А. Б. Жеглов, Удивительные примеры нерациональных гладких спектральных поверхностей, *Матем. сб.*, 2018, том 209, номер 8, 29–55

DOI: 10.4213/sm9031

УДК 517.957+512.72+512.71

А. Б. Жеглов

Удивительные примеры нерациональных гладких спектральных поверхностей

Изучаются необходимые и достаточные алгебро-геометрические условия существования нетривиальных коммутативных подалгебр ранга 1 в алгебре $\widehat{D}$, пополненной алгебре дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных, представляющей собой простой чисто алгебраический аналог алгебры аналитических псевдодифференциальных операторов на многообразии.

Эти условия являются условиями на проективную (спектральную) поверхность и входят в определение нового понятия пре-спектральных данных. Для гладких поверхностей достаточные условия выглядят особенно просто. На гладкой проективной поверхности должна лежать: 1) целая обильная кривая C с $C^2 = 1$ и $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 1$; 2) дивизор D с $(D,C)_X = g(C)-1$, $h^i(X,\mathscr{O}_X(D)) = 0$, $i = 0,1,2$, и $h^0(X,\mathscr{O}_X(D+C)) = 1$. Существуют примеры таких поверхностей, и соответствующие им коммутативные подалгебры не допускают изоспектральных деформаций.

Библиография: 45 названий.

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы, коммутирующие разностные операторы, квантовые интегрируемые системы, алгебраическая теория КП, алгебраические поверхности, поверхности Годо.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9031

§ 1. Введение

Теория коммутирующих обыкновенных дифференциальных или разностных операторов появилась в математической физике как алгебро-геометрический инструмент в теории интегрирования нелинейных солитонных уравнений и в спектральной теории периодических конечнозонных операторов (см. [11], [12], [20], [22]). Эффективная классификация была предложена в работах [20], [21] в дифференциальном случае и в работе [22] в разностном случае (при некоторых естественных ограничениях). Теория коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных или теория высших разностных операторов гораздо сложнее и к настоящему моменту еще не закончена, хотя некоторые ее элементы появлялись в разных статьях, начиная с работы [20]. А именно, многие статьи были посвящены явным конструкциям коммутирующих матричных дифференциальных операторов; см., например, работы [10], [14], [32], [31], [27], [28], [43]. В такой форме коммутативные подалгебры появляются

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10069).

в различных математических теориях в качестве существенной компоненты; см., например, недавние работы [41], [42], посвященные гипотезе зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Нетривиальные примеры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных со скалярными коэффициентами возникали в теории квантовых систем Калоджеро–Мозера и их деформаций; см., например, работы [37], [19], [18], [6]–[9], [2], [13] и ссылки в них. Другие примеры, полученные с помощью идей из дифференциальной алгебры и теории D-модулей, содержатся, например, в работах [40], [3].

Развивая теорию коммутирующих операторов со скалярными коэффициентами, автор работы [44] предложил аналог классификационной теоремы Кричевера для коммутативных подалгебр в некотором пополнении $\widehat{D}$ алгебры дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных. Это пополнение можно воспринимать как простой чисто алгебраический аналог алгебры аналитических псевдодифференциальных операторов на многообразии. Оно содержит много важных псевдодифференциальных операторов, появлявшихся в разных контекстах в математической физике и анализе; среди них есть также разностные операторы, см. § 2 (в частности, замечание 1). В подходе, описанном в статье [44], подалгебры в $\widehat{D}$ появляются совершенно естественно, в частности как изоспектральные деформации подалгебр в D. Похожесть теории коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов и теории коммутирующих операторов в размерности 2 ведет к естественному предположению, что подалгебры ранга 1 допускают более простое описание в алгебро-геометрических терминах, чем алгебры более высоких рангов. В частности, предположительно, должны существовать аналоги точных формул Кричевера–Новикова для коэффициентов коммутирующих обыкновенных дифференциальных или разностных операторов. Эта гипотеза подтверждается рядом явных примеров: во-первых, примерами, возникавшими в теории квантовых систем Калоджеро–Мозера (см. ссылки, приведенные выше); во-вторых, примерами, полученными с помощью нового подхода из работ [44], [25], [4] (см. [45] для обзора текущего положения дел). Настоящая статья начинается с вывода такого упрощенного описания подалгебр ранга 1 из классификационной теоремы в работе [44] (после формулировки подходящего определения подалгебр ранга 1). Развивая далее это упрощение, мы приходим к определению нового простого понятия пре-спектральных данных ранга 1, кодирующих подалгебры ранга 1 в $\widehat{D}$. Эти данные состоят из проективной поверхности X, обильного дивизора Картье C и пучка без кручения $\mathscr{F}$, обладающего набором простых свойств; см. определение 13 и теорему 2.

В отличие от теории в размерности 1, в размерности 2 есть сильные ограничения на геометрию спектральных данных коммутативных подалгебр в $\widehat{D}$. В частности, во всех примерах из работ [44], [25], [4] спектральные поверхности особы. Первый параметр, который делит множество всех возможных спектральных поверхностей на два класса, – это размерность пространства когомологий $h^0(X, \mathscr{O}_X(C))$. Чтобы объяснить значение этого параметра, напомним, что в работе [25] был определен большой класс подалгебр ранга 1, которые назывались тривиальными. Это подалгебры, содержащие оператор ∂_1 или ∂_2, т.е. состоящие из операторов, не зависящих от x_1 или x_2. Примеры таких алгебр естественно возникают из примеров коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов путем присоединения дополнительного дифференцирования. Пре-спектральные данные, соответствующие таким подалгебрам, характеризуются свойством $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) \geqslant 2$, см. § 4 (ср. [25; теорема 4.1]). На самом деле тривиальные алгебры не так уж тривиальны; исследование их свойств, а также свойств соответствующих спектральных данных будет продолжено в отдельной работе. Первые примеры явных нетривиальных алгебр, являющихся деформациями хорошо известных рациональных систем Калоджеро–Мозера (с особыми спектральными поверхностями), полученные с помощью нашей классификационной теории, появились в [4; § 6].

В настоящей работе мы исследуем вопрос о том, существуют ли пре-спектральные данные ранга 1 с гладкой спектральной поверхностью и свойством $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 1$. Сначала мы доказываем, что арифметический род кривой C должен быть больше 1, и затем выводим достаточные условия для гладких поверхностей, приведенных в аннотации данной статьи. Первые примеры таких данных с минимально возможным родом дивизора C построены в работе [23]; поверхности, возникающие там, – это поверхности общего типа.

Мы оставляем для дальнейших исследований следующие вопросы:

1) было бы интересно найти все возможные гладкие поверхности с такими свойствами. Мы предполагаем, что для всех таких поверхностей $q = p_g = 0$;

2) было бы также интересно найти явно коммутирующие операторы, соответствующие таким поверхностям.

Краткое содержание данной статьи таково. В § 2 мы даем обзор классификационной теории коммутирующих операторов и доказываем усовершенствованную версию классификационной теоремы для коммутативных алгебр ранга 1.

В § 3 мы вводим понятие пре-спектральных данных ранга 1 и показываем, что эти данные могут быть расширены до спектральных данных, тем самым сводя проблему нахождения примеров коммутативных подалгебр в алгебре $\widehat{D}$ к чисто алгебро-геометрической задаче. В частности, мы доказываем, что дивизор C (являющийся априори $\mathbb{Q}$-Картье дивизором) – Картье (теорема 2).

В § 4 мы исследуем вопрос о существовании гладких спектральных поверхностей. Мы напоминаем определение тривиальных коммутативных подалгебр и показываем, что гладкие спектральные поверхности с обильными дивизорами арифметического рода $\leqslant 1$ соответствуют тривиальным коммутативным подалгебрам. После этого мы показываем, что свойства гладких поверхностей, указанные в аннотации, являются достаточными для существования пре-спектральных данных с гладкой спектральной поверхностью и локально свободным спектральным пучком. Примеры таких поверхностей существуют, и пространства модулей спектральных пучков в этих примерах конечны, т.е. соответствующие коммутативные подалгебры не имеют изоспектральных деформаций.

§ 2. Алгебро-геометрические спектральные данные: обзор

В этом параграфе мы развиваем теорию коммутативных подалгебр из работ [44], [45; гл. 3] для подалгебр ранга 1 (обзор этой теории в общем случае см. в [25; § 2]). Наша цель – доказать усовершенствованную версию классификационной теоремы для коммутативных алгебр ранга 1, основанием для которой служит следующее наблюдение.

Для алгебры дифференциальных операторов в частных производных $D = k[[x_1, x_2]][\partial_1, \partial_2]$ (для краткости называемой *алгеброй ПДО*), где k – алгебраически замкнутое поле характеристики 0, можно определить некоторое пополнение $\widehat{D}$. В работе [44] было показано, что коммутативные k-подалгебры $B \subset \widehat{D}$, описываются в терминах некоторых геометрических спектральных данных, и это описание является в некотором смысле естественным обобщением классификации коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, восходящей к классификации Кричевера. Классификация подалгебр коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов особенно проста в случае подалгебр ранга 1, поскольку всякая такая подалгебра по существу определяется (с точностью до линейных замен переменных) лишь чисто геометрическими данными, состоящими из проективной кривой, регулярной точки на ней и когерентного пучка без кручения ранга 1 на этой кривой. В этом параграфе мы собираемся объяснить, что коммутативные подалгебры ранга 1 в $\widehat{D}$ (для подходящим образом определенного понятия ранга) обладают аналогичным свойством.

Обозначим через M единственный максимальный идеал в кольце $k[[x_1, x_2]]$, а через ord_M – функцию порядка (или дискретное нормирование, определенное по M) на этом кольце:

$$\mathrm{ord}_M(a) = \sup\{n \mid a \in (x_1, x_2)^n\}.$$

Определение 1. Пусть

$$\widehat{D}_1 = \left\{ a = \sum_{q \geqslant 0} a_q\, \partial_1^q \mid a_q \in k[[x_1, x_2]],\ \sup\{q - \mathrm{ord}_M(a_q)\} < \infty \right\}$$

– *кольцо*, а $\widehat{D} = \widehat{D}_1[\partial_2]$ – *пополнение* D.

Пусть также $\widehat{E}_+ = \widehat{D}_1((\partial_2^{-1}))$ – *кольцо "псевдодифференциальных" операторов.*

Замечание 1. Определение 1 отличается от определения в работе [44] (наше кольцо $\widehat{D}$ – это $\widehat{D} \cap \Pi_1$ в обозначениях из [44]; $\widehat{E}_+$ отличается аналогичным образом). Хотя это определение не "симметрично" (есть также "симметричная" версия пополнения, см. [4; определение 5.1]), оно хорошо подходит для классификации коммутативных подалгебр. В частности, для него есть аналог теории Шура [45; гл. 3].

Элементы колец $\widehat{D}$, $\widehat{E}_+$ мы будем называть операторами. Операторы из $\widehat{D}$ действуют линейно на пространстве функций $k[[x_1, x_2]]$. Для оператора $P \in \widehat{D}$ будем обозначать его действие через $P \diamond f$ или через $P(f)$. Алгебра ПДО D является плотной подалгеброй в $\widehat{D}$ (в подходящей топологии). Она содержит также k-линейные эндоморфизмы алгебры $k[[x_1, x_2]]$, дельта-функции Дирака, интегральные операторы (см. [4; примеры 5.4, 5.5]) и разностные операторы (вложенные, например, с помощью отображения, определенного в [26]).

Следуя изложению материала в работе [4; § 5], введем следующий аналог функции порядка на D.

Определение 2. Для элемента $P = \sum_{k_1,k_2\geqslant \underline{0}} a_{\underline{k}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}} \in \widehat{D}$, где $\underline{k} = (k_1, k_2)$, $\underline{\partial}^{\underline{k}} = \partial_1^{k_1}\,\partial_2^{k_2}$, определим его *порядок* как

$$\mathbf{ord}(P) := \sup\bigl\{k_1 + k_2 - \mathrm{ord}_M(a_{\underline{k}})\bigr\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \tag{2.1}$$

(считаем, что $\mathbf{ord}(0) = -\infty$). Итак, если $d = \mathbf{ord}(P)$, то

$$\mathrm{ord}_M(a_{\underline{k}}) \geqslant k_1 + k_2 - d \quad \text{для любого} \ \ a_{\underline{k}}.$$

Отметим, что для дифференциального оператора с постоянным старшим символом порядок P в смысле (2.1) совпадает с обычным определением порядка дифференциального оператора. Функция порядка **ord** задает фильтрацию на $\widehat{D}$ и всех ее подалгебрах, и мы будем обозначать через $\mathrm{gr}(\,\cdot\,)$ соответствующие ассоциированные градуированные алгебры.

Пусть $P \in \widehat{D}$. Тогда однозначно определены элементы $\alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in k$ такие, что

$$P = \sum_{k_1,k_2,x_1,x_2\geqslant 0} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\,\underline{x}^{\underline{i}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}}. \tag{2.2}$$

Для любого $m \geqslant -d$ определим m-ю *однородную компоненту* P следующим образом:

$$P_m := \sum_{(i_1+i_2)-(k_1+k_2)=m} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\,\underline{x}^{\underline{i}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}}.$$

Заметим, что $\mathbf{ord}(P_m) = -m$ и имеется разложение $P = \sum_{m=-d}^{\infty} P_m$.

Наконец, определим *символ* P так: $\sigma(P) := P_{-d}$. Будем говорить, что $P \in \widehat{D}$ *однородный*, если $P = \sigma(P)$.

В отличие от обычного кольца ПДО кольцо $\widehat{D}$ содержит делители нуля (см., например, [4; пример 5.4]). По этой причине функция порядка и символы обладают более слабыми свойствами.

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства*:
- $\mathbf{ord}(P\cdot Q) \leqslant \mathbf{ord}(P) + \mathbf{ord}(Q)$, *причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда* $\sigma(P)\cdot\sigma(Q) \neq 0$;
- $\sigma(P\cdot Q) = \sigma(P)\cdot\sigma(Q)$ *при условии* $\sigma(P)\cdot\sigma(Q) \neq 0$.

Доказательство этой леммы для кольца $\widehat{D}$ содержится в доказательстве теоремы 5.3 из [4].

Теорема классификации из работы [44] имеет дело с коммутативными подалгебрами в $\widehat{D}$, удовлетворяющими некоторым специальным условиям, это так называемые 1-квазиэллиптические строго допустимые подалгебры. Чтобы объяснить их, напомним понятия функций порядка и условий роста из работы [44].

Определение 3. Скажем, что ненулевой оператор $P \in \widehat{D}$ *имеет* Γ-*порядок* $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$, если $P = \sum_{s=0}^{l} p_s\,\partial_2^s$, где $p_s \in \widehat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$, и

$\mathrm{ord}(p_l) = k$ (здесь ord обозначает обычный порядок в кольце дифференциальных операторов D_1). В этой ситуации скажем, что оператор P *монический*, если старший коэффициент у p_l равен 1.

Понятие Γ-порядка естественным образом расширяется на кольцо $\widehat{E}_+$. Имеется также функция порядка ord_2, определенная на $\widehat{E}_+$ так: $\mathrm{ord}_2(P) = l$, если $P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s\,\partial_2^s$. Коэффициент p_l называется *старшим членом* и будет обозначаться как $HT_2(P)$, как член, естественно ассоциированный с функцией ord_2.

Оба порядка ведут себя как функция **ord**, а именно

$$\mathrm{ord}_\Gamma(P_1 \cdot P_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(P_1) + \mathrm{ord}_\Gamma(P_2); \qquad \mathrm{ord}_2(P_1 \cdot P_2) \leqslant \mathrm{ord}_2(P_1) + \mathrm{ord}_2(P_2), \quad (2.3)$$

см. [44; лемма 2.8] или [45; п. 3.3.1, лемма 14] для доказательства первого равенства; второе неравенство очевидно, более того, $HT_2(P_1 \cdot P_2) = HT_2(P_1) \cdot HT_2(P_2)$ при условии $HT_2(P_1) \cdot HT_2(P_2) \neq 0$.

Определение 4. Будем говорить, что оператор $Q = \sum q_{ij}\,\partial_1^i\,\partial_2^j \in \widehat{E}_+$ *удовлетворяет условию* $A_1(m)$, если $\mathrm{ord}_M(q_{ij}) \geqslant i + j - m$ для всех (i, j).

Будем говорить, что оператор $P \in \widehat{D}$, $P = \sum p_{ij}\,\partial_1^i\,\partial_2^j$ с порядком $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$ *удовлетворяет условию* A_1, если он удовлетворяет $A_1(k + l)$.

Легко видеть, что кольцо $\widehat{D}$ состоит из операторов, удовлетворяющих условиям $A_1(m)$ для некоторых m. Подмножество

$$\Pi = \{P \in \widehat{E}_+ \mid \exists\, m \in \mathbb{Z}_+ \text{ такое, что } P \text{ удовлетворяет } A_1(m)\} \qquad (2.4)$$

– ассоциативное подкольцо с единицей (см. [44; следствие 2.2]). Функция порядка **ord** очевидным образом расширяется на Π, и это расширение обладает такими же свойствами, как в лемме 1, что следует из тех же соображений.

Определение 5. Кольцо коммутирующих операторов $B \subset \widehat{D}$ называется *квазиэллиптическим*, если оно содержит два монических оператора P, Q таких, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $k \geqslant 1$.

Кольцо B называется 1-*квазиэллиптическим*, если P, Q удовлетворяют условию A_1. В этом случае $\mathbf{ord}(P) = k$, $\mathbf{ord}(Q) = 1 + l$.

Основные достоинства 1-квазиэллиптических колец таковы: они целые (см. [44; теорема 3.2]), для них имеется аналог теории Шура ([45; гл. 3]), Γ-порядок определен на всех элементах этих колец (см. [25; лемма 2.3]), тем самым функция $-\mathrm{ord}_\Gamma$ является дискретным нормированием ранга два (т.е. значения нормирования лежат в группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с анти-лексикографическим порядком). Более того, эти кольца обладают следующим важным свойством (ср. [24; теорема 2.1]).

Лемма 2. *Пусть B – 1-квазиэллиптическая коммутативная подалгебра в $\widehat{D}$. Тогда естественное отображение*

$$\Phi\colon\ \mathrm{gr}(\widehat{D}) \to \mathrm{gr}(\widehat{D})/x_1\,\mathrm{gr}(\widehat{D}) + x_2\,\mathrm{gr}(\widehat{D}) \simeq k[\xi_1, \xi_2]$$

индуцирует вложение векторных пространств при ограничении на $\mathrm{gr}(B)$. *А* B*-модуль* $F = \widehat{D}/x_1\widehat{D} + x_2\widehat{D} \simeq k[\partial_1, \partial_2]$ (*спектральный модуль*) *не имеет кручения.*

В частности, функция $-\mathbf{ord}$ *индуцирует дискретное нормирование ранга* 1 *на* B *и на его поле частных* $\mathrm{Quot}(B)$. *Более того,* $\mathbf{ord}(P) = k + l$, *где* $(k, l) = \mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(P))$, $P \in B$.

Доказательство. В силу [44; леммы 2.9–2.11] и [44; следствие 3.1] существует обратимый оператор $S \in \widehat{E}_+$, удовлетворяющий условию A_1, порядка $\mathrm{ord}_2(S) = 0$ с обратимым членом $HT_2(S) \in \widehat{D}_1$ такой, что $SBS^{-1} \subset \widehat{E}_+$ – подалгебра операторов с постоянными коэффициентами (в частности, $S \in \Pi$). Точнее, S имеет вид $S = fS_1S_2$, где $f \in k[[x_1, x_2]]$ – обратимая функция, $S_1 \in \widehat{D}_1$ – обратимый оператор такой, что $[\partial_1, S_1] = 0$, и $S_2 = 1 + S_2^-$, где $S_2^- \in \widehat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\,\partial_2^{-1}$.

Так как S обратим, для любого ненулевого элемента $Q \in B$ справедливо, что $\mathbf{ord}(SQS^{-1}) = \mathbf{ord}(Q)$. Но символ оператора SQS^{-1} имеет постоянные коэффициенты, следовательно, образ $\sigma'(Q)$ символа $\sigma(Q)$ в $k[\partial_1, \partial_2]$ не равен нулю. Действительно, с одной стороны имеется равенство $HT_2(\sigma(S) \times \sigma(Q) \cdot \sigma(S)^{-1}) = HT_2(\sigma(S)) \cdot HT_2(\sigma(Q)) \cdot HT_2(\sigma(S)^{-1})$. С другой стороны, $HT_2(\sigma(S) \cdot \sigma(Q) \cdot \sigma(S)^{-1}) = c_1\,\partial_1^m$, $\sigma(S) = c_2 \cdot \sigma(S_1) \cdot \sigma(S_2)$ для некоторых $c_i \in k^*$ и $HT_2(\sigma(S)) = c_2 \cdot \sigma(S_1)$. Значит, $HT_2(\sigma(Q)) = c_2^{-1} \cdot \sigma(S_1)^{-1} \cdot c_1\,\partial_1^m \cdot c_2 \cdot \sigma(S_1) = c_1\,\partial_1^m$, т.е. $\sigma'(Q) \neq 0$ в $k[\partial_1, \partial_2]$. Таким образом, $\mathrm{gr}(B)$ вкладывается в $k[\partial_1, \partial_2]$ и F – B-модуль без кручения, поскольку для любого ненулевого элемента $f \in F$ $f \cdot S \neq 0$ и для любого ненулевого $b \in B$ имеет место $f \cdot b = fS^{-1}(SbS^{-1})S \neq 0 \mod(x_1, x_2)$.

Для некоторых 1-квазиэллиптических колец возможно определить понятие ранга.

Определение 6. Определим для 1-квазиэллиптического коммутативного кольца $B \subset \widehat{D}$ числа $\widetilde{N}_B$ и N_B следующим образом:

$$N_B = GCD\{\mathrm{ord}_2(b)\colon b \in B,\ \mathrm{ord}_\Gamma(b) = (0, \mathrm{ord}_2(b)),\ \mathbf{ord}(b) = \mathrm{ord}_2(b)\},$$
$$\widetilde{N}_B = GCD\{\mathbf{ord}(b) \mid b \in B\}.$$

Будем говорить, что кольцо B *строго допустимо*, если $\widetilde{N}_B = N_B$. В этом случае определим ранг B как $\mathrm{rk}(B) = N_B = \widetilde{N}_B$.

Это определение эквивалентно определению в [44; определения 3.5–3.8] в силу [44; теорема 3.2]. Основанием для введения понятия 1-квазиэллиптического строго допустимого кольца было следующее свойство достаточно большого класса коммутативных колец дифференциальных операторов (см. [44; лемма 2.6, свойство 2.4]): если B содержит два оператора P, Q таких, что функция $\sigma(P)^{\mathbf{ord}Q}/\sigma(Q)^{\mathbf{ord}P}$ непостоянна на прямой $\mathbb{P}^1$, то после почти любой линейной замены переменных кольцо B становится 1-квазиэллиптическим строго допустимым.

Согласно [44; теорема 3.4] конечно порожденные коммутативные 1-квазиэллиптические строго допустимые кольца ранга r классифицируются в терминах геометрических спектральных данных ранга r (ниже мы дадим упрощенное точное определение данных ранга 1), которые состоят, в частности, из проективной поверхности (обычно очень особой), обильного неприводимого $\mathbb{Q}$-Картье дивизора, регулярной точки на дивизоре и поверхности, и из пучка без кручения с некоторыми условиями на когомологии.

Эти геометрические объекты можно легко определить: для заданного кольца B определим $\widetilde{B}$ – алгебру Риса относительно фильтрации, задаваемой функцией $\mathbf{ord}$. Тогда спектральная поверхность $X = \operatorname{Proj} \widetilde{B}$, дивизор $C \simeq \operatorname{Proj}(\operatorname{gr}(B))$ соответствует дискретному нормированию $-\mathbf{ord}$, спектральный пучок $\mathscr{F} = \operatorname{Proj} \widetilde{F}$, где $\widetilde{F}$ – модуль Риса, определенный относительно фильтрации, определенной функцией $\mathbf{ord}$, Proj обозначает пучок, ассоциированный с градуированным модулем, точка p – центр дискретного нормирования ранга $2\nu_B$, определенного как $\nu_B(P) := (k, -\mathbf{ord})$, где $(k,l) = \operatorname{ord}_\Gamma(\sigma(P))$ для $P \in B$ (см. доказательство теоремы 1 ниже).

Спектральный пучок играет решающую роль в этой классификации; он имеет следующие общие свойства:

– он квазикогерентен, и может быть некогерентен (см. [24; упражнение 3.4]);

– если он когерентен, то его ранг больше или равен рангу кольца (рангу данных) [24; замечание 3.3] (есть некоторые достаточные условия на кольцо дифференциальных операторов, гарантирующие когерентность спектрального пучка, см. [24; свойство 3.3] и [24; теорема 2.1] или [45; теорема 18], где изложена версия с исправленными неточностями);

– он когерентен, ранга равного рангу кольца, если и только если индекс самопересечения обильного дивизора равен рангу кольца (см. [24; свойство 3.2]).

В случае когда B-модуль F из леммы 2 конечно порожден, имеется следующая естественная интерпретация, аналогичная случаю колец дифференциальных операторов из [24; теорема 2.1].

Предложение 1. *Пусть $B \subset \widehat{D}$ – конечно порожденная 1-квазиэллиптическая коммутативная подалгебра такая, что модуль F конечно порожден.*

Для всякого характера $B \xrightarrow{\chi} k$ (т.е. для гомоморфизма алгебр) рассмотрим векторное пространство

$$\mathsf{Sol}(B,\chi) := \bigl\{ f \in k[[x_1,x_2]] \mid P \diamond f = \chi(P) f \ \text{для всех } P \in B \bigr\}. \tag{2.5}$$

Тогда существует канонический изоморфизм векторных пространств

$$F\big|_\chi := F \otimes_B \bigl(B/\operatorname{Ker}(\chi)\bigr) \cong \mathsf{Sol}(B,\chi)^*, \tag{2.6}$$

сопоставляющий классу $\overline{\partial_1^{p_1}\,\partial_2^{p_2}} \in F\big|_\chi$ линейный функционал

$$f \mapsto \frac{1}{p_1!\,p_2!}\,\frac{\partial^{p_1+p_2} f}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}}\bigg|_{(0,0)}$$

на векторном пространстве $\mathsf{Sol}\bigl(B,\chi\bigr)$. В частности, $\dim_k(\mathsf{Sol}(B,\chi)) < \infty$ для любого χ.

Доказательство дословно совпадает с доказательством в [4; теорема 4.5, 2], ср. [24; замечание 2.3].

Предложение 1 позволяет дать другую версию определения ранга коммутативной подалгебры $B \subset \widehat{D}$: обозначим через $\mathbf{rk}(B)$ ранг модуля F. Имея в виду свойства спектрального пучка, упомянутые выше, мы можем теперь определить, что мы будем понимать под коммутативными подалгебрами ранга 1 в $\widehat{D}$.

Определение 7. Будем говорить, что коммутативная конечно порожденная подалгебра $B \subset \widehat{D}$ – *алгебра ранга* 1, если она 1-квазиэллиптическая строго допустимая и $\mathbf{rk}(B) = 1$.

Как будет показано позже в следствии 1, последнее свойство эквивалентно следующему:

$$\dim_k B_m \sim \frac{m^2}{2},$$

где $B_m = \{P \in B,\, \mathbf{ord}(P) \leqslant m\}$ и $\sim$ означает, что функция $(\dim_k B_m) - m^2/2$ – линейный по m полином.

Напомним, что коммутативные алгебры были классифицированы в [44] с точностью до следующей эквивалентности.

Определение 8. Коммутативные 1-квазиэллиптические алгебры B_1, $B_2 \subset \widehat{D}$ эквивалентны, если существует обратимый оператор $S \in \widehat{D}_1$ вида $S = f + S^-$, где $S^- \in \widehat{D}_1 \partial_1$, $f \in k[[x_1, x_2]]^*$ такой, что $B_1 = S B_2 S^{-1}$.

В каждом классе эквивалентности есть нормализованное кольцо; см. [44; лемма 2.10].

Определение 9. Будем говорить, что коммутативное 1-квазиэллиптическое кольцо $B \subset \widehat{D}$ нормализовано, если оно содержит пару операторов P, Q порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ вида

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-2} p_s\, \partial_2^s, \qquad Q = \partial_1\, \partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q_s\, \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \widehat{D}_1$.

В силу [25; замечание 2.11] два эквивалентных нормализованных кольца отличаются на специальную линейную замену переменных вида[1]

$$\partial_2 \mapsto \partial_2 + c\,\partial_1 + b, \qquad \partial_1 \mapsto \partial_1 + d, \qquad x_1 \mapsto x_1 - c x_2, \qquad x_2 \mapsto x_2, \tag{2.7}$$

где $c, b, d \in k$.

Объясним теперь, что такое соответствующие алгебре ранга 1 спектральные данные ранга 1. В случае спектральных данных с когерентным спектральным пучком ранга 1 определение из работы [44] можно упростить (ср. [25; п. 2.1]). Введем следующее обозначение:

[1]Отметим, что линейные замены $\partial_1 \mapsto a\,\partial_1 + b\,\partial_2$ или $x_i \mapsto x_i + b$ с $k \ni b \neq 0$ недопустимы в кольце $\widehat{D}$.

– $T = \operatorname{Spec} k[[u,t]] \supset T_1 = \operatorname{Spec} k[[u]]$ (определяется уравнением $t=0$);
– $O = \operatorname{Spec}(k) \in T_1$;
– $R = k[[u,t]]$, $\mathscr{M} = (u,t) \subset R$.

Определение 10. *Когерентные геометрические данные ранга* 1 – это тройка $(X, j, \mathscr{F})$, где X – целая проективная поверхность,

$$j\colon T \to X$$

– доминантный k-морфизм и $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$ – когерентный подпучок ранга 1, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $j_*(T_1) = C \subset X$ – кривая[2] и $p = j(O)$ – точка, регулярная на C и на X;

2) $T_1 \times_X \{p\} = \{O\}$, $T \times_X C = T_1$ (расслоенное произведение является подсхемой T, и T_1 – эффективный дивизор Картье на T);

3) существует эффективный очень обильный дивизор Картье $C' \subset X$ с циклом $Z(C') = dC$, и для всех $n \geqslant 0$ индуцированное (вложением $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$) отображение

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{F}(nC')) &\to H^0(X, j_*\mathscr{O}_T(nC')) = H^0(T, \mathscr{O}_T(ndT_1)) \\ &= Rt^{-nd} \to Rt^{-nd}/\mathscr{M}^{nd+1}t^{-nd} \end{aligned} \tag{2.8}$$

– изоморфизм.

Замечание 2. Непосредственно из определения 10 следует, что кривая C не принадлежит особому локусу поверхности X. По [24; теорема 3.2] поверхность X коэно-маколеева вдоль C. В силу [24; следствие 3.1] пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C, поэтому он локально свободен во всех регулярных точках кривой C, принадлежащих неособому локусу X.

По [44; теорема 3.4] когерентные спектральные данные ранга 1 соответствуют конечно порожденной коммутативной k-алгебре ранга 1 в $\widehat{D}$.

Как следует из [44; теорема 4.1], каждая коммутативная подалгебра в $\widehat{D}$ может быть продолжена до коэно-маколеевой подалгебры, таким образом, можно дополнительно предположить, что X коэно-маколеева (CM) поверхность. Спектральный пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев, если $B \subset D$, по [25; теорема 3.1]. В общем случае это неверно; см. [4; замечание 6.2.1] (там он задан в терминах пар Шура).

Из асимптотической теоремы Римана–Роха следует, что $C^2 = 1$; см. [25; замечание 2].

Определение 11. *Редуцированными геометрическими данными ранга* 1 называются данные $(X, C, p, \mathscr{F})$, где:

1) X – целая проективная поверхность;

2) C – приведенный неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X, и поверхность X коэно-маколеева вдоль C;

3) $p \in C$ – замкнутая k-точка, регулярная на C и на X;

[2] Для морфизма нётеровых схем $f\colon X \to Y$ и замкнутой подсхемы $Z \subset X$ через $f_*Z \subset Y$ обозначается замкнутая подсхема (автоматически целая), определенная идеалом $\ker(\mathscr{O}_Y \xrightarrow{f^*} f_*\mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Z)$.

4) $\mathscr{F}$ – когерентный пучок без кручения ранга 1 на X, являющийся коэномаколеевым вдоль C и удовлетворяющий следующим условиям. Пусть $\widehat{\mathscr{O}}_{X,p} \simeq k[[u,t]]$ – изоморфизм локальных алгебр, выбранный таким образом, что t соответствует формальному локальному уравнению кривой C в точке p. Пусть $\varphi\colon \widehat{\mathscr{F}_p} \simeq k[[u,t]]$ – изоморфизм $\widehat{\mathscr{O}}_{X,p}$-модулей (тривиализация). В силу п. 2) существует минимальное натуральное число d такое, что $C' = dC$ – очень обильный дивизор Картье на X. Пусть $\gamma_n\colon H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \hookrightarrow \mathscr{F}(nC')_p$ – вложение (это вложение, поскольку $\mathscr{F}(nC')$ является квазикогерентным пучком без кручения на X). Пусть $\varepsilon_n\colon \mathscr{F}(nC')_p \to \mathscr{F}_p$ – естественный изоморфизм $\mathscr{O}_{X,p}$-модулей, заданный умножением на элемент $f^{nd} \in \mathscr{O}_{X,p}$, где $f \in \mathscr{O}_{X,p}$ – локальное уравнение кривой C в точке p. Пусть $\tau_n\colon k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{nd+1}$ – естественный эпиморфизм колец. Мы требуем, чтобы отображения

$$\tau_n \circ \varphi \circ \varepsilon_n \circ \gamma_n\colon H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \to k[[u,t]]/(u,t)^{nd+1}$$

были изоморфизмами для всех $n \geqslant 0$. (Эти условия на отображение φ не зависят от выбора тривиализации, от выбора изоморфизма локальных колец с данным свойством и от выбора подходящего элемента f.)

Замечание 3. Если фиксировать изоморфизм $\widehat{\mathscr{O}}_{X,p} \simeq k[[u,t]]$ и тривиализацию φ в определении 11, то мы получим геометрические данные ранга 1 в смысле [44; определение 3.10]. Это определение эквивалентно определению 10; см. [25; п. 2.1.1].

Определение 12. Два набора $(X_1, C_1, p_1, \mathscr{F}_1)$, $(X_2, C_2, p_2, \mathscr{F}_2)$ геометрических данных ранга 1 *изоморфны*, если существует изоморфизм поверхностей $\beta\colon X_1 \to X_2$ и изоморфизм $\psi\colon \mathscr{F}_2 \to \beta_* \mathscr{F}_1$ пучков на поверхности X_2 такой, что $\beta|_{C_1}\colon C_1 \to C_2$ – изоморфизм кривых и $\beta(p_1) = p_2$.

Для формулировки главной теоремы этого параграфа нам понадобится следующий общий вид линейной замены переменных:

$$\partial_2 \mapsto a\,\partial_2 + c\,\partial_1 + b, \qquad \partial_1 \mapsto e\,\partial_1 + d, \qquad x_1 \mapsto e^{-1}x_1 - cx_2, \qquad x_2 \mapsto a^{-1}x_2, \tag{2.9}$$

где $a, e \in k^*$, $b, c, d \in k$.

Теорема 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между*:

1) *множеством коммутативных нормализованных конечно порожденных алгебр ранга* 1 *с точностью до линейных замен переменных вида* (2.9) *в алгебре* $\widehat{D}$;

2) *множеством классов изоморфных редуцированных геометрических данных ранга* 1.

Доказательство. Доказательство этой теоремы по существу следует из [44; теорема 3.4] вместе с [24; следствие 3.1, свойства 3.2, 3.3] и [25; замечание 2.11]. Для удобства изложения приведем здесь основные моменты доказательства, которые также понадобятся нам в следующем параграфе.

1. В одну сторону соответствие строится следующим образом. Любая линейная замена вида (2.9) является композицией линейной замены вида (2.7) и линейной замены $\partial_1 \mapsto e\,\partial_1$, $\partial_2 \mapsto a\,\partial_2$. Как уже было упомянуто выше

(см. [25; замечание 2.11]), класс эквивалентности любой коммутативной нормализованной конечно порожденной алгебры B ранга 1 определяется линейными заменами переменных вида (2.7). По [44; теорема 3.2] этот класс (взаимно однозначно) соответствует классу эквивалентности пар Шура (A,W), т.е. пар подпространств в кольце $k[z_1^{-1}]((z_2))$, причем A является алгеброй, изоморфной B, а W является A-модулем, изоморфным[3] F. Доказательство теоремы 3.2 в [44] конструктивно; пространства A и W получаются следующим образом: $A=S^{-1}BS$, $W=F\cdot S$, где S – монический оператор специального вида, удовлетворяющий условию роста A_1. Он определяется по паре нормализованных операторов из B (см. [44; § 2.3.4]) при помощи аналога теоремы Шура в размерности 1 (см. [44; лемма 2.11]). Если выбрать другую пару нормализованных операторов из B, то новая пара Шура будет эквивалентна прежней. Линейная замена $\partial_1\mapsto e\,\partial_1$, $\partial_2\mapsto a\,\partial_2$ индуцирует автоморфизм $z_1\mapsto e^{-1}z_1$, $z_2\mapsto a^{-1}z_2$ кольца $k[z_1^{-1}]((z_2))$ и соответствующей пары Шура. Отметим также, что пара Шура (A,W) строго допустима в смысле определения 3.12 из [44], таким образом, для нее выполняются условия теоремы 3.3 из [44], так как B строго допустима.

Пары Шура из [44; теорема 3.2] взаимно однозначно соответствуют парам подпространств в пространстве $k[[u]]((t))$ посредством изоморфизма

$$\psi_1\colon k[z_1^{-1}]((z_2))\cap\Pi\simeq k[[u]]((t)),\qquad z_2\mapsto t,\, z_1^{-1}\mapsto ut^{-1}, \tag{2.10}$$

где $k[z_1^{-1}]((z_2))\cap\Pi$ обозначает k-подпространство, порожденное рядами, удовлетворяющими условию A_1 (см. [44; следствие 3.3]). Мы будем обозначать эти пары теми же буквами: (A,W). Ясно, что $A\cdot W\subset W$.

Пространство $k[[u]]((t))$ – подпространство двумерного локального поля $k((u))((t))$, на котором определено следующее дискретное нормирование ранга $2\nu\colon k((u))((t))^*\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$:

$$\nu(f)=(m,l),\quad \text{если}\quad f=t^lu^mf_0,\quad \text{где}\quad f_0\in k[[u]]^*+tk((u))[[t]].$$

(Здесь $k[[u]]^*$ означает множество обратимых элементов в кольце $k[[u]]$.) Определим также дискретное нормирование ранга 1:

$$\nu_t(f)=l.$$

Нормирование ν_t индуцирует фильтрацию на пространствах A,W, и мы будем обозначать через $\widetilde{A}$, $\widetilde{W}$ ассоциированные алгебру Риса и модуль Риса соответственно.

Согласно [44; теорема 3.3] пара Шура (A,W) соответствует алгебро-геометрическим данным, состоящим из целой проективной поверхности $X\simeq\operatorname{Proj}\widetilde{A}\simeq\widetilde{B}$, редуцированного неприводимого обильного $\mathbb{Q}$-Картье дивизора $C\simeq\operatorname{Proj}(\operatorname{gr}(A))\simeq\operatorname{Proj}(\operatorname{gr}(B))$, регулярной точки $p\in C$, являющейся центром нормирования ν на A (или, эквивалентно, центром нормирования ν_B на B,

[3] Пары Шура в размерности 1 были введены в работе [29] (см. также обзор [30]), где с их помощью была переписана классификация коммутативных алгебр обыкновенных дифференциальных операторов.

определенным как $\nu_B(P) = (k - \mathrm{ord}(P))$, где $(k,l) = \mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(P)))$, вложения локальных k-алгебр $\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_{X,p} \to k[[u,t]]$ и квазикогерентного спектрального пучка $\mathscr{F} \simeq \mathrm{Proj}(\widetilde{W}) \simeq \mathrm{Proj}\,\widetilde{F}$ вместе с вложением $\mathscr{O}_{X,p}$-модулей $\varphi\colon \mathscr{F}_p \hookrightarrow k[[u,t]]$ таким, что естественные отображения (определенные так же, как в определении 11) $H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndr+1}$, где $r = rk(B)$, являются изоморфизмами для всех $n \geqslant 0$. Очевидно, что композиция изоморфизма $z_1 \mapsto e^{-1}z_1$, $z_2 \mapsto a^{-1}z_2$ с ψ_1 сохраняет нормирование ν. Следовательно, алгебро-геометрические данные, соответствующие паре Шура, возникающей после применения этого изоморфизма, будут иметь изоморфную прежней поверхность, дивизор, точку и пучок, но другие вложения π и φ (т.е. локальные координаты u, t изменятся). Заметим, что получающиеся данные не будут изоморфны в общем случае исходным данным, однако изоморфизмы из п. 4) определения 11 будут иметь место для обоих данных. Таким образом, если мы покажем, что спектральный пучок когерентен и ранга 1, то редуцированные геометрические данные будут изоморфны.

Покажем, что пучок $\mathscr{F}$ когерентен и что $r = rk(B) = 1$. Напомним, что каждым геометрическим данным $(X, C, p, \mathscr{F}_1, \pi, \varphi_1)$, где X, C, p, π определены, как выше, и $\mathscr{F}_1$ – пучок без кручения, снабженный вложением $\mathscr{O}_{X,p}$-модулей $(\mathscr{F}_1)_p \hookrightarrow k[[u,t]]$ (например, коэно-маколеев пучок ранга 1, см. [25; замечание 2.5]), можно сопоставить пару подпространств (по существу аналог пары Шура)

$$W^1, A \subset k[[u]]((t)),$$

где A – подалгебра с фильтрацией в $k[[u]]((t))$ и W^1 – фильтрованный следующим образом A-модуль (ср. [25; § 2.2, 2.4]; эта конструкция, предложенная изначально в работах [38], [39] была затем усовершенствована в статьях [36], [33], [44]).

Пусть f^d – локальная образующая идеала $\mathscr{O}_X(-C')_p$, где $C' = dC$ – очень обильный дивизор Картье. Тогда $\nu(\pi(f^d)) = (0, r^d)$ в кольце $k[[u,t]]$ и, следовательно, $\pi(f^d)^{-1} \in k[[u]]((t))$. Таким образом, имеются естественные вложения для всякого $n > 0$

$$H^0(X, \mathscr{F}_1(nC')) \hookrightarrow \mathscr{F}_1(nC')_p \simeq f^{-nd}(\mathscr{F}_{1p}) \hookrightarrow k[[u]]((t)),$$

где последнее вложение – это вложение $f^{-nd}\mathscr{F}_{1p} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} f^{-nd}k[[u,t]] \hookrightarrow k[[u]]((t))$. Следовательно, имеется вложение

$$\chi_1\colon H^0(X \setminus C, \mathscr{F}_1) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathscr{F}_1(nC')) \hookrightarrow k[[u]]((t)).$$

Определим пространство W^1 как $\chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{F}_1))$. Аналогичным образом определим вложение $H^0(X \setminus C, \mathscr{O}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (которое мы также обозначим через χ_1). Положим $A \overset{\mathrm{def}}{=} \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{O}))$.

Фильтрация на пространствах W^1, A – это фильтрация, индуцированная нормированием ν_t, а именно

$$A_n = A \cap t^{-nr}k[[u]][[t]], \qquad W^1_n = W^1 \cap t^{-nr}k[[u]][[t]].$$

Лемма 3. *Пусть* $B \subset \widehat{D}$ *– коммутативная нормализованная конечно порожденная алгебра ранга* 1, *и пусть* F *– ее спектральный модуль. Тогда пучок* $\mathscr{F} = \operatorname{Proj}\widetilde{F}$, *где* $\widetilde{F} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} F_i \cdot s^i$, *когерентный ранга* 1, *и* $\operatorname{rk}(B) = 1$.

Доказательство. Обозначим через W подпространство, соответствующее модулю F, и пусть F порождается элементами $f_1, \dots, f_m$ как B-модуль. Обозначим через $f_{1,s_1}, \dots, f_{m,s_m}$ соответствующие однородные элементы в $\widetilde{B}$, где $s_i = \mathbf{ord}(f_i)$. Рассмотрим градуированный $\widetilde{B}$-подмодуль $\widetilde{F}'$ модуля $\widetilde{F}$, порожденный элементами $s, f_{1,s_1}, \dots, f_{m,s_m}$. Заметим, что $H^0(X \setminus C, \mathscr{F}) \simeq \widetilde{F}_{(s)} \simeq F$. Значит, пучок $\mathscr{F}' = \operatorname{Proj}\widetilde{F}'$ – когерентный пучок без кручения ранга 1 (так как $\mathbf{rk}B = 1$). Рассмотрим его коэно-маколеевизацию $\mathscr{F}_1 = CM(\mathscr{F}')$ (см., например, [24; замечание 5.2]). Это также когерентный пучок без кручения ранга 1, который содержит $\mathscr{F}'$ как подпучок. В частности, существует расширение вложения $\mathscr{O}_{X,p}$-модулей $\varphi|_{\mathscr{F}'}\colon (\mathscr{F}')_p \hookrightarrow k[[u,t]]$ (индуцированное вложением $\varphi\colon (\mathscr{F})_p \hookrightarrow k[[u,t]]$) на модуль $(\mathscr{F}_1)_p$. Обозначим через W^1 подпространство, соответствующее пучку $\mathscr{F}_1$ относительно этого вложения. Тогда $W^1 \supset W$ и $W^1_{nd} \supset W_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$. Из [25; замечания 2.6, 2.7] вместе с [25; лемма 2.1] следует, что $H^0(X, \mathscr{F}_1(nC')) \simeq W^1_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$. В частности, градуированный $\widetilde{A}$-модуль $\bigoplus_{i=0}^{\infty} W_i$ – подмодуль конечно порожденного $\widetilde{A}$-модуля $\bigoplus_{i=0}^{\infty} W^1_i$. Значит, он конечно порожден, и $\mathscr{F}$ – когерентный пучок ранга 1.

Наконец, $\operatorname{rk}(B) = 1$ в силу [24; замечание 3.3].

Поверхность X коэно-маколеева вдоль C по [24; теорема 3.2]. Пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C по [24; следствие 3.1]. Таким образом, всякая конечно порожденная нормализованная алгебра ранга 1 с точностью до линейной замены переменных (2.9) определяет редуцированные геометрические данные ранга 1 с точностью до изоморфизма.

2. В другую сторону соответствие устанавливается проще. Если фиксировать некоторую тривиализацию $\varphi\colon \widehat{\mathscr{F}_p} \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{X,p} \simeq k[[u,t]]$, где параметр t соответствует формальному локальному уравнению кривой C в точке p, то мы получим алгебро-геометрические данные из [44; теорема 3.3] (отметим, что не каждая тривиализация задает данные в смысле [44], условие на t важно). По этой теореме данные соответствуют паре Шура ранга 1, которая в свою очередь соответствует нормализованной конечно порожденной алгебре ранга 1 по обобщенной теореме Сато (см. [44; теорема 3.1]): $B := SAS^{-1}$, где S – оператор Сато из этой теоремы, который однозначно определяется по пространству W пары Шура.

Другая тривиализация (удовлетворяющая условию на t) отличается от выбранной на автоморфизм кольца $k[[u,t]]$, сохраняющий нормирование ν (отметим, что все возможные непрерывные автоморфизмы кольца $R((u))((t))$, где R – произвольное коммутативное кольцо, описаны в работах [34], [35]). Каждая такая тривиализация является композицией автоморфизма h вида

$$h(u) = u \mod(u^2) + (t), \qquad h(t) = t \mod(ut) + (t^2),$$

и автоморфизма вида $u \mapsto c_1 u$, $t \mapsto c_2 t$, $c_1, c_2 \in k^*$. Применяя автоморфизм первого вида, получаем изоморфные алгебро-геометрические данные (ср. [25;

определение 2.4, замечание 2.4]), соответствующие эквивалентной нормализованной конечно порожденной алгебре ранга 1, которая отличается от исходной на линейную замену переменных (2.7).

Проходя в обратном направлении через эквивалентности, описанные выше в пункте 1, легко видеть, что замена локальных координат в точке p вида $u \mapsto c_1 u$, $t \mapsto c_2 t$ приводит к паре Шура, получаемой из исходной пары применением того же изоморфизма $u \mapsto c_1 u$, $t \mapsto c_2 t$. Но тогда соответствующая алгебра будет получаться применением изоморфизма вида (2.9). Лемма доказана.

§ 3. Пре-спектральные данные и пре-пары Шура

В этом параграфе мы усовершенствуем конструкции из § 2. В частности, мы вводим понятие пре-спектральных данных и показываем, что они могут быть расширены до спектральных данных. Тем самым мы сводим задачу нахождения примеров коммутативных подалгебр в алгебре $\widehat{D}$ к чисто алгебро-геометрической проблеме.

Определение 13. *Пре-спектральные данные ранга* 1 представляют собой тройку $(X, C, \mathscr{F})$, состоящую из следующих объектов:

1) X – приведенная неприводимая проективная алгебраическая поверхность над k;

2) C – приведенный неприводимый дивизор Вейля, не содержащийся в особом локусе поверхности X, который также является обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором;

3) поверхность X коэно-маколеева вдоль C;

4) $\mathscr{F}$ – когерентный пучок без кручения ранга 1 на X, коэно-маколеев вдоль C и такой, что

$$h^0(X, \mathscr{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2}$$

при $n \geqslant 0$ и $h^0(X, \mathscr{F}(nC')) = 0$ при $n < 0$, где $C' = dC$ – обильный дивизор Картье на X.

Замечание 4. Вначале отметим, что, выбрав подходящую тривиализацию $\widehat{\mathscr{F}_p} \simeq k[[u,t]]$ спектрального пучка из определения 11, получим, что подпространства пары Шура будут принадлежать полю $K \subset k[[u]]((t))$, где K обозначает поле рациональных функций поверхности X, вложенное посредством изоморфизма из определения 11, 4). А именно, $W, A \subset \varinjlim_{n>0} f^{-n}\mathscr{O}_{X,p} \subset K$, и это вложение не зависит от выбора локальной образующей f. Аналогичные подпространства определены для любой точки $Q \in C$, регулярной на C и на X, если выбрать некоторую тривиализацию $\mathscr{F}_Q \simeq \mathscr{O}_{X,Q}$. Как было показано в [25; п. 2.4] (см. также доказательство теоремы 1), конструкция подпространств W, A с похожими свойствами определена для любого когерентного пучка без кручения ранга 1, локально свободного на открытом плотном подмножестве кривой C. В частности, такие подпространства определены также для пре-спекральных данных ранга 1.

Пару подпространств, ассоциированную с пре-спектральными данными и регулярной на X и C точкой Q, описанную выше, мы будем называть *пре-парой Шура* (A_Q, W_Q), *ассоциированной с пре-спектральными данными ранга* 1.

Пусть $(X, C, \mathscr{F})$ – пре-спектральные данные ранга 1. Для любой точки Q кривой C, регулярной на C и на X, в [25; п. 2.4] были определены пучки без кручения $\mathscr{F}_i$, $\mathscr{B}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, как $\mathscr{F}_i = \mathrm{Proj}(\widetilde{W_Q(i)})$, $\mathscr{B}_i = \mathrm{Proj}(\widetilde{A}_Q(i))$ со свойствами: $\mathscr{B}_i \subset \mathscr{B}_{i+1}$, $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_{i+1}$, $\mathscr{F}_0 \simeq \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_{id} \simeq \mathscr{F}(iC')$, $\mathscr{B}_{id} \simeq \mathscr{O}_X(iC')$ для любого[4] $i \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{B}_i|_C \simeq \mathscr{B}_i/\mathscr{B}_{i-1}$, $(\mathscr{F}_i)|_C \simeq \mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1}$. В силу [25; лемма 2.1, замечание 2.7] $(A_Q)_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{O}_X(nC'))$ и $(W_Q)_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$; в частности, $(A_Q)_0 \simeq (W_Q)_0 \simeq k$. Поскольку подпространства $(W_Q)_i$ определены с помощью дискретного нормирования ν_C, пучки $\mathscr{B}_i$, $\mathscr{F}_i$, определенные по разным точкам, канонически изоморфны.

Теорема 2. *Пусть $(X, C, \mathscr{F})$ – пре-спектральные данные ранга* 1. *Тогда C – дивизор Картье.*

Доказательство. 1. Докажем сначала, что пучки $\mathscr{B}_i|_C$ локально свободны. Выберем изоморфизм $\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_{X,Q} \simeq k[[u,t]]$ как в определении 11, 4). В [24; п. 3.5] была описана еще одна конструкция для построения обобщенных пар Шура. Эта конструкция сопоставляет данным $(X, C, \mathscr{O}_X, Q)$ подпространство $\mathbb{A}$ в поле $k((u))((t))$ со следующими свойствами (см. также [25; п. 2.6]): $\mathbb{A}$ является k-подалгеброй, изоморфной $\Gamma(X \setminus C, \mathscr{O}_X)$; для $0 \leqslant i < d$, $n \in \mathbb{Z}$ k-подпространства

$$\mathbb{A}(nd+i) = \frac{\mathbb{A} \cap t^n k((u))[[t]]}{\mathbb{A} \cap t^{n+1} k((u))[[t]]}$$

являются образами квинтетов $(C, Q, \mathscr{B}_i(nC')|_C, u, \varphi)$ при отображении Кричевера в k-подпространстве $\dfrac{t^n k((u))[[t]]}{t^{n+1}k((u))[[t]]} \simeq k((u))$, где φ – некоторые тривиализации пучков $\mathscr{B}_i(nC')|_C$ в точке Q кривой C. В частности, так как $\mathscr{B}_{nd}|_C$ – обратимые пучки, подпространства $\mathbb{A}(nd)$ фредгольмовы, т.е.

$$\dim_k \mathbb{A}(nd) \cap k[[u]] < \infty, \qquad \dim_k \frac{k((u))}{\mathbb{A}(nd) + k[[u]]} < \infty,$$

и $\mathbb{A}(0) \simeq \Gamma(C \setminus Q, \mathscr{O}_C)$. Поскольку для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{A}(k) \cdot \mathbb{A}(l) \subseteq \mathbb{A}(k+l)$, отсюда следует, что для любого $0 \leqslant i < d$ подпространства $\mathbb{A}(nd+i)$ либо нулевые для всех $n \in \mathbb{Z}$, либо фредгольмовы, т.е. $\mathscr{B}_i(nC')|_C$ – пучки без кручения ранга 1. По асимптотической теореме Римана–Роха $\chi(X, \mathscr{O}_X(nC')) \sim d^2n^2/2$, откуда следует, что $\mathbb{A}(nd+i)$ не могут быть одновременно нулевыми. Выбирая подходящий параметр t, мы можем варьировать подпространства $\mathbb{A}(n)$. В частности, мы можем фиксировать такое t, что подпространства $\mathbb{A}(n)$ будут лежать в поле частных $\mathrm{Quot}(\mathbb{A}(0)) \subset k((u))$ и подпространства $\mathbb{A}(\pm d)$ будут состоять из рациональных функций на C, регулярных во всех особых точках кривой C (так как $\mathscr{B}_0(C')|_C \simeq \mathscr{O}_C(D)$, где $D \in C_{\mathrm{reg}}$; ср. [17; гл. IV, упражнение 1.9]).

Так как для любого обратимого пучка $\mathscr{L}$ и пучка без кручения $\mathscr{G}$ ранга 1 на C естественное отображение $\mathscr{G}(C \setminus Q) \otimes_{\mathscr{O}_C(C\setminus Q)} \mathscr{L}(C \setminus Q) \to (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{L})(C \setminus Q)$

[4] Мы подразумеваем здесь обратные образы факторпучков на C.

является изоморфизмом, мы получаем $\mathbb{A}(nd) = \mathbb{A}(d)^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. В частности, $\mathbb{A}(nd)$ состоит из рациональных функций на C, регулярных во всех особых точках кривой C. Так как для любого $0 < i < d$ имеет место $\mathbb{A}(nd+i)^d \subseteq \mathbb{A}((nd+i)d)$, подпространства $\mathbb{A}(nd+i)$ состоят из рациональных функций, регулярных во всех особых точках C. Значит, пучки $\mathscr{B}_i(nC')|_C$ локально свободны для всех $i, n \in \mathbb{Z}$.

2. Покажем, что для любых двух очень обильных дивизоров D_1, D_2 на C степеней $\geqslant 3g+1$, где $g = p_a(C)$ – арифметический род кривой C, естественное отображение $H^0(C, \mathscr{O}_C(D_1)) \otimes_k H^0(C, \mathscr{O}_C(D_2)) \to H^0(C, \mathscr{O}_C(D_1+D_2))$ является изоморфизмом. Это утверждение можно легко доказать, например, с помощью отображения Кричевера.

Сначала заметим, что любой дивизор степени $n > 2g+1$ эквивалентен дивизору $D_P^n := (n-g-1)Q + P_1 + \dots + P_{g+1}$ (здесь Q – точка из шага 1) с попарно различными точками P_i, и любые два таких дивизора эквивалентны дивизорам $D_P^n = (n-g-1)Q + P_1 + \dots + P_{g+1}$, $D_Q^m := (m-g-1)Q + Q_1 + \dots + Q_{g+1}$ с попарно различными точками P_i, Q_j. Мы можем выбрать базис в пространстве $H^0(C, \mathscr{O}_C(D_P^n))$, частично состоящий из функции $f_0 = 1$ и функций $f_1, \dots, f_{g+1}$, имеющих (простой) полюс в одной точке P_i и регулярных в точках P_j, $j \neq i$, для всех $i = 1, \dots, g+1$ (и можем выбрать аналогичный базис в $H^0(C, \mathscr{O}_C(D_Q^m))$ с функциями h_i). Действительно,

$$\dim_k H^0(C, \mathscr{O}_C(D_P^n)) = n+1-g \quad \text{и} \quad \dim_k H^0(C, \mathscr{O}_C((n-g-1)Q)) = n-2g > 0,$$

т.е. существует $(g+1)$-мерное векторное подпространство функций, нерегулярных в точках множества $\{P_1, \dots, P_{g+1}\}$.

Пусть теперь $n, m > 3g+1$. Пусть W – образ квинтета $(C, Q, \mathscr{O}_C(D_P^n), u, \varphi)$ при отображении Кричевера, где тривиализация φ в точке Q определяется через эффективный дивизор Картье D_P^n. Пусть W' – образ аналогичного квинтета $(C, Q, \mathscr{O}_C(D_Q^m), u, \varphi')$. Тогда (ср. [25; п. 2.6.1])

$$W_0 := k[[u]] \cap W \simeq H^0(C, \mathscr{O}_C(D_P^n)), \qquad W_0' := k[[u]] \cap W' \simeq H^0(C, \mathscr{O}_C(D_Q^m)).$$

Теперь в пространствах $H^0(C, \mathscr{O}_C(D_P^{2g+1})), H^0(C, \mathscr{O}_C(D_Q^{2g+1}))$ выберем базисы, как в предыдущем абзаце, и заметим, что образы элементов $f_0, \dots, f_{g+1}$, $h_0, \dots, h_{g+1}$ в пространствах W_0, W_0' имеют нормирования $\geqslant (n-2g-1)$, $\geqslant (m-2g-1)$ соответственно (это следует из конструкции отображения Кричевера). Из теоремы Римана–Роха следует тогда, что пространства W, W' содержат элементы с любыми значениями нормирования $\leqslant (n-2g-1)$, $\leqslant (m-2g-1)$ соответственно (и нормирования всех элементов $\leqslant n$, $\leqslant m$ соответственно). Обозначим через $\widetilde{f}_i$ какие-нибудь элементы из W_0 с $\nu_Q(\widetilde{f}_i) = i$, $i = 0, \dots, (n-2g-1)$, и через $\widetilde{h}_i$ аналогичные элементы из W_0'.

Пусть W'' – образ квинтета $(C, Q, \mathscr{O}_C(D_P^n + D_Q^m), u, \varphi'')$ в $k((u))$. Заметим, что элементы $f_0 g_0$, $g_0 f_i$, $f_0 g_i$, $i = 1, \dots, g+1$, образуют базис в пространстве $H^0(C, \mathscr{O}_C(gQ + P_1 + \dots + P_{g+1} + Q_1 + \dots + Q_{g+1}))$, и их образы в W'' имеют нормирования $\geqslant (n+m-3g-2)$. Опять из теоремы Римана–Роха следует, что W'' содержит элементы с произвольными нормированиями $\leqslant (n+m-3g-2)$.

Теперь заметим, что из всех этих наблюдений следует, что

$$\begin{aligned}\dim_k H^0(C,\mathscr{O}_C(D_P^n+D_Q^m))\\ -\dim_k\langle H^0(C,\mathscr{O}_C(gQ+P_1+\dots+P_{g+1}+Q_1+\dots+Q_{g+1})),\\ \widetilde{f}_0\cdot H^0(C,\mathscr{O}_C(D_Q^m)),\dots,\widetilde{f}_i\cdot H^0(C,\mathscr{O}_C(D_Q^m))\rangle\leqslant n-2g-3-i\end{aligned}\tag{3.1}$$

при всех $i=0,\dots,(n-2g-1)$. Значит, $H^0(C,\mathscr{O}_C(D_P^n+D_Q^m))=H^0(C,\mathscr{O}_C(D_P^n))\times H^0(C,\mathscr{O}_C(D_Q^m))$.

3. Теперь мы можем доказать, что C – дивизор Картье. Идея доказательства здесь такая же, как в работе [25; теорема 4.1], и наши аргументы будут очень похожи на аргументы из доказательств утверждений [25; теорема 4.1], [44; лемма 3.3] или [24; теорема 2.1].

Напомним, что $X\simeq\operatorname{Proj}\widetilde{A}$, $\widetilde{A}:=\widetilde{A}_Q$, и дивизор C определяется однородным идеалом $I=(s)$. Более того, градуированная k-алгебра $\widetilde{A}^{(d)}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\widetilde{A}_{kd}$ конечно порождена элементами из $\widetilde{A}_1^{(d)}$ как k-алгебра ($C'=dC$ – дивизор Картье). Легко видеть, что для любого целого n существует $m>n$ такое, что градуированная k-алгебра $\widetilde{A}^{(md)}$ конечно порождена элементами из $\widetilde{A}_1^{(md)}$. Таким образом, мы можем фиксировать n так, что все пучки $\mathscr{B}_i|_C$, $i\geqslant nd$, очень обильны и имеют степени больше $3g+1$.

Покажем (напомним), что для произвольной градуированной алгебры $\widetilde{A}^{(m)}$, конечно порожденной компонентой $\widetilde{A}_1^{(m)}$, дивизор mC – эффективный дивизор Картье. Рассмотрим подсхему C' в X, определенную однородным идеалом $I^m=(s^m)$ кольца $\widetilde{A}$. Топологическое пространство подсхемы C' совпадает с топологическим пространством подсхемы C (это легко увидеть на аффинном покрытии X). Локальное кольцо $\mathscr{O}_{X,C}$ совпадает с кольцом нормирования дискретного нормирования, соответствующего кривой C, в поле $\operatorname{Quot}(A)$,

$$\mathscr{O}_{X,C}=\widetilde{A}_{(I)}=\{as^n/bs^n\mid n\geqslant 0,\ a\in A_n,\ b\in A_n\setminus A_{n-1}\}.$$

Идеал I индуцирует максимальный идеал в кольце $\mathscr{O}_{X,C}$, а идеал I^m индуцирует m-ю степень максимального идеала. Следовательно, если мы докажем, что идеал I^m определяет эффективный дивизор Картье на X, то отображение циклов на этом дивизоре принимает значение mC (см. [24; приложение A]). В силу [15; свойство 2.4.7] имеем $X=\operatorname{Proj}\widetilde{A}\simeq\operatorname{Proj}\widetilde{A}^{(m)}$. При этом изоморфизме подсхема C' определяется однородным идеалом $I^m\cap\widetilde{A}^{(m)}$ в кольце $\widetilde{A}^{(m)}$. Этот идеал порожден элементом $s^m\in\widetilde{A}_1^{(m)}$. Открытые аффинные подмножества $D_+(x_i)=\operatorname{Spec}\widetilde{A}^{(m)}_{(x_i)}$ с $x_i\in\widetilde{A}_1^{(m)}$ определяют покрытие поверхности $\operatorname{Proj}\widetilde{A}^{(m)}$. В каждом кольце $\widetilde{A}^{(m)}_{(x_i)}$ идеал $(I^m\cap\widetilde{A}^{(m)})_{(x_i)}$ порождается элементом s^m/x_i. Следовательно, однородный идеал $I^m\cap\widetilde{A}^{(m)}$ определяет эффективный дивизор Картье.

Пусть $m>n$ – произвольное целое такое, что $\widetilde{A}^{(md)}$ конечно порождено элементами из первой компоненты $\widetilde{A}_1^{(md)}$. Достаточно показать, что $\widetilde{A}^{(md+1)}$ также конечно порождено элементами из $\widetilde{A}_1^{(md+1)}$. Действительно, в этом случае mdC и $(md+1)C$ – дивизоры Картье, откуда следует, что C – дивизор Картье. Доказательство проводится по индукции с использованием шага 2.

В силу свойств пучков $\mathscr{B}_i$, сформулированных перед этой теоремой, имеются изоморфизмы $H^0(C, \mathscr{B}_{md+1}|_C) \simeq H^0(X, \mathscr{B}_{md+1})/H^(X, \mathscr{B}_{md})$, так как m достаточно большое. По локальному критерию плоскости (ср. [17; лемма 10.3A]) пучок $\mathscr{B}_{md+1}$ локально свободен в точке Q, следовательно, из [25; лемма 2.1, следствие 2.7] следует $H^0(C, \mathscr{B}_{md+1}|_C) \simeq A_{md+1}$ и, значит,

$$H^0(C, \mathscr{B}_{md+1}|_C) \simeq A_{md+1}/A_{md} \simeq \mathbb{A}(md+1) \cap k[[u]].$$

Далее, компонента $\widetilde{A}_2^{(md+1)}$ порождена $\widetilde{A}_1^{(md+1)}$, так как компонента $\widetilde{A}_2^{(md)} \subset \widetilde{A}_2^{(md+1)}$ порождена $\widetilde{A}_1^{(md)} \subset \widetilde{A}_1^{(md+1)}$ и $(\mathbb{A}(md+1) \cap k[[u]]) \cdot (\mathbb{A}(md+j) \cap k[[u]]) = (\mathbb{A}(2md+j) \cap k[[u]])$ для $j = 0, 1$ по шагу 2. По той же причине и по индукции компонента $\widetilde{A}_k^{(md+1)}$ порождается $\widetilde{A}_{k-1}^{(md+1)}$ и $(\mathbb{A}(md+1) \cap k[[u]])$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $B \subset \widehat{D}$ – 1-квазиэллиптическая строго допустимая коммутативная конечно порожденная подалгебра.*

Тогда следующие свойства эквивалентны:

1) $\mathbf{rk}(B) = 1$;
2) $\dim_k B_m \sim m^2/2$.

Доказательство. Допустим, что $\mathbf{rk}(B) = 1$. Пусть (A, W) и $(X, C, p, \mathscr{F})$ – пара Шура и редуцированные геометрические данные, соответствующие B. По теореме 1 ранг пары (A, W) равен 1 (ср. [44; теоремы 3.2, 3.3]). По теореме 2 C – дивизор Картье, и по [44; лемма 3.6] имеем $H^0(X, \mathscr{O}_X(nC)) \simeq A_n \simeq B_n$. Так как $C^2 = 1$, по асимптотической теореме Римана–Роха $\dim_k B_m \sim m^2/2$.

Обратно, предположим, что $\dim_k B_m \sim m^2/2$. Тогда, очевидно, $\mathrm{rk}(B) = 1$. Пусть $(X, C, p, \mathscr{F}, \pi, \varphi)$ – геометрические данные ранга 1, построенные по [44; теорема 3.3], и (A, W) – соответствующая пара Шура. По определению геометрических данных и снова по лемме 3.6 из [44] получаем, что $h^0(X, \mathscr{F}(nC')) = (nd+1)(nd+2)/2$, $h^0(X, \mathscr{O}_X(nC')) = \dim_k B_{nd} \sim (nd)^2/2$. Тогда по асимптотической теореме Римана–Роха $C^2 = 1$. В силу [24; свойство 3.2] пучок $\mathscr{F}$ когерентен и $\mathrm{rk}(\mathscr{F}) = 1$. Значит, $\mathbf{rk}(B) = 1$.

Определение 14. Пусть K – конечно порожденное поле степени трансцендентности 2 над полем k, и пусть ν_C – дискретное нормирование на K. Пара (A, W) подпространств в K, снабженная убывающей фильтрацией нормирования и удовлетворяющая следующим условиям:

1) A – конечно порожденная k-алгебра с полем частных $\mathrm{Quot}(A) = K$;
2) W – конечно порожденный A-модуль, где структура модуля индуцирована умножением в поле K;
3) $A_0 = k$, $W_n = 0$ при $n < 0$ и для $n \geqslant 0$

$$\dim_k W_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

называется *пре-парой Шура ранга* 1.

Позже (см. следствие 2) мы покажем, что пре-пара Шура (A_Q, W_Q), ассоциированная с пре-спектральными данными, является пре-парой Шура ранга 1.

Пре-спектральные данные ранга 1 можно дополнить до когерентных геометрических данных ранга 1. Чтобы доказать это утверждение, нам понадобятся несколько фактов и конструкций из работы [25].

Следующее свойство обсуждалось в [25; п. 2.6.1].

Свойство. Если $\mathscr{G}$ – пучок без кручения на кривой C с $h^0(C,\mathscr{G}) = l$, то существует плотное открытое подмножество $U \subset C$ такое, что для каждой точки $Q \in U$ функция

$$f_Q(m) = h^0(C, \mathscr{G}(-mQ))$$

строго монотонна при $0 \leqslant m \leqslant l$. В частности, $H^0(C, \mathscr{G}(-lQ)) = 0$.

Это свойство легко следует из следующего наблюдения: для любого фиксированного ненулевого сечения $a \in H^0(C,\mathscr{G})$ существует плотное открытое подмножество $U \subset C$ такое, что для любой точки $Q \in U$ образ сечения a в $\mathscr{O}_{C,Q}$ относительно произвольной тривиализации обратим.

Теорема 3. *Пусть* $(X, C, \mathscr{F})$ *– пре-спектральные данные ранга* 1.

Тогда эти данные можно дополнить до когерентных геометрических данных ранга 1, *в частности, до редуцированных геометрических данных ранга* 1.

Доказательство. Нужно показать, что существует регулярная точка $p \in C$ такая, что выполняются условия определения 11, 4) (см. замечание 3).

Используя точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}((i-1)C)) \to H^0(X, \mathscr{F}(iC)) \to H^0(C, \mathscr{F}(iC)|_C),$$

условия определения 11, 4) можно переформулировать следующим образом: функция

$$\widetilde{f}_p(m) = \dim_k \left(\frac{H^0(X, \mathscr{F}(iC))}{H^0(X, \mathscr{F}((i-1)C))} \cap H^0(C, (\mathscr{F}(iC)|_C)(-mp)) \right)$$

строго монотонна при $0 \leqslant m \leqslant i$ (учитывая, что пересечение берется в пространстве $H^0(C, \mathscr{F}(iC)|_C)$).

В силу тех же наблюдений, которые были приведены выше для объяснения приведенного свойства, для любого фиксированного $i \geqslant 0$ существует плотное открытое подмножество $U_i \subset C$ такое, что для любой точки $p \in U_i$ функция $\widetilde{f}_p(m)$ строго монотонна при $0 \leqslant m \leqslant i$. Следовательно, поскольку основное поле k несчетно, существует точка $p \in \cap_{i \geqslant 0} U_i$, регулярная на C и X, такая, что эти свойства выполняются одновременно. Выбрав некоторые формальные локальные параметры u, t в такой точке p (как в определении 11, 4) и выбрав произвольную тривиализацию пучка $\mathscr{F}$ в p, мы получим когерентные геометрические данные ранга 1.

Следствие 2. *Пусть* (A_Q, W_Q) *– пре-пара Шура, ассоциированная с пре-спектральными данными* $(X, C, \mathscr{F})$ *ранга* 1. *Тогда* (A_Q, W_Q) *– пре-пара Шура ранга* 1.

Доказательство. Так как C – дивизор Картье, то $(W_Q)_n = (A_Q)_n = 0$ при $n < 0$. Действительно, при $i < 0$ $(A_Q)_0 \supseteq (A_Q)_i$, $k \not\subseteq (A_Q)_i$, поскольку нормирование произвольной константы равно нулю, и $(W_P)_i \simeq H^0(X, \mathscr{F}(iC)) = 0$

по определению. Таким образом, нам нужно лишь проверить, что при $n \geqslant 0$ $\dim_k (W_Q)_n = (n+1)(n+2)/2$. Как уже было отмечено, $(W_Q)_i \simeq H^0(X, \mathscr{F}(iC))$. Если $(X, C, p, \mathscr{F})$ – редуцированные геометрические данные ранга 1 (расширение $(X, C, \mathscr{F})$), то имеются изоморфизмы $H^0(X, \mathscr{F}(nC)) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{n+1}$. Поскольку $(W_p)_i$ определены при помощи дискретного нормирования $\nu_C = \nu_t|_K$, мы получаем $(W_p)_i \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{i+1}$. Значит, $\dim_k H^0(X, \mathscr{F}(nC)) = (n+1)(n+2)/2$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть (A, W) – пре-пара Шура ранга 1.*

Тогда она определяет пре-спектральные данные ранга 1, где $X = \operatorname{Proj} \widetilde{A}$, $\widetilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n s^n$, $C = \operatorname{Proj}(\operatorname{gr}(\widetilde{A}))$, $\mathscr{F} = \operatorname{Proj} \widetilde{W}$, $\widetilde{W} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n s^n$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\widetilde{A}$ конечно порождена. Пусть A порождена элементами $t_1, \dots, t_m$ как k-алгебра. Обозначим через $t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}$ соответствующие однородные элементы в кольце $\widetilde{A}$, где для каждого i мы здесь обозначаем через s_i минимальное число такое, что $t_i \in A_{s_i}$. Рассмотрим конечно порожденную k-подалгебру $\widetilde{A}_1 = k[s, t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}] \subset \widetilde{A}$. По [44; лемма 3.3, 1)] (см. также доказательство [24; теорема 2.1]) она определяет неприводимую проективную поверхность $X = \operatorname{Proj}(\widetilde{A}_1)$ с неприводимым обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором $C = \operatorname{Proj}(\operatorname{gr}(\widetilde{A}_1))$, соответствующим нормированию ν_C, не лежащим в особом локусе поверхности X. Кроме того, $H^0(X \setminus C, \mathscr{O}_X) \simeq (\widetilde{A}_1)_{(s)} \simeq A$. Если $d \geqslant 1$ – минимальное целое такое, что k-алгебра $\widetilde{A}_1^{(d)} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} (\widetilde{A}_1)_{ld}$ конечно порождена элементами из $(\widetilde{A}_1)_1^{(d)}$ как k-алгебра (напомним, что такое d существует, см. [5; гл. III, п. 1.3, свойство 3]), то dC – очень обильный дивизор Картье, и согласно утверждениям из [25; лемма 2.1, замечание 2.7] (примененным к произвольной точке Q, регулярной на X и на C) имеем $H^0(X, \mathscr{O}_X(nC')) \simeq A_{nd}$ (ср. [44; лемма 3.6]). Значит, кольцо $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}$ конечно порождено и, следовательно, кольцо $\widetilde{A}$ конечно порождено и $X \simeq \operatorname{Proj} \widetilde{A}$.

Теперь в точности те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 3.2 из [24] (а именно, рассуждения, начинающиеся с четвертого предложения доказательства), показывают, что поверхность X коэно-маколеева вдоль C.

Те же аргументы, что и в доказательстве леммы 3.8 из [44] или в доказательстве нашей леммы 3 показывают, что пучок $\mathscr{F} = \operatorname{Proj} \widetilde{W}$ когерентен. А именно, рассмотрим конечно порожденный градуированный $\widetilde{A}$-модуль $\widetilde{W}_1$, содержащий все порождающие W над A. Тогда $\mathscr{F}' = \operatorname{Proj} \widetilde{W}_1$ – когерентный пучок без кручения ранга 1, так как $(\widetilde{W}_1)_{(s)} = W \subset K$. В силу [24; следствие 3.1] этот пучок коэно-маколеев вдоль C (мы ссылаемся здесь на следствие 3.1, поскольку его доказательство справедливо также в нашей ситуации). Тогда согласно [25; лемма 2.1, замечание 2.7] $H^0(X, \mathscr{F}'(nC')) \simeq W_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$, а значит, $\mathscr{F}' \simeq \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{nd}) \simeq \mathscr{F}$ в силу [15; свойство 2.4.7].

§ 4. Примеры

Результаты § 3 показывают, что для нахождения примеров коммутативных подалгебр ранга 1 в $\widehat{D}$ достаточно искать примеры пре-спектральных данных.

Предположительно операторы из таких алгебр можно найти явно по аналогии с одномерной теорией обыкновенных дифференциальных операторов или разностных операторов; см. [20]–[22].

Из результатов § 3 также видно, что тривиальные алгебры (см. § 1) соответствуют спектральным данным со свойством $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) \geqslant 2$ (ср. [25; теорема 4.1]). Действительно, как мы уже напоминали в доказательстве теоремы 1, $H^0(X, \mathscr{O}_X(C)) \simeq A_2 \simeq B_2$. Значит, спектральные поверхности таких алгебр обладают пучком кривых (некоторые примеры с особыми спектральными поверхностями см. в [25; § 4]).

В этом параграфе мы исследуем вопрос: существуют ли пре-спектральные данные с гладкой спектральной поверхностью и с $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 1$? Оказывается, можно построить такие примеры с минимально возможным родом кривой C.

Теорема 5. *Пусть $(X, C, \mathscr{F})$ – пре-спектральные данные ранга 1 с гладкой поверхностью X и такие, что арифметический род $p_a(C) \leqslant 1$. Тогда $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) \geqslant 2$.*

Доказательство. Если $p_a(C) = 0$, то $C \simeq \mathbb{P}^1$, $X \simeq \mathbb{P}^2$ и $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 3$; см., например, конец доказательства теоремы 4.1 в [25].

Если $p_a(C) = 1$ и C особа, то C должна быть рациональна. Тогда морфизм Альбанезе $f\colon X \to \operatorname{Alb}(X)$ должен иметь тривиальный образ, поскольку в противном случае обильная и рациональная кривая C должна была бы отобразиться в рациональную кривую многообразия $\operatorname{Alb}(X)$. Это влечет равенство нулю группы $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ и из точной последовательности

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_X) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(C)) \to H^0(C, \mathscr{O}_C(C)) \to H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0 \qquad (4.1)$$

вытекает, что $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 2$.

Если $p_a(C) = 1$ и C гладка, то мы можем применить рассуждения из теоремы 2.5.19 в [1]. А именно, поскольку $p_a(C) = 1$ и $C^2 = 1$, мы должны иметь $h^1(C, \mathscr{O}_C(C)) = 0$, следовательно, усеченная экспоненциальная последовательность

$$0 \to \mathscr{O}_C(-C) \to \mathscr{O}^*_{C(1)} \to \mathscr{O}^*_C \to 0,$$

где $C(1)$ обозначает первую инфинитезимальную окрестность кривой C в X, влечет изоморфизм алгебраических групп $\underline{\operatorname{Pic}}^0(C(1)) \simeq \underline{\operatorname{Pic}}^0(C)$, поскольку линейная алгебраическая группа $\underline{H^1(C, \mathscr{O}_C(-C))}$ (понимаемая как произведение $h^1(C, \mathscr{O}_C(C))$ копий аддитивной группы G_a) тривиальна.

Теперь у нас есть две возможности. Если каноническое отображение ограничения $\alpha\colon \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(C)$ сюръективно, то отображение $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(C(1))$ сюръективно, и мы оказываемся в ситуации теоремы 2.5.19 из книги [1], и C должна быть изоморфна прямой $\mathbb{P}^1$, противоречие. Если α не сюръективно, оно индуцирует тривиальное отображение алгебраических групп $\underline{\operatorname{Pic}}^0(X) \to \underline{\operatorname{Pic}}^0(C)$. Тогда $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, и опять в силу (4.1) имеем $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 2$.

Следующее определение мотивировано тем фактом, что коэно-маколеевы пучки образуют открытое подмножество в пространстве модулей пучков без кручения ранга 1 с фиксированным полиномом Гильберта (см., например, [16; теорема 12.2.1]).

Определение 15. Пусть X, C – соответственно поверхность и дивизор, удовлетворяющие условиям из определения 13. Будем говорить, что пучок без кручения $\mathscr{F}$ ранга 1 *превосходный*, если $H^1(C, \mathscr{F}|_C) = 0$ и

$$\chi(\mathscr{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2}.$$

По теореме 2 C – дивизор Картье, так что $d = 1$. По приведенному выше свойству существует точка Q, для которой выполняются условия из [25; свойство 2.3]. Тогда $H^1(X, \mathscr{F}) = H^2(X, \mathscr{F}) = 0$ и $\mathscr{F}$ коэно-маколеев, следовательно, он локально свободен. Более того, $(X, C, \mathscr{F})$ – пре-спектральные данные ранга 1.

Предложение 2. *Пусть* X, C *– соответственно гладкая поверхность и дивизор, удовлетворяющие условиям из определения* 13, *и пусть* $\mathscr{F}$ *– пучок без кручения ранга* 1. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathscr{F}$ *– превосходный пучок*;
2) $H^i(X, \mathscr{F}(-C)) = 0$, $i = 0, 1, 2$; $h^0(X, \mathscr{F}) = 1$ *и*

$$\chi(\mathscr{F}((n-1)C)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Если $\mathscr{F}$ – превосходный пучок, то, очевидно,

$$\chi(\mathscr{F}((n-1)C)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Теперь из точной последовательности

$$0 \to \mathscr{F}(-C) \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}|_C \to 0 \tag{4.2}$$

и из теоремы Римана–Роха следует, что $H^i(X, \mathscr{F}(-C)) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Наконец, в силу [25; свойство 2.3] получаем $H^1(X, \mathscr{F}) = H^2(X, \mathscr{F}) = 0$ и $h^0(X, \mathscr{F}) = 1$.

Если $\mathscr{F}$ удовлетворяет условиям п. 2), то, очевидно,

$$\chi(\mathscr{F}(nC)) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

и снова из последовательности (4.2) немедленно следует, что $H^1(C, \mathscr{F}|_C) = 0$, т.е. пучок $\mathscr{F}$ превосходный.

Следствие 3. *Следующие условия на гладкую проективную поверхность являются достаточными для существования коммутативной подалгебры ранга* 1 *в* $\widehat{D}$:

1) *существует обильная целая кривая* C *с* $C^2 = 1$ *и* $h^0(X, \mathscr{O}_X(C)) = 1$;

2) *существует дивизор* D *с* $(D, C)_X = g(C) - 1$, $h^i(X, \mathscr{O}_X(D)) = 0$, $i = 0, 1, 2$, *и* $h^0(X, \mathscr{O}_X(D + C)) = 1$.

Следующие удивительные примеры гладких поверхностей построены в работе [23].

Теорема 6. *Существует восьмимерное семейство попарно не изоморфных поверхностей Годо такое, что на каждой поверхности X из этого семейства существуют* 1200 *различных дивизоров D_j и четыре кривых C_i, удовлетворяющих следующим условиям*:

(i) *кривые C_i гладкие, пучок $\mathscr{O}_X(C_i)$ обилен и* $\dim H^0(X, \mathscr{O}_X(C_i)) = 1$;

(ii) $C_i^2 = 1$, $g(C_i) = 2$, *где $g(C_i)$ обозначает род кривой C_i*;

(iii) $(D_j, C_i)_X = g(C_i) - 1$;

(iv) $\chi(D_j) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim H^i(X, \mathscr{O}_X(D_j)) = 0$.

Более того, среди дивизоров D_j существуют по крайней мере 1080 *различных дивизоров таких, что* $\dim H^i(X, \mathscr{O}_X(D_j)) = 0$ *для* $i = 0, 1, 2$, *и среди них по крайней мере* 840 *дивизоров таких, что* $\dim H^0(X, \mathscr{O}_X(D_j + C_i) = 1$. *Тройки* $(X, C_i, D_j + C_i)$, *где X – произвольная поверхность из этого семейства и D_j – произвольный представитель из последнего класса дивизоров, являются пре-спектральными данными ранга* 1.

Так как $q = p_g = 0$ для всех поверхностей из этой теоремы, пространство модулей пучков без кручения ранга 1 с полиномом Гильберта из предложения 2 конечно. Таким образом, у соответствующих коммутативных подалгебр нет изоспектральных деформаций.

Данная статья посвящается 75-летию Алексея Николаевича Паршина.

Список литературы

[1] L. Bădescu, *Projective geometry and formal geometry*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), **65**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004, xiv+209 pp.

[2] Yu. Berest, P. Etingof, V. Ginzburg, “Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants”, *Duke Math. J.*, **118**:2 (2003), 279–337.

[3] Yu. Berest, A. Kasman, “$\mathscr{D}$-modules and Darboux transformations”, *Lett. Math. Phys.*, **43**:3 (1998), 279–294.

[4] I. Burban, A. Zheglov, *Cohen–Macaulay modules over the algebra of planar quasi-invariants and Calogero–Moser systems*, arXiv: 1703.01762.

[5] Н. Бурбаки, *Элементы математики. Коммутативная алгебра*, М., Мир, 1971, 708 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative*, v. 27, 28, 30, 31, Actualités Sci. Indust., **1290, 1293, 1308, 1314**, Hermann, Paris, 1961–1965, 187 pp., 183 pp., 207 pp., iii+146 pp.

[6] O. Chalykh, “Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **366**:1867 (2008), 947–971.

[7] O. A. Chalykh, A. P. Veselov, “Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **126**:3 (1990), 597–611.

[8] А. П. Веселов, К. Л. Стыркас, О. А. Чалых, “Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шредингера и группы, порожденные отражениями”, *ТМФ*, **94**:2 (1993), 253–275; англ. пер.: A. P. Veselov, K. L. Styrkas, O. A. Chalykh, “Algebraic integrability for the Schrödinger equation and finite reflection groups”, *Theoret. and Math. Phys.*, **94**:2 (1993), 182–197.

[9] O. Chalykh, M. Feigin, A. Veselov, “New integrable generalizations of Calogero–Moser quantum problem”, *J. Math. Phys.*, **39**:2 (1998), 695–703.

[10] Б. А. Дубровин, “Матричные конечнозонные операторы”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем., **23**, ВИНИТИ, М., 1983, 33–78; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Matrix finite-zone operators”, *J. Soviet Math.*, **28**:1 (1985), 20–50.

[11] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136; англ. пер.: B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties”, *Russian Math. Surveys*, **31**:1 (1976), 59–146.

[12] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Интегрируемые системы. I”, *Динамические системы – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **4**, ВИНИТИ, М., 1985, 179–277; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Integrable systems. I”, *Dynamical systems* IV, Encyclopaedia Math. Sci., **4**, Springer, Berlin, 1990, 173–280.

[13] M. Feigin, D. Johnston, “A class of Baker–Akhiezer arrangements”, *Comm. Math. Phys.*, **328**:3 (2014), 1117–1157.

[14] П. Г. Гриневич, “Векторный ранг коммутирующих матричных дифференциальных операторов. Доказательство критерия С. П. Новикова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 458–478; англ. пер.: P. G. Grinevich, “Vector rank of commuting matrix differential operators. Proof of S. P. Novikov’s criterion”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:3 (1987), 445–465.

[15] A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **8** (1961), 5–222.

[16] A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algèbrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **28** (1966), 5–255.

[17] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981, 600 с.; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, xvi+496 pp.

[18] G. J. Heckman, “A remark on the Dunkl differential-difference operators”, *Harmonic analysis on reductive groups* (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math., **101**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, 181–191.

[19] G. J. Heckman, E. M. Opdam, “Root systems and hypergeometric functions. I”, *Compositio Math.*, **64**:3 (1987), 329–352.

[20] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208; англ. пер.: I. M. Krichever, “Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 185–213.

[21] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31; англ. пер.: I. M. Krichever, “Commutative rings of ordinary linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 175–185.

[22] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения”, *УМН*, **58**:3(351) (2003), 51–88; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Two-dimensionalized Toda lattice, commuting difference operators, and holomorphic bundles”, *Russian Math. Surveys*, **58**:3 (2003), 473–510.

[23] Вик. С. Куликов, “О дивизорах малой канонической степени на поверхностях Годо”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 56–65; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On divisors of small canonical degree on the Godaux surfaces”, *Sb. Math.*, **209**:8 (2018) (to appear).

[24] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties”, *Selecta Math. (N. S.)*, **20**:4 (2014), 1159–1195.

[25] А. Б. Жеглов, Х. Курке, “Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных”, *Матем. сб.*, **206**:5 (2015), 61–106; англ. пер.: A. B. Zheglov, H. Kurke, “Geometric properties of

commutative subalgebras of partial differential operators", *Sb. Math.*, **206**:5 (2015), 676–717.

[26] Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, "Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один", *Докл. РАН*, **466**:4 (2016), 399–401; англ. пер.: G. S. Mauleshova, A. E. Mironov, "One-point commuting difference operators of rank 1", *Dokl. Math.*, **93**:1 (2016), 62–64; arXiv: 1507.00527.

[27] А. Е. Миронов, "Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям", *Сиб. матем. журн.*, **43**:5 (2002), 1102–1114; англ. пер.: A. E. Mironov, "Commutative rings of differential operators corresponding to multidimensional algebraic varieties", *Siberian Math. J.*, **43**:5 (2002), 888–898.

[28] K. Cho, A. Mironov, A. Nakayashiki, "Baker–Akhiezer modules on the intersections of shifted theta divisors", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **47**:2 (2011), 553–567.

[29] M. Mulase, "Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmanians", *Internat. J. Math.*, **1**:3 (1990), 293–342.

[30] M. Mulase, "Algebraic theory of the KP equations", *Perspectives in mathematical physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., **III**, Int. Press, Cambridge, MA, 1994, 151–217.

[31] A. Nakayashiki, "Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties", *Amer. J. Math.*, **116**:1 (1994), 65–100.

[32] A. Nakayashiki, "Structure of Baker–Akhiezer modules of principally polarized Abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems", *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 315–358.

[33] Д. В. Осипов, "Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 91–128; англ. пер.: D. V. Osipov, "The Krichever correspondence for algebraic varieties", *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 941–975.

[34] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, "Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана над кольцом", *Современные проблемы математики, механики и математической физики*. II, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2016, 54–75; англ. пер.: S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, "Continuous homomorphisms between algebras of iterated Laurent series over a ring", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **294** (2016), 47–66.

[35] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, "Многомерный символ Конту-Каррера и непрерывные автоморфизмы", *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4 (2016), 26–42; англ. пер.: S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, "Higher-dimensional Contou-Carrère symbol and continuous automorphisms", *Funct. Anal. Appl.*, **50**:4 (2016), 268–280.

[36] А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, "О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера", *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 528–539; англ. пер.: A. B. Zheglov, D. V. Osipov, "On some questions related to the Krichever correspondence", *Math. Notes*, **81**:4 (2007), 467–476.

[37] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, "Quantum integrable systems related to Lie algebras", *Phys. Rep.*, **94**:6 (1983), 313–404.

[38] А. Н. Паршин, "Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей", *Функц. анализ и его прил.*, **35**:1 (2001), 88–90; англ. пер.: A. N. Parshin, "The Krichever correspondence for algebraic surfaces", *Funct. Anal. Appl.*, **35**:1 (2001), 74–76.

[39] A. N. Parshin, "Integrable systems and local fields", *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4157–4181.

[40] E. Previato, "Multivariable Burchnall–Chaundy theory", *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **366**:1867 (2008), 1155–1177.

[41] V. Przyjalkowski, C. Shramov, “On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2015**:21 (2015), 11302–11332.

[42] В. В. Пржиялковский, “Компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано”, *Матем. сб.*, **208**:7 (2017), 84–108; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Calabi–Yau compactifications of toric Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds”, *Sb. Math.*, **208**:7 (2017), 992–1013.

[43] M. Rothstein, “Dynamics of the Krichever construction in several variables”, *J. Reine Angew. Math.*, **2004**:572 (2004), 111–138.

[44] А. Б. Жеглов, “О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов”, *Алгебра и анализ*, **25**:5 (2013), 86–145; англ. пер.: A. B. Zheglov, “On rings of commuting partial differential operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **25**:5 (2014), 775–814.

[45] А. Б. Жеглов, *Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, М., 2016, 201 с., http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/zheglov/dis.pdf.

Александр Борисович Жеглов
(Alexander B. Zheglov)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: azheglov@math.msu.su

Поступила в редакцию
31.10.2017 и 06.02.2018