cdot Z$, то $\text{Pic}V^+ = H^+ \cdot Z + Y^+ \cdot Z$.

Лемма 1.1. На V^+ теория пересечений имеет вид $H^{+3} = 5$, $H^{+2} \cdot Y^+ = 0$, $H^+ Y^{+2} = -5$, $Y^{+3} = -8$.

Доказательство. Имеем точную последовательность на Y :

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_W|_Y \longrightarrow N_{Y/W} \longrightarrow 0.$$

Откуда $Y^{+3} = -c_1(N_{Y/W}) = c_1(T_Y) - c(T_W) \cdot Y = -8$. Остальные соотношения очевидны. •

Линейная оболочка Y 5-мерна. Действительно, если $Y \subset \mathbb{P}^4$, то $Y = \mathbb{P}^4 \cap W$ и $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$. Обозначим через F поверхность, высекаемую на W линейной оболочкой Y , $F^+ \sim H^+ - Y^+$ — собственный прообраз F . Имеем $K_{V^+} \sim 2H^+ - Y^+$, поэтому $\text{Pic}V^+ = -K_{V^+} \cdot Z + F^+ \cdot Z$.

Лемма 1.2. Теория пересечений на V^+ может быть записана в виде $(-K_{V^+})^3 = 18$, $(-K_{V^+})^2 \cdot F^+ = 3$, $(-K_{V^+}) \cdot F^{+2} = -2$, $F^{+3} = -2$.

Доказательство леммы может быть получено из леммы 1.1. •

Лемма 1.3. (i) Линейная система $| -K_{V^+} |$ свободна.

(ii) Для любого эффективного дивизора $D \in \text{Pic}V^+$

$$D \cdot (-K_{V^+})^2 > 0.$$

Доказательство. (i) Линейная система $| -K_{V^+} | = 2H^+ - Y^+$ является прообразом системы квадратиков, проходящих через Y . Утверждение (i) следует из того, что рациональная нормальная кривая Y является пересечением квадратиков.

(ii) Мы можем считать, что D неприводим и $D \sim \alpha(-K_{V^+}) - \beta F^+$. Имеем $\alpha(-K_{V^+})^3 - \beta(-K_{V^+})^2 \cdot F^+ = 18\alpha - 3\beta = 0$ или $\beta = 6\alpha$, т.е. $D \sim \alpha(-K_{V^+} - 6F^+) \sim \alpha(-4H^+ - 5Y^+)$. Если f^+ — слой линейчатой поверхности Y^+ , то $f^+ \cdot Y^+ = -1$ и $D \cdot f^+ < 0$, откуда $D = Y^+$, но $(-K_{V^+})^2 \cdot Y^+ > 0$. Противоречие доказывает лемму. •

Лемма 1.4. Пусть $\varphi_1 : V^+ \rightarrow V_1 \subset \mathbb{P}^n$ — морфизм, заданный линейной системой $| -K_{V^+} |$, и

$$V^+ \xrightarrow{\varphi^+} V_0 \longrightarrow V_1$$

— факторизация Штейна, тогда

(i) $\varphi^+ : V^+ \rightarrow V_0$ — бирациональный морфизм, многообразие V_0 имеет лишь терминальные особенности и исключительное множество $E^+ \subset V^+$ морфизма φ^+ имеет коразмерность 2.

(ii) Все особенности V_0 аналитически изоморфны факторам двойных точек по циклической группе.

Доказательство. Многообразие V_0 нормально и \mathbb{Q} -горенштейново. По лемме 1.3 φ_1 и φ^+ не стягивают дивизоров, поэтому V_0 терминально.

(ii) следует из (i) и [14]. •

Для каждой компоненты $E_i^+ \subset E^+$ имеем $-F^+ \cdot E_i^+ = (-H^+ + K_{V^+}) \cdot E_i^+ = -H^+ \cdot E_i^+ < 0$. Согласно [12], существует — флор, $\rho: V^+ \rightarrow V'$. Если множество E^+ пусто, то мы положим $V' = V^+$. На многообразии V' существует экстремальный луч в смысле [13]. Пусть $\sigma: V' \rightarrow V$ — его стягивание. Заметим, что если E^+ пусто, то по критерию обильности Накаи–Мойшезона и лемме 1.3. $\sim K_{V'}$ обильен и на V' существуют два экстремальных луча. В этом случае мы стянем тот из них, чтобы $\sigma \neq \varphi$.

Доказательство теоремы вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма 1.5. *Морфизм $\sigma: V' \rightarrow V$ стягивает дивизор F' на прямую, лежащую на многообразии Фано V рода 12 индекса 1.*

Доказательство. Согласно [13], $\text{Pic}V = \mathbb{Z}$ и возможны следующие случаи:

1) $\dim V = 1$, тогда $V = \mathbb{P}^1$ и $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на поверхности дель Педро. Пусть $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \sim \alpha(-K_{V'}) + \beta F'$, тогда $0 = (\alpha(-K_{V'}) + \beta F')^2 \cdot (-K_{V'}) = 18\alpha^2 + 6\alpha\beta - 2\beta^2$. Последнее уравнение не имеет целочисленных корней. Случай 1) невозможен.

2) $\dim V = 2$, тогда $V = \mathbb{P}^2$ и $\sigma: V' \rightarrow \mathbb{P}^2$ — расслоение на коники. Пусть $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \sim \alpha(-K_{V'}) + \beta F' \sim D$, $\beta = \pm 1$ или ± 2 . Но $2 = (-K_{V'}) \cdot D^2 = 18\alpha^2 + 6\alpha\beta - 2\beta^2$, откуда $\beta^2 + 1$ делится на 3. Полученное противоречие показывает, что случай 2) невозможен.

3) $\dim V = 3$ и $\sigma: V' \rightarrow V$ — стягивание дивизора $D \sim \alpha(-K_{V'}) - \beta F'$ в точку (возможно, особую). Тогда $D(-K_{V'}) = \varepsilon$, где $\varepsilon = 4, 2$ или 1 в зависимости от типа особенности $\sigma(D)$. Получаем, что $18\alpha - 3\beta = \varepsilon$, но правая часть последнего уравнения не делится на 3, поэтому случай 3) также невозможен.

4) $\dim V = 3$, V — гладкое и $\sigma: V' \rightarrow V$ — стягивание дивизора $D \sim \alpha(-K_{V'}) - \beta F'$ на гладкую кривую Z . В этом случае V — многообразие Фано индекса r . Группа $\text{Pic}V'$ порождается $\alpha(-K_{V'}) - \beta F'$ и $1/r \cdot \sigma^*(-K_{V'}) \sim 1/r \cdot (-K_{V'} + D) \sim (\alpha + 1)/r \cdot (-K_{V'}) - \beta/r \cdot F'$, т.е. $\alpha + 1$ делится на r и определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & (\alpha + 1)/r \\ -\beta & -\beta/r \end{vmatrix}$$

равен ± 1 . Откуда $-\alpha\beta/r + (\alpha + 1)\beta/r = \beta/r = \beta/r = \pm 1$ и $\beta = r$ или $\beta = -r$.

Пусть сначала $\beta = r$, $\alpha = r \cdot k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $r^3 \deg V = (-K_{V'})^3 = (-K_{V'})(-K_{V'} + D)^2 = (-K_{V'})(rk(-K_{V'}) - rF')^2 = 2r^2(9k^2 - 3k - 1)$ или

$$9k^2 - 3k - r \cdot \deg V / 2 - 1 = 0. \tag{1.3}$$

Воспользуемся классификацией многообразий Фано [5, 8].

а) $r = 4$, $\deg V = 1$, $V = \mathbb{P}^3$. Но в этом случае уравнение (1.3) принимает вид $3k^2 - k - 1 = 0$ и не имеет целочисленных решений.

б) $r = 3$, $\deg V = 2$. Этот случай также невозможен, так как в (1.3) $r \deg V / 2 + 1 = 4$ не делится на 3.

в) $r = 2$, $\deg V = d \leq 5$ (так как $\text{Pic}V = \mathbb{Z}$). Уравнение (1.3) принимает вид $9k^2 - 3k - d - 1 = 0$. Откуда $d = 2$ или 5 . Непосредственно проверяется, что если $d = 2$, то это уравнение не имеет целочисленных корней. Следовательно, $d = 5$, $k = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $D \sim -K_{V'} - 2F' \sim \rho(Y^+)$. Дивизор Y^+ неподвижен, поэтому $D = \rho(Y^+)$. По определению отображения флор (см. [12]) для всех компонент $E_i^+ \subset E'$ и $E_i^+ \subset E^+$ имеем $-K_{V'} \cdot E_i^+ = -K_{V^+} \cdot E_i^+ = 0$, $Y^+ \cdot E_i^+ > 0$, $\rho(Y^+) \cdot E_i^+ < 0$. С другой стороны, $0 = E_i^+ \cdot (-K_{V'}) = E_i^+ \cdot 6^* (-K_{V'}) - E_i^+ \cdot \rho(Y^+) = 2 \deg \sigma(E_i^+) - E_i^+ \cdot \rho(Y^+)$,

откуда $E_i \cdot \rho(Y^+) \geq 0$, т.е. множества E^+ и E' пусты и $V' = V^+$. Из выбора нашего экстремального стягивания $\sigma \neq \varphi$, т.е. существуют две структуры \mathbb{P}^1 -расслоения на $Y^+ = D$. Откуда получаем $Y^+ \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, что противоречит $c_1(N_{Y/W}) = 8$.

г) $r = 1$, $\deg V = 2g - 2$, $2 \leq g \leq 12$, $g \neq 11$. Уравнение (1.3) принимает вид $9k^2 - 3k - g = 0$, откуда $g = 3m$, $1 \leq m \leq 4$, и уравнение имеет решения $m = 2$ или $m = 4$ и $k = \pm 1$. Получаем, что $\beta = 1$, $\alpha \leq 0$. Но тогда дивизор $D \sim \alpha(-K_{V'}) - F' \sim (2\alpha - 1) \cdot \rho(H^+) + (1 - \alpha)\rho(Y^+)$ не может быть эффективным.

Остался возможным только случай $\beta = -r$. Так как $D \sim \alpha(-K_{V'}) + rF'$ неподвижен и неприводим, что $\alpha = 0$, $r = 1$, т.е. $D = F'$. Имеем $\deg V = 2g - 2 = (-K_{V'})^3 = (-K_V) \cdot (-K_{V'} + F')^2 = 22$, следовательно, $g = 12$. Многообразие V имеет род 12. Далее $\deg Z = -K_{V'} \cdot Z = (-K_{V'} + F') \cdot F' \cdot (-K_{V'}) = 1$, т.е. $Z \subset V$ — прямая. Лемма 1.5 и теорема 1.2 доказаны полностью. •

Следствие 1.1. Пусть $D \subset V$ — дивизор такой, что $D = \varphi\rho(Y^+)$, тогда D имеет особенность кратности 3 вдоль Z и заматается кониками, пересекающими Z .

Доказательство. См. [8]. •

Следствие 1.2. $V \setminus D \simeq W \setminus F$.

Следствие 1.3. [8]. *Отображение $\varphi\chi: V' \rightarrow W \subset \mathbb{P}^6$ задается линейной системой $|-K_{V'} - F'|$.*

§ 2. ГИПЕРПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ W_5 И ПРЯМЫЕ НА V_{22}

Пусть F — гиперплоское сечение $W_5 \subset \mathbb{P}^6$, тогда возможны следующие случаи:

(А) F — нормальная поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями (или гладкая) [15].

(В) F не является нормальной и, согласно [16], — линейчатая.

Замечание 2.1. Так как через каждую точку W_5 проходит не более трех прямых (см. [5, 7]), то F не может быть конусом.

Согласно [17], на W_5 биголоморфно действует группа $SL_2(\mathbb{C})$.

Лемма 2.1. [7]. Пусть F — поверхность типа (В), тогда особое множество F является прямой l_0 , F состоит из всех прямых пересекающих l_0 и является проекцией поверхности $\tilde{F} \subset \mathbb{P}^6$ из точки $p \notin \tilde{F}: \psi: \tilde{F} \rightarrow F \subset \mathbb{P}^6$. Возможны следующие случаи: (В1) l_0 имеет тип $(0, 0)$, тогда $\tilde{F} \simeq \mathbb{F}_1$, вложение $\mathbb{F}_1 = F \subset \mathbb{P}^6$ задается линейной системой $|s + 3f|$, морфизм $\psi: \tilde{F} \rightarrow F$ двулистно отображает сечение s на прямую l_0 .

(В2) l_0 имеет тип $(1, -1)$, тогда $\tilde{F} = \mathbb{F}_3$, вложение $\mathbb{F}_3 = F \subset \mathbb{P}^6$ задается линейной системой $|s + 4f|$, морфизм $\psi: \tilde{F} \rightarrow F$ склеивает сечение s с некоторым слоем f_0 .

Группа $SL_2(\mathbb{C})$ транзитивно действует на поверхностях типов (В1) и (В2). •

Согласно [5], каждая прямая на $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ имеет тип $(0, -1)$ или $(1, -2)$. Следующее предложение устанавливает связь между типом поверхностей F и типом прямых на V_{22} .

Предложение 2.1. Пусть $F \subset W_5 \subset \mathbb{P}^6$ — гиперплоское сечение и $Y \subset F$ — гладкая кривая степени 5 рода 0, тогда поверхность F имеет тип (А), если и только если прямая Z , полученная в диаграмме (1.2), имеет тип $(0, -1)$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями § 1. Пусть $Z \subset V_{22}$ имеет тип $(0, -1)$, тогда $F' = \mathbb{F}_1$, $f \cdot F' = -1$, $s \cdot F' = 0$. Если E'_i — компонента E' , содержащаяся в F' , то $E'_i \equiv \alpha s + \beta f$, $\beta \geq \alpha \geq 0$, $E'_i = f$ или $E'_i = s$. Во всех случаях $E'_i \cdot F' \leq 0$. Но $0 = E'_i \cdot (-K_{V'}) = E'_i \cdot \sigma^*(-K_V) - E'_i \cdot F'$, $E'_i \cdot \sigma^*(-K_V) \geq 0$. Откуда $E'_i \cdot \varphi^*(-K_V) = 0$, $E'_i = f$ и $f \cdot F'_i = 0$. Противоречие показывает, что F' не содержит E'_i , следовательно, $E' \cap F'$ — конечное множество точек. Пусть f — слой $F' \simeq \mathbb{F}_1$, не проходящий через эти точки, тогда f не пересекается E' — базисным множеством линейной системы $|-K_{V'} - F'| = |\sigma^*(-K_V) - 2F'|$, отображающей V' на W_5 (см. следствие 1.3), поэтому кривая $\varphi\chi(f)$ имеет степень $f \cdot (\sigma^*(K_V) - 2F') = 2$, т.е. F содержит семейство коник. Используя лемму 2.1, нетрудно получить, что поверхность типа (B) не может содержать неприводимые коники, следовательно, F — типа (A) .

Пусть $Z \subset V_{22} - (1, -2)$ -прямая, тогда $F' = \mathbb{F}_3$. Имеем $s \cdot F' = 1$, $s \cdot \sigma^*(-K_V) = \deg \sigma(s) = 1$, поэтому $s \cdot (-K_{V'}) = \sigma^*(-K_V) \cdot s - F' \cdot s = 0$, т.е. $s = E'_i$ — компонента E' . Образы морфизмов $\varphi_1 : V^+ \rightarrow V_1 \subset \mathbb{P}^n$ и $\varphi_2 : V' \rightarrow V_1 \subset \mathbb{P}^n$, заданных линейными системами $|-K_{V^+}|$ и $|-K_{V'}|$, совпадают, причем $\varphi_1(F^+) = \varphi_2(F')$ — конус над рациональной кубической кривой (см. [8]). Если F имеет тип (A) , то F^+ — нормальная поверхность, $\varphi : F^+ \rightarrow F$ — композиция раздутий и F^+ (как и F) имеет лишь дювалевские особенности. Пусть $\tilde{\varphi} : \tilde{F}^+ \rightarrow F^+$ — минимальное разрешение, тогда $K_{\tilde{F}^+} = \tilde{\varphi}^* K_{F^+}$. По формуле присоединения $-K_{F^+} = H^+|_{F^+}$, поэтому $|-K_{F^+}|$ и $|-K_{\tilde{F}^+}|$ свободны. При раздутии вершины конуса $\varphi_1(F^+)$ вклеивается кривая с индексом самопересечения -3 , следовательно, \tilde{F}^+ содержит гладкую рациональную кривую C такую, что $C^2 \leq -3$, но по формуле для рода $K_{\tilde{F}^+} \cdot C + C^2 = -2$, $-K_{\tilde{F}^+} \cdot C \leq -1$, что противоречит свободе $|-K_{\tilde{F}^+}|$. Предложение доказано. •

Следствие 2.1. Если F имеет тип (A) , то любая кривая Y проходит через все особые точки F и поверхность F^+ — гладкая.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.

Отличие состоит в том, что $\varphi_1(F^+) = \mathbb{F}_1$ (см. [8]). •

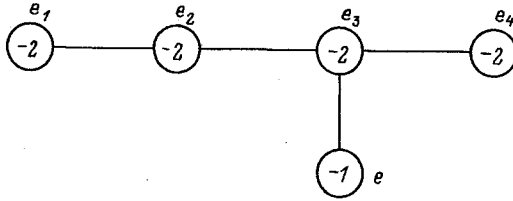
Далее мы хотим исследовать кривые Y степени 5 рода 0 на поверхностях F .

Предложение 2.2. Гиперплоское сечение $F \subset W_5 \subset \mathbb{P}^6$ типа (B) содержит неприводимое 6-мерное семейство гладких кривых степени 5 рода 0, каждая такая кривая является проекцией из точки $p \notin \tilde{F}$ гиперплоского сечения поверхности $\tilde{F} \subset \mathbb{P}^6$.

Доказательство. Пусть F имеет тип $(B1)$, тогда $\tilde{F} = \mathbb{F}_1$ и $\mathcal{O}_{\tilde{F}}(1) \sim s + 3f$ (по лемме 2.1). Обозначим через $\tilde{Y} \subset \tilde{F}$ прообраз Y , тогда $\tilde{Y} \sim \alpha s + \beta f$, $\beta \geq \alpha \geq 1$ и $5 = \deg Y = \tilde{Y} \cdot (s + 3f) = 2\alpha + \beta$. Откуда $\beta = 5 - 2\alpha \geq \alpha$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\tilde{Y} \sim s + 3f$, т.е. \tilde{Y} является гиперплоским сечением \tilde{F} . Очевидно, что семейство гладких кривых \tilde{Y} неприводимо и 6-мерно. Общая гиперплоскость $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6$ не проходит через p , и образ $Y = \psi(\mathbb{P}^5 \cap \tilde{F}) = \psi(\tilde{Y})$ — гладкая неприводимая кривая. Случай $(B2)$ рассматривается аналогично. Предложение доказано. •

Предложение 2.3. Пусть $F \subset W_5 \subset \mathbb{P}^6$ — гиперплоское сечение типа (A) с единственной особой точкой A_4 , тогда F не содержит гладких кривых степени 5 рода 0.

Доказательство. Пусть $\psi : \tilde{F} \rightarrow F$ — минимальное разрешение особенности, $\tilde{Y} \subset \tilde{F}$ — собственный прообраз Y . Согласно [6], конфигурация кривых с отрицательным индексом самопересечения на \tilde{F} имеет вид, изображенный на рисунке.



$\text{Pic } \tilde{F}$ порождается e_1, e_2, e_3, e_4, e . Для некоторых $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{Z}$ имеем $\tilde{Y} \sim \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha e$. Морфизм $\psi: \tilde{F} \rightarrow F \subset \mathbb{P}^5$ задается $|-K_{\tilde{F}}|$, поэтому $-K_{\tilde{F}} \cdot e = 1$, $-K_{\tilde{F}} \cdot e_i = 0$, $-K_{\tilde{F}} \cdot \tilde{Y} = \deg Y = 5$ и $\alpha = 5$. Далее получаем целые неотрицательные числа $\beta = \tilde{Y} \cdot e \geq 0$, $\beta_i = \tilde{Y} \cdot e_i \geq 0$. Запишем систему неравенств

$$\begin{cases} \beta_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \\ \beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, \\ \beta_3 = \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 + 5 \geq 0, \\ \beta_4 = \alpha_3 - 2\alpha_4 \geq 0, \\ \beta = \alpha_3 - 5 \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

нетрудно вычислить, что $2\beta_1 + 4\beta_2 + 6\beta_3 + 3\beta_4 + 5\beta = 5$. Следовательно, решения системы (2.1) имеют вид $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta) = (1, 0, 0, 1, 0)$ или $(0, 0, 0, 0, 1)$. В первом случае две точки пересечения $e_1 \cap \tilde{Y}$ и $e_4 \cap \tilde{Y}$ при стягивании $\psi: \tilde{F} \rightarrow F$ дивизора $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ переходят в одну точку, поэтому Y — особая кривая. Во втором случае $\tilde{Y} \in |-K_{\tilde{F}}|$, следовательно, род \tilde{Y} равен 1. Предложение доказано. •

§ 3. КОМПАКТИФИКАЦИЯ \mathbb{C}^3 . ПРИМЕРЫ

В настоящем параграфе, используя результаты § 1 и 2, мы докажем основной результат.

Теорема 3.1. *Существует 4-мерное семейство проективных компактификаций \mathbb{C}^3 . Каждая компактификация (V, G) из этого семейства является многообразием Фано $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ индекса 1 рода 12. Поверхность G имеет особенность вдоль $(1, -2)$ -прямой $Z \subset V$ и заматается кониками, проходящими через Z .*

Доказательство. Пусть (W_5, F) — компактификация \mathbb{C}^3 , построенная в [7]. Поверхность F имеет тип (B2). Выберем гладкую кривую $Y \subset F$ степени 5 рода 0. По теореме 1.2 и следствию 1.2 существует многообразие Фано $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ и дивизор $G \subset V$ такие, что $W_5 \setminus F \simeq V \setminus G$. Из следствия 1.1 видно, что G заматается кониками, проходящими через Z . По предложению 2.1 Z — $(1, 2)$ -прямая.

Компактификация (W_5, F) единственна с точностью до изоморфизма, и две пары (V, G) и (V', G') изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны тройки (W_5, F, Y) и (W_5, F, Y') . Стационарная подгруппа в $SL_2(\mathbb{C})$ поверхности F является двумерной борелевской подгруппой (см. [7]), а по предложению 2.2 поверхность содержит 6-мерное семейство кривых Y . Поэтому семейство построенных компактификаций $6 - 2 = 4$ -мерна. Теорема доказана. •

Замечание 3.1. Согласно предложению 3.2, аналогичная конструкция в случае нормальной поверхности дель Пеццо F с особой точкой A_4 невозможна.

Далее мы рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 3.1. Пусть $V = V_{22}^s \subset \mathbb{P}^{13}$ — многообразие Мукая–Умемуры (см. [17]). Каждая прямая Z на этом многообразии имеет тип $(1, -2)$. Если G — поверхность, заметаемая кониками, проходящими через Z , то (V, G) — компактификация \mathbb{C}^3 . Действительно, на $V = V_{22}^s$ действует $SL_2(\mathbb{C})$, стационарная подгруппа Z двумерна (так как семейство прямых на V одномерно), следовательно, группа автоморфизмов тройки (W_5, F, Y) также двумерна, но гиперплоское сечение W_5 с двумерной группой автоморфизмов имеет тип (B2) (см. [7]).

Замечание 3.2. В [17] показано, что $SL_2(\mathbb{C})$ транзитивно действует на множестве прямых, содержащихся в V , поэтому все компактификации \mathbb{C}^3 , полученные из $V_{22}^s \subset \mathbb{P}^{13}$ при помощи описанной конструкции, изоморфны.

Пример 3.2. Пусть $V = V_{22}^a \subset \mathbb{P}^{13}$ многообразие Фано с одномерной группой автоморфизмов \mathbb{C}^+ , полученное в [18]. Аналогично примеру 3.1 получаем, что для \mathbb{C}^+ -инвариантной прямой Z поверхность коник G , пересекающих Z , задает компактификацию $\mathbb{C}^3(V_{22}^a, G)$.

Пример 3.3. Пусть $V = V_{22}^m \subset \mathbb{P}^{13}$ — любое многообразие Фано, группа автоморфизмов, которого содержит \mathbb{C}^* (см. [18]), Z — \mathbb{C}^* -инвариантная прямая, $G \subset V$ — соответствующая поверхность коник, тогда (V, G) — компактификация \mathbb{C}^3 (то, что F имеет тип (B2) следует из построения V_{22}^m).

Замечание 3.3. Если $V = V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — многообразие Фано, отличное от V_{22}^s , то в [19] показано, что может существовать только конечное множество $(1, -2)$ -прямых. Следовательно, V может быть представлено в виде компактификации \mathbb{C}^3 при помощи нашей конструкции не более чем конечным числом способов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hirzebruch F., *Some problems on differentiable and complex manifolds*, Ann. of Math. **60** (1962), 213–236.
- [2] Remert R., van de Ven A., *Zwei Sätze über die Komplex projektive Ebene*, Nieuw. Arch. Wisk. **8** (1960), 147–157.
- [3] Brenton L., Morrow J., *Compactifications of \mathbb{C}^n* , Trans. Am. Math. Soc. **246** (1978), 139–153.
- [4] Peternell T., Schneider M., *Compactifications of \mathbb{C}^3 , I*, Math. Ann. **280** (1988), 129–146.
- [5] Исковских В.А., *Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий*, Современные проблемы математики, Итоги науки и техники, т. 12, ВИНТИ, М., 1979, с. 159–236.
- [6] Fuzushima M., *Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications 3-dimensional complex affine space \mathbb{C}^3* , Nagoya Math. J. **104** (1986), 1–28.
- [7] Furushima M., Nakayama N., *The family of lines on the Fano threefold V_5* , Nagoya Math. J. **116** (1989), 111–122.
- [8] Исковских В.А., *Двойная проекция из прямой на трехмерных многообразиях Фано первого рода*, Мат. сб. **180**, вып. 3 (1989), 260–278.
- [9] Peternell T., *Compactifications of \mathbb{C}^3 , II*.
- [10] Furushima M., *Complex analytic compactifications of \mathbb{C}^3* , Comp. Math. **76** (1990), 163–196.
- [11] Шокуров В.В., *Существование прямой на многообразиях Фано*, Изв. АН СССР Сер. мат. **43**, вып. 4 (1979), 922–964.
- [12] Kollar J., *Flops*, Nagoya Math. J. **113** (1989), 15–36.
- [13] Mori S., *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133–176.

- [14] Reid M., *Young persons guide to canonical singularities*, Proc. of Symp. in Pure Math. **46** (1987), 345–414.
- [15] Hidaka F., Watanabe K., *Normal Gorenstein surfaces with ample anticanonical divisor*, Tokyo J. Math. **4** (1981), 319–330.
- [16] Нагата М., *О рациональных поверхностях, I*, Математика (сб. перев.) **8**, вып. 1 (1964), 55–71.
- [17] Miyaoka S., Umemura H., *Minimal rational threefolds*, Lect. Notes in Math. **106** (1982), 490–518.
- [18] Прохоров Ю.Г., *Группы автоморфизмов многообразий Фано*, Успехи мат. наук **45**, вып. 3 (1990), 195–196.
- [19] Прохоров Ю.Г., *Об экзотических многообразиях Фано*, Вестн. МГУ. Сер. I **3** (1990), 34–37.

Поступило 29 декабря 1990 г.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

Добавлено при корректуре: профессор С. Мукай сообщил автору, что им получен аналогичный результат.