М. З. Гараев, Х. Хессами Пилеруд, Замечание о системе диофантовых уравнений Пелля,
Фундамент. и прикл. матем., 1999, том 5, выпуск 3, 927–930

Замечание о системе диофантовых уравнений Пелля

М. З. ГАРАЕВ, Х. ХЕССАМИ ПИЛЕРУД
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 511.3

Ключевые слова: система диофантовых уравнений Пелля, фундаментальное решение.

Аннотация

В работе показано, что некоторые системы диофантовых уравнений Пелля могут быть решены применением результатов работ В. Люнгрена.

Abstract

M. Z. Garaev, Kh. Hessami Pilehrood, A note on the system of Pell's equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 3, p. 927–930.

In this paper it is demonstrated that some systems of Pell's equations can be solved by applying W. Ljunggren's results.

§ 1. Введение

В работе [1] установлено, что система диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3z^2 = 1, \\ y^2 - 2z^2 = 1 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z. Доказательство основано на полученных там же результатах по теории совместных рациональных приближений.

Подобные системы уравнений иногда могут быть решены с использованием некоторых результатов работ В. Люнгрена. Следующая лемма является одним из таких утверждений.

Лемма. *Уравнение*

$$x^2 - Dy^4 = 1,$$

где D — натуральное число, не являющееся полным квадратом, имеет не более двух пар решений в натуральных числах x, y. Если оно имеет две пары

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 3, с. 927–930.

решений $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, *где* $y_2 > y_1$, *то* $x_1 + \sqrt{D}y_1^2$ *является фундаментальным решением уравнения* $u^2 - Dv^2 = 1$, *причём либо*

$$x_2 + \sqrt{D}y_2^2 = (x_1 + \sqrt{D}y_1^2)^2,$$

либо

$$x_2 + \sqrt{D}y_2^2 = (x_1 + \sqrt{D}y_1^2)^4.$$

По поводу этой леммы см. [2], а также [3, стр. 270–271].

На основе этой леммы мы докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* a *— натуральное число. Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)z^2 = 1, \\ y^2 - az^2 = 1 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

Теорема 2. *Пусть* a *— натуральное число. Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 - (a+2)z^2 = 1, \\ y^2 - az^2 = 1 \end{cases}$$

в натуральных числах x, y, z *не имеет решений, если* $a+1$ *не является полным квадратом, и имеет единственное решение* $x = 2a+3$, $y = 2a+1$, $z = 2\sqrt{a+1}$, *если* $a+1$ *является полным квадратом.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть натуральные числа a, x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)z^2 = 1, \\ y^2 - az^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$(x-y)(x+y) = z^2.$$

Рассмотрим два случая в зависимости от четности числа $x - y$.

Случай 1): $x - y$ — чётное число. В этом случае существуют натуральные числа u, v, такие что

$$x + y = 2u^2, \quad x - y = 2v^2, \quad z = 2uv.$$

Поэтому

$$(u^2 - (2a+1)v^2)^2 - (4a^2 + 4a)v^4 = 1.$$

Если $v = 1$, то $u^2 = 2(2a+1)$, что невозможно. Следовательно, $v \neq 1$.

Это означает, что уравнение $X^2 - (4a^2 + 4a)Y^4 = 1$, кроме решения $(X, Y) = (2a+1, 1)$, имеет ещё одно решение $(X, Y) = (|u^2 - (2a+1)v^2|, v)$. Тогда согласно лемме будет выполняться соотношение

$$|u^2 - (2a+1)v^2| + \sqrt{4a^2+4a}\, v^2 = (2a + 1 + \sqrt{4a^2+4a})^k,$$

где k либо равно 2, либо равно 4. Ввиду того, что $v^2 \neq 2(2a+1)$, может иметь место только случай $k = 4$. Поэтому

$$v^2 = 4(2a+1)(2(2a+1)^2 - 1), \quad \text{т. е.} \quad v^2 \equiv 4 \pmod 8.$$

С другой стороны,

$$|u^2 - (2a+1)v^2| = (2a+1)^4 + 6(2a+1)^2(4a^2+4a) + (4a^2+4a)^2,$$

откуда $u^2 \equiv 4 \pm 1 \pmod 8$, чего быть не может.

Случай 2): $x-y$ — нечётное число. В этом случае существуют натуральные числа u, v, такие что $x + y = u^2$, $x - y = v^2$, $z = uv$. Поэтому

$$\left(\frac{u^2 - (2a+1)v^2}{2}\right)^2 - (a^2+a)v^4 = 1.$$

Фундаментальным решением уравнения $U^2 - (a^2+a)V^2 = 1$ является пара $(U, V) = (2a+1, 2)$. Поэтому при некотором натуральном числе n

$$\left|\frac{u^2 - (2a+1)v^2}{2}\right| + (\sqrt{a^2+a})v^2 = (2a+1+2\sqrt{a^2+a})^n.$$

Следовательно, v — чётное число, а значит, u — также чётное число. Очевидно, что этого быть не может.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть натуральные числа a, x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - (a+2)z^2 = 1, \\ y^2 - az^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$(x-y)(x+y) = 2z^2.$$

Значит, существуют натуральные числа u, v, такие что

$$x \pm y = 2u^2, \quad x \mp y = 4v^2, \quad z = 2uv. \tag{1}$$

Следовательно,

$$(2v^2 - (a+1)u^2)^2 - (a^2+2a)u^4 = 1. \tag{2}$$

Пусть $u \neq 1$. Тогда уравнение $X^2 - (a^2+2a)Y^4 = 1$, кроме решения $(X, Y) = (a+1, 1)$, имеет ещё одно решение $(X, Y) = (|2v^2 - (a+1)u^2|, u)$. Согласно лемме это означает, что

$$|2v^2 - (a+1)u^2| + \sqrt{a^2+2a}\,u^2 = (a+1+\sqrt{a^2+2a})^k,$$

где либо $k = 2$, либо $k = 4$. В обоих случаях получим, что u — чётное число. Ввиду (2) это невозможно. Поэтому $u = 1$. Из (2) имеем, что $a + 1 = v^2$, а из (1) найдём, что

$$x = 2a + 3, \quad y = 2a + 1, \quad z = 2\sqrt{a+1}.$$

Теорема 2 доказана.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за научное руководство.

Литература

[1] J. Rickert. Simultaneous rational approximations and related Diophantine equations // Math. Proc. Cambridge philos. Soc. — 1993. — V. 113. — P. 461–472

[2] W. Ljunggren. Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein biquadratischer Zahlkörper // Oslo Vid–Acad Skrifter. — 1936. — V. 1, No. 12.

[3] L. J. Mordell. Diophantine equations. — London: Academic precc, 1969.

Статья поступила в редакцию в июле 1998 г.