A. M. Golovin, T. A. Ratnikova, Flow past a cylinder in a transverse magnetic field in case of small Reynolds and Hartman numbers,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1992, Number 6, 30–34

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2506

Интегральный инвариант равен

$$\int_D (\mu+\mathbf{a}^2)^{\frac{3}{2}}\, d\omega d\mathbf{S},$$

где $D \in \mathbf{R}^3\{\omega\} \times \mathbf{S}^2\{\mathbf{n}\}$, $\mathbf{S}^2\{\mathbf{n}\}:(\mathbf{n},\ \mathbf{n})=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Избранные труды по механике и математике. М., 1954. 455—471.
2. Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. 8, вып. 3. 85—107.
3. Татаринов Я. В. Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела. 1988. № 1. 25—33.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М., 1986.

Поступила в редакцию 02.07.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 6

УДК 538.4

А. М. Головин, Т. А. Ратникова

ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ГАРТМАНА

Обтекание цилиндра проводящей жидкостью в магнитном поле при малых числах Рейнольдса и Гартмана исследовалось в работах [1—3] и других.

В настоящей работе рассматривается стационарное обтекание бесконечного круглого цилиндра радиуса a однородным на бесконечности потоком вязкой, несжимаемой, электропроводящей жидкости, вектор скорости $\mathbf{U}$ которой перпендикулярен образующей цилиндра. Перпендикулярно образующей цилиндра приложено однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$.

Начало декартовой системы координат $oxyz$ совместим с одной из точек на оси цилиндра, ось oz — с вектором индукции магнитного поля, ось oy — с образующей цилиндра, плоскость oxz совместим с плоскостью, образованной векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{B}$.

При малых гидродинамическом и магнитном числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}\ll 1$, $\mathrm{Re}_m \ll 1$), малом числе Гартмана ($M\ll 1$) и при условии $\mathrm{Re}\ll M^2$ движение задается следующей системой уравнений, записанных в безразмерных переменных [2]:

$$\Delta\mathbf{v}+M^2\{[\mathbf{i}_3\times\nabla\varphi]+[[\mathbf{v}\times\mathbf{i}_3]\times\mathbf{i}_3]\}=\nabla p,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ \Delta\varphi=(\mathbf{i}_3\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}),\ M=Ba\sqrt{\sigma/\eta}. \qquad (1)$$

Здесь η, σ — динамическая вязкость и электропроводимость жидкости, обтекающей цилиндр, $\mathbf{i}_3$ — единичный орт вдоль оси oz. Расстояния, скорость $\mathbf{v}$, давление p, индукция магнитного поля и электрический потенциал φ приведены к безразмерному виду делением на a, U, $\eta U/a$, B, aUB соответственно.

Граничные условия имеют вид

$$r=1: \mathbf{v}=0,\ (\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\varphi)=(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\varphi'),$$

$$\sigma(\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi)=\sigma'(\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi'), \tag{2}$$

$$r\gg 1: \mathbf{v}=\mathbf{k},\ \mathbf{k}=\mathbf{U}/U,$$

$$\varphi_\infty=-y\cos\alpha,\ p=p_\infty,$$

где τ, $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к цилиндру, α — угол между $\mathbf{U}$ и осью ox, штрихованные величины здесь и далее относятся к области внутри цилиндра.

Естественно предположить, что задача однородна по y, $v_y=0$ и все величины зависят только от x и z:

$$x=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta.$$

Для решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2) воспользуемся методом точечных сил Озеена [3], модифицированным в [4] таким образом, чтобы в приближении с точностью до членов порядка M включительно учесть влияние конечных размеров обтекаемого тела.

В настоящей работе предпринята попытка учета членов порядка M^2 с помощью обобщенного метода Озеена.

Для определения полной силы $\mathbf{F}$, действующей на единицу длины цилиндра, необходимо в рассматриваемом приближении учесть действие силы Лоренца. Полная сила (размерная) может быть представлена в виде

$$\eta U F_i=\int_S (P_{ij}+T'_{ij})\,n_j dS=\int_S P_{ij}n_j dS+\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}T'_{ij}\,dV=$$

$$=\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(T'_{ij}-T_{ij})\,dV+\int_S (P_{ij}+T_{ij})\,n_j dS,$$

где P_{ij} и T_{ij} — компоненты тензоров гидродинамических и максвелловских напряжений, dS и dV — элементы боковой поверхности и объема цилиндра единичной длины.

Уравнение движения (1) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(P_{ij}+T_{ij})=\eta U F_{0i}\,[\delta(\mathbf{r})+A_1\Delta\delta(\mathbf{r})+A_2\Delta^2\delta(\mathbf{r})+\ldots]. \tag{3}$$

Первый член в правой части порождает решение, создаваемое точечной силой, что соответствует асимптотике реального течения, обтекающего цилиндр на расстояниях, существенно превышающих его радиус ($r\gg1$). Следующие члены в правой части, содержащие особенности более высокого порядка, выбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям (2) на поверхности цилиндра.

Таким образом, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}=[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]_i,\ \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j}=[\mathbf{j}'\times\mathbf{B}]_i,$$

где $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$ — плотности электрического тока вне и внутри цилиндра, можно получить

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0+\frac{1}{\eta U}\int\limits_V[(\mathbf{j}'-\mathbf{j})\times\mathbf{B}]\,dV.$$

Как известно [2], в рассматриваемой задаче электрическое поле $\mathbf{E}$ постоянно, однородно и имеет только одну компоненту $E_y=UB\cos\alpha$.

Поэтому

$$\frac{1}{\eta U}\int\limits_V[(\mathbf{j}'-\mathbf{j})\times\mathbf{B}]\,dV=\pi M^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-1\right)\mathbf{i}_1\cos\alpha, \qquad (4)$$

где $\mathbf{i}_1$ — единичный орт вдоль оси ox.

Будем искать решение уравнений (1) или (3) с граничными условиями (2) в виде

$$v_i=F_{0j}U_{ij}+k_i,\ \ p=(\mathbf{F}_0\cdot\mathbf{P})+p_\infty,\ \ \varphi=(\mathbf{F}_0\cdot\mathbf{\Phi})+\varphi_\infty,$$

где компоненты фундаментального тензора U_{ij} и векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{\Phi}$ выражаются через функцию G следующим образом:

$$U_{ij}=\delta_{ij}\Delta G-\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$\mathbf{P}=-\nabla\Delta G+\mathbf{i}_3M^2\frac{\partial G}{\partial z}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{\Phi}=[\mathbf{i}_3\times\nabla G].$$

Попытаемся искать функцию G в виде ряда

$$G=G_0+A_1\Delta G_0+A_2\Delta\Delta G_0+\ldots=G_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Delta^iG_0,$$

где A_i — некоторые постоянные. Функция G_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta G_0-M^2\frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2}=\delta(\mathbf{r}). \qquad (6)$$

Уравнение (6) сводится к системе уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta G_0&=-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{Mz}{2}\right),\\ \frac{\partial G_0}{\partial z}&=-\frac{1}{2\pi M}K_0\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{Mz}{2}\right),\end{aligned} \qquad (7)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

Вместо граничного условия отсутствия скольжения на поверхности цилиндра поставим условие

$$r=1:\int\limits_0^{2\pi}\mathbf{v}\,d\theta=0. \qquad (8)$$

В соответствии с (5) имеем

$$\mathbf{v}=\mathbf{k}+\mathbf{i}_1\left(F_{0x}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-F_{0z}\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial z}\right)+\mathbf{i}_3\left(F_{0z}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-F_{0x}\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial z}\right),$$

где, как следует из (7),

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial z}=\frac{x}{4\pi r}K_1\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{Mz}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi}\left[K_1\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{Mz}{2}\right)\frac{z}{r}+K_0\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{Mz}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi}\left[K_1\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{Mz}{2}\right)\frac{z}{r}-K_0\left(\frac{Mr}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{Mz}{2}\right)\right].$$

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial^2\Delta^i G_0}{\partial x\partial z}\right|_{r=1}d\theta=0,\ \forall i\geqslant 0.$$

Таким образом, условия (8) при $r=1$ примут вид:

$$\int_0^{2\pi}\left[\cos\alpha+F_{0x}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\frac{\partial^2\Delta^i G_0}{\partial z^2}\right]d\theta=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\sin\alpha+F_{0z}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\frac{\partial^2\Delta^i G_0}{\partial x^2}\right]d\theta=0 \qquad (9)$$

$(A_0=1)$.

Выясним, какова структура рядов в (9). Можно показать, что при $M\ll 1$ члены ряда убывают, как $O(M^{2i})$. Для того чтобы вычислить силу с точностью до M^2 включительно, достаточно взять два члена ряда. Используя (8), из (9) получаем систему

$$-\frac{2\pi\cos\alpha}{F_{0x}}=\frac{1}{2}\left[K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-K_0\left(\frac{M}{2}\right)I_0\left(\frac{M}{2}\right)\right]+A_1\left[K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)\left(2+\frac{M^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{M}{2}K_0\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)-\frac{M}{2}K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_0\left(\frac{M}{2}\right)-\frac{M^2}{2}K_0\left(\frac{M}{2}\right)I_0\left(\frac{M}{2}\right)\right],$$

$$\frac{2\pi\sin\alpha}{F_{0z}}=\frac{1}{2}\left[K_0\left(\frac{M}{2}\right)I_0\left(\frac{M}{2}\right)+K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)\right]+$$

$$+A_1\left[2K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)+\frac{M}{2}K_0\left(\frac{M}{2}\right)I_1\left(\frac{M}{2}\right)-\frac{M}{2}K_1\left(\frac{M}{2}\right)I_0\left(\frac{M}{2}\right)\right],$$

где $I_i(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Для определения коэффициента A_1 потребуем, чтобы не только $\int_0^{2\pi}\mathbf{v}|_{r=1}d\theta=0$, но и

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{v}|_{r=1}\cos m\theta d\theta=0,\ \int_0^{2\pi}\mathbf{v}|_{r=1}\sin m\theta d\theta=0,\ m=1, 2, \ldots. \qquad (10)$$

Можно показать, что при $m=2l+1$ интегралы (10) тождественно равны нулю, а при $m=2l$ с точностью до M^2 всегда получаем одну и ту же систему уравнений, позволяющую определить коэффициент A_1 и силу F_0, действующую на цилиндр:

$$F_{0x}=\frac{128\pi\cos\alpha}{\Omega(32+12M^2)-16-M^2}, \qquad F_{0z}=\frac{128\pi\sin\alpha}{\Omega(32+4M^2)+16+M^2},$$

где $\Omega=-\gamma+\ln(4/M)$, $\gamma=0{,}577$ — постоянная Эйлера.

Полная безразмерная сила, равная размерной, отнесенной к ηU, действующая на единицу длины цилиндра, с учетом (5) имеет вид

$$F_x=\frac{8\pi\cos\alpha}{2\Omega-1}\left\{1-\frac{M^2}{16(2\Omega-1)}\left[8\Omega^2+4\Omega+\right.\right.$$

$$\left.\left.+1-\frac{2\sigma'}{\sigma}(2\Omega-1)^2\right]+O(M^4)\right\},$$

$$F_z=\frac{8\pi\sin\alpha}{2\Omega+1}\left[1-\frac{M^2}{16}\,\frac{4\Omega+1}{2\Omega+1}+O(M^4)\right].$$

Итак, метод точечных сил позволяет прийти к результатам, согласующимся с ранее полученными [2], несколько более простым, как представляется авторам, образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дамбург Р. Обтекание бесконечного цилиндра вязкой проводящей жидкостью в присутствии магнитного поля // Изв. АН Латв. ССР. 1959. № 5. 81.
2. Yosinobu H., Kakutani T. Two-dimensional Stokes flow of an electrically conducting fluid in a uniform magnetic field // J. Phys. Soc. 1959. **14**, N 10. 1433—1444.
3. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., 1970.
4. Головин А. М., Натяганов В. Л. Магнитногидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1978. № 6. 19.

Поступила в редакцию
10.09.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 6

УДК 531.01+517.9

С. В. Болотин

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ К МИНИМАЛЬНЫМ ТОРАМ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ

1. Формулировка результатов. Пусть M^m — компактное конфигурационное многообразие лангранжевой системы, а $L\in C^\infty(P)$ — функция Лагранжа на расширенном фазовом пространстве $P=TM\times\mathbf{T}$, 1-периодически зависящая от времени $t\in\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Предположим, что выполнены следующие условия.

Выпуклость по скорости. При всех $x\in M$ и $t\in\mathbf{R}$ функция Лагранжа $L(x, v, t)$ строго выпукла по скорости $v\in T_xM$.

Рост на бесконечности. При $|v|\to\infty$ имеем $L(x, v, t)/|v|\to\infty$ равномерно по $x\in M$, $t\in\mathbf{R}$. Здесь $|\ |$ — любая риманова метрика на M.

Полнота. Решения уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа L и произвольными начальными условиями неограниченно продолжаются.