А. Б. Жеглов, О классификации двумерных локальных тел, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 169–170

DOI: 10.4213/rm196

О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕЛ

А. Б. Жеглов

1. В алгебраической геометрии и теории чисел хорошо известно понятие n-мерного локального поля, имеющее многочисленные применения (см. обзор [1], а также [2]). В работе [3] было предложено рассматривать n-мерные локальные поля без условия коммутативности, т.е. n-мерные локальные тела, и поставлена задача их классификации. Частные примеры таких тел исследовались уже давно (см., например, [4]).

Определение 1. Пусть K и k – произвольные тела. Будем говорить, что K является n-мерным локальным телом, имеющим тело k последним телом вычетов, если тело K имеет следующую структуру. Или $n = 0$ (и при этом $K = k$), или K обладает дискретным нормированием $\nu\colon K^* \cup \{0\} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, где $\nu\colon K^* \to \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм, $\nu(0) = \infty$ и $\nu(a+b) \geqslant \inf(\nu(a), \nu(b))$; его кольцо нормирования $\mathscr{O} := \{x \in K : \nu(x) \geqslant 0\}$ является полным и отделимым относительно топологии, задаваемой ν, и его тело вычетов $\overline{K}$ является $(n-1)$-мерным локальным телом с последним телом вычетов k.

В настоящей работе эти задачи изучаются для двумерных локальных тел с телом вычетов, являющимся полем, а также исследуется аналог теоремы Коэна для локальных полей о существовании сечения отображения $\mathscr{O} \mapsto \mathscr{O}/\wp = \overline{K}$ в таких локальных телах.

Определение 2. Изоморфизмом локальных тел K и K' будем называть изоморфизм их как колец, сохраняющий нормирования $\nu, \overline{\nu}$, где $\overline{\nu}$ – дискретное нормирование поля $\overline{K}$.

Произвольное двумерное локальное тело будем называть расщепимым, если существует гомоморфизм $\overline{K} \hookrightarrow \mathscr{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathscr{O} \to \mathscr{O}/\wp = \overline{K}$.

Элементы $z \in \mathscr{O}, \nu(z) = 1$, и $u \in \overline{\mathscr{O}} \subset \overline{K}, \overline{\nu}(u) = 1$, будем называть локальными параметрами (или переменными) тела K.

Пусть K расщепимо. Фиксируем некоторые параметры z и u. Тогда имеет место

Предложение 1. *$K = \overline{K}((z))$ как векторное пространство, закон умножения двух рядов из которого задается с помощью тождества*

$$za = a^{\alpha}z + a^{\delta_1}z^2 + a^{\delta_2}z^3 + \cdots,$$

где $a \in \overline{K}$, α – некоторый автоморфизм, $\delta_i\colon \overline{K} \to \overline{K}$ – некоторые линейные отображения.

Пусть δ_i – первое отображение, не равное 0. Тогда δ_i удовлетворяет тождеству $\delta_i(ab) = \delta_i(a)b^{\alpha^2} + a^{\alpha}\delta_i(b)$ для любых $a, b \in \overline{K}$. Если $\alpha = 1$, то отображение $\delta = \delta_{2i} - \dfrac{(i+1)}{2}\delta_i^2$ удовлетворяет аналогичному тождеству.

2. Пусть $\overline{K}$ – поле и z – параметр тела K. Отображение $\phi\colon K \mapsto K$, $\phi(x) = z^{-1}xz$, переводит в себя $\mathscr{O}$ и $\wp$, т.е. дает автоморфизм α поля $\overline{K}$. Он не зависит от выбора z.

Теорема 1. *Пусть K – двумерное локальное тело, у которого первое тело вычетов – поле и для всех $n \in \mathbb{N}$ $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$. Тогда $\operatorname{char} K = \operatorname{char} \overline{K}$ и K расщепимо.*

Если $\alpha^n = \mathrm{Id}$, то существуют примеры нерасщепимых тел.

Теорема 2. *Пусть K, K' – двумерные локальные поля, для которых $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$, $\alpha'^n \neq \mathrm{Id}$ для всех n, и тело вычетов $\overline{K}$ коммутативно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Тело K изоморфно телу вида $\overline{K}((z))$, $za = a^{\alpha}z$, $a \in \overline{K}$, где $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96146) и фонда INTAS (грант № 93-2805).

(ii) *K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и существует такой изоморфизм $f\colon \overline{K} \mapsto \overline{K}'$, что $\alpha = f^{-1}\alpha' f$.*

(iii) *Если* $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k$, $\operatorname{char} K' = \operatorname{char} k'$ *и поля k, k' алгебраически замкнуты, то поле K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha) = (a_1', i_{\alpha'})$, где $a_1 = \alpha(u)u^{-1} \bmod \wp \in k$, $i_\alpha \in \mathbb{N} \cup \infty$ и $i_\alpha = 1$, если a_1 не является корнем из 1 в k, а иначе $i_\alpha = \overline{\nu}((\alpha^n - \mathrm{Id})(u))$, где $n \geqslant 1$: $a_1^n = 1$, $a_1^m \neq 1$ $\forall m < n$; a_1', $i_{\alpha'}$ определяются аналогично.*

3. Пусть K расщепимо, $k \in Z(K)$, и для некоторого $n \geqslant 1$ $\alpha^n = 1$. Положим $i = \nu((\phi_{z^n} - 1)(u)) \in \mathbb{N} \cup \infty$, $r = \overline{\nu}[((\phi_{z^n} - 1)(u))z^{-i} \bmod \wp] \bmod i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$,

$$a = \operatorname{res}_u \left\{ \frac{u^{\delta_{2i} - \frac{i+1}{2}\delta_i^2}}{(u^{\delta_i})^2}\, du \right\} \in k,$$

где u, z – произвольные параметры K, $\phi_z\colon K \to K$, $\phi_z(a) = ad(z)(a)$.

Замечание. Числа i, r, a могут быть определены только для расщепимых тел.

Предложение 2. $i = i(u^{\delta_j}, j \notin n\mathbb{N})$, $r = r(i)$, $a = a(u^{\delta_{i+1}}, \dots, u^{\delta_{2i-1}})$.

В частности, если $n = 1$, то i, r не зависят от выбора локальных параметров; если $i = 1$, то a не зависит от выбора локальных параметров.

Теорема 3. *Пусть K, K' – расщепимые двумерные локальные тела нулевой характеристики, $k \subset Z(K)$, $k' \subset Z(K')$, и $\alpha^n = \mathrm{Id}$, $\alpha'^{n'} = \mathrm{Id}$ для некоторых $n, n' \geqslant 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = \xi u + xz^i + yz^{2i}$, где $\xi^n = 1$, $i = i(0, \dots, 0)$, $x = cu^r$, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r-1, i) = e > 1$, и $c = 1$ иначе; $y = (a + r(i+1)/2)u^{-1}x^2$, $a = a(0, \dots, 0)$. При этом если $n = 1$, а $i = \infty$, тело K коммутативно.*

(ii) *K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и наборы (n, ξ, i, r, c, a) и $(n', \xi', i', r', c', a')$ совпадают.*

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе, а также Н. И. Дубровину за ценные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Fimmel T., Parshin A. N. Introduction to the Higher Adelic Theory // Preprint, 1996. [**2**] Паршин А. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №4. С. 736–773. [**3**] Паршин А. Н. О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Труды МИАН. Т. 224. [**4**] Cohn P. M. Skew Fields. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
21.07.1999