Аг. Х. Ханмамедов, Об интегрировании начально-краевой задачи для цепочки Вольтерра,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 8, 1134–1136

https://www.mathnet.ru/de11343

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 8, с. 1134–1136

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.962.2

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА

© 2005 г. Аг. Х. Ханмамедов

Известно, что метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать задачу Коши для некоторых нелинейных уравнений [1–5]. Как следует из [6], в общем случае начально-краевую задачу для таких уравнений не удается решить столь же эффективно, как задачу Коши на всей оси.

Цепочка Вольтерра

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2}a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad a_n = a_n(t) > 0, \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \tag{1}$$

известна как пример, имеющий различные приложения в физике плазмы, зоологии [1, с. 60; 3, с. 56].

В настоящей работе методом обратной задачи рассеяния построено быстроубывающее решение начально-краевой задачи

$$a_n(0) = a_n^0, \quad a_{2n}^0 \to A_1 > 0, \quad a_{2n+1}^0 \to A_2 > 0, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

$$a_0 = 0 \tag{3}$$

для уравнения (1), т.е. решение $a_n = a_n(t)$, удовлетворяющее при любом $T > 0$ условиям $a_n \in C^{(1)}[0,T)$, $\sup\limits_{0\le t\le T} \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - \widehat{a}_n| < \infty$, где $\widehat{a}_{2n} \equiv A_1$, $\widehat{a}_{2n+1} \equiv A_2$. Возможность рассмотрения, вообще говоря, расходящихся начальных данных является особенностью предлагаемого способа. Задача Коши для уравнения (1) изучалась в работах [1, с. 60; 5]. Для определенности примем, что $A_1 \ge A_2$.

1. Рассмотрим разностное уравнение

$$a_{n-1}y_{n-1} + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad a_0 = A_1, \tag{4}$$

с граничным условием

$$y_0 = 0, \tag{5}$$

где коэффициент $a_n > 0$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - \widehat{a}_n| < \infty$. Через Γ обозначим комплексную λ-плоскость с разрезами по отрезкам $[-(A_1 + A_2), -(A_1 - A_2)]$ и $[A_1 - A_2, A_1 + A_2]$. В плоскости Γ рассмотрим функцию $z = z(\lambda) = (\lambda^2 - A_1^2 - A_2^2)/(2A_1A_2) + [((\lambda^2 - A_1^2 - A_2^2)/(2A_1A_2))^2 - 1]^{1/2}$, выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $z(\infty) = 0$. Пусть $e_{2n} = ((A_1 z + A_2)/\lambda)z^n$, $e_{2n+1} = z^{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$, и $f_n = f_n(\lambda)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n - e_n) = 0$. Как показано в работах [7, 8], такое решение существует, единственно и представимо в виде

$$f_n = \alpha_n\left(e_n + \sum_{k=1}^{\infty} A(n, n+2k)e_{n+2k}\right), \tag{6}$$

где $\alpha_n = 1 + o(1)$, $n \to \infty$, $A(n,m) = O(\sum_{k=[(n+m)/2]} |a_k - \widehat{a}_k|)$. Величины α_n, $A(n,m)$ и коэффициент a_n уравнения (4) связаны равенствами

$$\frac{a_{n-1}}{\widehat{a}_{n-1}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, \quad \frac{a_n^2}{\widehat{a}_n} = \widehat{a}_n + \widehat{a}_{n+1}A(n,n+2) - \widehat{a}_{n-1}A(n-1,n+1). \tag{7}$$

Согласно определению функции $z(\lambda)$ и представлению (6), функция $f_0(\lambda)$ регулярна в Γ и непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$. Заметим, что задача (4), (5) порождает в пространстве $l_2(1,\infty)$ последовательностей $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ самосопряженный ограниченный оператор. Кроме того, из выбора функции $z = z(\lambda)$ следует, что $|z(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \Gamma$ (см. также [8]). Поэтому в силу (6) нули функции $f_0(\lambda)$ являются собственными значениями упомянутого выше оператора. Отсюда и из (6) вытекает, что в плоскости Γ нули λ_k функции $f_0(\lambda)$, если они существуют, вещественны и симметричны относительно начала координат: $\lambda_k = \pm\nu_k$, $\nu_k \ge 0$.

Воспользовавшись методикой, развитой в монографии [4, с. 174] и в работах [9, 10], докажем, что функция $f_0(\lambda)$ может иметь только конечное число нулей $\pm\nu_k$, $k=\overline{1,N}$, а функция $(z-z^{-1})/(\lambda f_0(\lambda))$ ограничена вблизи точек $A_1 \pm A_2$ и $-(A_1 \pm A_2)$.

Заметим, что при $\lambda \in \partial\Gamma$, $\lambda^2 \neq (A_1 \pm A_2)^2$, пара $f_n(\lambda)$ и $\overline{f_n(\lambda)}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (4), так как их вронскиан $W[f_n, \overline{f_n}] = a_n(f_n\overline{f_{n+1}} - f_{n+1}\overline{f_n})$ равен $((A_1A_2)/\lambda)(z-z^{-1})$.

Обозначим через $\varphi_n = \varphi_n(\lambda)$ решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$. Тогда имеет место равенство

$$A_2(z^{-1}-z)\varphi_n(\lambda) = \lambda f_0(\lambda)\overline{f_n(\lambda)} - \lambda\overline{f_0(\lambda)}f_n(\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma. \tag{8}$$

Далее, полагая в равенстве $W[f'_{n-1}(\lambda), \varphi_{n-1}(\lambda)] - W[f'_n(\lambda), \varphi_n(\lambda)] = f_n(\lambda)\varphi_n(\lambda)$ $\lambda = \pm\nu_k$ и суммируя по n от 1 до ∞, получаем

$$A_1 f_1(\pm\nu_k)\frac{df_0(\pm\nu_k)}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\pm\nu_k)|^2. \tag{9}$$

Обозначим $s(\lambda) = \overline{f_0(\lambda)}/f_0(\lambda)$, $M_k^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\pm\nu_k)|^2$, $k=\overline{1,N}$. Набор величин $\{s(\lambda);\ \pm\nu_k,\ M_k^2 > 0,\ k=\overline{1,N}\}$ назовем данными рассеяния для задачи (4), (5). Обратная задача рассеяния для задачи (4), (5) состоит в восстановлении коэффициента a_n по данным рассеяния. Введем обозначение

$$F(n,m) = \sum_{\lambda=\pm\nu_k} M_k^2 e_n(\lambda)e_m(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{\lambda s(\lambda)}{A_1A_2(z-z^{-1})}e_n(\lambda)e_m(\lambda)\,d\lambda.$$

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$F(n,n+2k) + A(n,n+2k) + \sum_{m=1}^{\infty}A(n,n+2m)F(n+2m,n+2k) = 0, \quad k=1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$\alpha_n^{-2} = 1 + F(n,n) + \sum_{m=1}^{\infty}A(n,n+2k)F(n+2m,n), \quad n=1,2,\ldots \tag{11}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (8) на $(2\pi i)^{-1}\lambda f_0^{-1}(\lambda)e_m(\lambda)/(A_1A_2(z^{-1}-z))$ при $m \geq n$ и проинтегрируем по $\partial\Gamma$. Используя равенства (6) и (9), а также учитывая, что $z(\lambda) = A_1A_2/\lambda^2 + O(1/\lambda^3)$ при $\lambda \to \infty$, по теореме о вычетах получаем соотношения (10) и (11).

Уравнение (10) позволяет решить обратную задачу. Сначала $A(n,m)$ найдем из уравнения (10), которое имеет единственное решение. После этого коэффициент a_n можно найти по любой из формул (7).

2. Предположим теперь, что a_n при $n \geq 1$ является быстроубывающим решением задачи (1)–(3). На последовательностях $u = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ введем разностные выражения $\mathcal{L}$ и A, полагая $(\mathcal{L}u)_1 = a_1u_2$; $(\mathcal{L}u)_n = a_{n-1}u_n + a_nu_{n+1}$, $n>1$, $(Au)_j = -(1/2)a_ja_{j+1}u_{j+2}$, $j=1,2$; $(Au)_n = (1/2)(a_{n-2}a_{n-1}u_{n-2} - a_na_{n+1}u_{n+2})$, $n>2$.

При каждом t выражения $\mathcal{L}$ и A порождают в пространстве $l_2(1,\infty)$ симметрический и кососимметрический (их тоже обозначим через $\mathcal{L}$ и A) ограниченные операторы соответственно $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, $A^* = -A$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что соотношение

$$\dot{\mathcal{L}} = A\mathcal{L} - \mathcal{L}A \tag{12}$$

равносильно уравнению (1) с учетом граничного условия (3).

Из (12) и кососимметричности оператора A вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Если* $\psi = \{\psi_n(t,\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ *– решение уравнения* $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$, *то* $\dot\psi - A\psi$ *удовлетворяет тому же уравнению* $\mathcal{L}(\dot\psi - A\psi) = \lambda(\dot\psi - A\psi)$. *Нормированные собственные функции* $\psi^{(k)}$ $(\|\psi^{(k)}\|_{l_2(1,\infty)} = 1)$ *оператора* $\mathcal{L}$ *удовлетворяют уравнению* $\dot\psi^{(k)} - A\psi^{(k)} = 0$.

Лемма 3. *Если в уравнении (4) коэффициент* a_n *при* $n \geq 1$ *является быстроубывающим решением задачи (1)–(3), то динамика данных рассеяния описывается формулами*

$$\begin{gathered} s(\lambda,t) = s(\lambda,0)\exp\{A_1A_2(z^{-1}-z)t\}; \quad \nu_k(t) = \nu_k(0) = \nu_k; \\ M_k^2(t) = M_k^2(0)\exp\{A_1A_2[z^{-1}(\nu_k) - z(\nu_k)]t\}, \quad k=\overline{1,N}. \end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Тогда справедливо равенство (8), где φ_n и f_n зависят также от t: $\varphi_n = \varphi_n(t,\lambda)$, $f_n = f_n(t,\lambda)$. Ясно, что $\psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\psi_n = A_1A_2(z^{-1}-z)\varphi_n$, является решением уравнения $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ с начальным условием $\psi_1 = A_2(z^{-1}-z)$. По лемме 2 разность $\dot\psi - A\psi$ удовлетворяет тому же уравнению с начальным условием $(\dot\psi - A\psi)_1 = (1/2)(\lambda^2 - a_1^2)\psi_1$, откуда следует, что $\dot\psi - A\psi = (1/2)(\lambda^2 - a_1^2)\psi$. Доопределив $(\dot\psi - A\psi)_0$ нулем, получим, что $(\dot\psi - A\psi)_n$ является решением уравнения (4).

С другой стороны, согласно (6), (8), при $n\to\infty$ имеем асимптотику $(\dot\psi - A\psi)_n = \rho(\lambda)\overline{e_n} - \overline{\rho(\lambda)}e_n + o(1)$, где $\rho(\lambda) = \dot f_0(t,\lambda) + ((A_1A_2)/2)(z^{-1}-z)f_0(t,\lambda)$. Но решение, определяемое этой асимптотикой, единственно. Поэтому имеем

$$\frac{A_2}{2}(\lambda^2 - a_1^2)(z^{-1}-z)\varphi_n(t,\lambda) = \rho(\lambda)\overline{f_n(t,\lambda)} - \overline{\rho(\lambda)}f_n(t,\lambda).$$

Сопоставляя это равенство с (8), получаем равенство

$$\dot f_0(t,\lambda) = \frac{1}{2}\{\lambda^2 - a_1^2 + A_1A_2(z^{-1}-z)\}f_0(t,\lambda),$$

из которого вытекают два первых равенства из (13).

Далее, если $\psi^{(k)}$ – нормированная собственная функция оператора $\mathcal{L}$, соответствующая собственному значению ν_k, то $\psi_n^{(k)} = C(t)f_n(t,\nu_k)$, откуда следует, что $M_k^2(t) = C^2(t)$. Воспользовавшись представлением (6) и леммой 2, найдем, что

$$\dot C(t) + \frac{A_1A_2}{2}\{z(\nu_k) - z^{-1}(\nu_k)\}C(t) = 0.$$

Тогда из последнего соотношения получаем третье равенство из (13).

Из однозначной разрешимости обратной задачи и из (13) вытекает следующая

Теорема. *Решение задачи (1)–(3) единственно и оно может быть найдено по следующему алгоритму.*

Для $a_n = a_n(0)$ рассматривается задача (4), (5) с данными рассеяния $\{s(\lambda,0);\ \pm\nu_k(0);\ M_k^2(0),\ k=\overline{1,N}\}$ ее; набор величин $\{s(\lambda,t);\ \pm\nu_k(t);\ M_k^2(t),\ k=\overline{1,N}\}$ находится по формуле (13) и относительно этого набора решается обратная задача. Формула (7), записанная в момент времени t, дает решение задачи (1)–(3).

Замечание. Следуя соответствующим рассуждениям В.А. Марченко [4, с. 299], можно доказать, что если начальные условия (2) достаточно быстро стремятся к своим пределам, то полученная указанным выше способом функция $a_n(t)$ удовлетворяет задаче (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., 1980.
2. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
3. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М., 1984.
4. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
5. *Верещагин В.Л.* // Теор. мат. физика. 1997. Т. 111. № 3. С. 335–344.
6. *Хабибулин И.Т.* // Теор. мат. физика. 1999. Т. 119. № 3. С. 397–404.
7. *Ханмамедов Аг.Х.* // Докл. НАН Азербайджана. 2001. Т. 57. № 1–3. С. 3–11.
8. *Ханмамедов Аг.Х.* // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. № 4. С. 926–937.
9. *Гусейнов Г.Ш.* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 6. С. 1289–1292.
10. *Гусейнов Г.Ш.* Обратные задачи теории рассеяния для самосопряженных разностных операторов второго порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1976.

Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию 10.07.2003 г.