ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2024, т. 326, с. 314–329

Звездные подразделения и полиэдральные произведения*

С. Терио[a]

Поступило 07.07.2023; после доработки 07.07.2023; принято к публикации 22.03.2024

Изучаются гомотопические свойства полиэдральных произведений, связанные с операцией звездного подразделения на симплициальных комплексах. В частном случае полиэдральных произведений, построенных на парах $(S^{n_i}, *)$ для односвязных сфер S^{n_i}, доказаны результаты о росте рациональных гомотопических групп и подгрупп кручения в гомотопических группах.

Ключевые слова: гомотопический тип, полиэдральное произведение, симплициальный комплекс, звездное подразделение.

MSC: 55U10, 55P35, 55Q52 **DOI:** https://doi.org/10.4213/tm4398

1. ВВЕДЕНИЕ

Полиэдральные произведения — это пространства, получающиеся склеиванием заданных “пространств-ингредиентов”, способ склеивания которых кодируется некоторым симплициальным комплексом. Гомотопические свойства полиэдральных произведений отражают как гомотопические свойства “пространств-ингредиентов”, так и комбинаторику симплициального комплекса. В последнее время была проведена обширная работа по изучению гомотопических свойств полиэдральных произведений с различных точек зрения: в рамках стабильной теории гомотопий [1], теории когомологий [2, 7], нестабильной теории гомотопий [11, 12, 15, 18], рациональной теории гомотопий [9].

Существует множество операций над симплициальными комплексами, и возникает естественный вопрос, что при данной операции происходит с соответствующими полиэдральными произведениями с гомотопической точки зрения. Операция связной суммы была рассмотрена в [21], а в настоящей работе мы имеем дело с операцией звездного подразделения.

Чтобы точно сформулировать результаты, введем некоторые определения. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Для $1 \le i \le m$ пусть (X_i, A_i) — пара пунктированных CW-комплексов, в которой A_i — пунктированное подпространство в X_i. Пусть $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ — последовательность таких CW-пар. Для каждого симплекса (грани) $\sigma \in K$ пусть $(\underline{X}, \underline{A})^\sigma$ — подпространство в $\prod_{i=1}^m X_i$, определяемое формулой

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = \prod_{i=1}^m Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{если} \ \ i \in \sigma, \\ A_i, & \text{если} \ \ i \notin \sigma. \end{cases}$$

*Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Theriault S.* Stellar subdivision and polyhedral products // Proc. Steklov Inst. Math. 2024. V. 326.

[a]School of Mathematical Sciences, University of Southampton, Southampton, UK.

✉ S.D.Theriault@soton.ac.uk

© С. Терио, 2024

Полиэдральным произведением, определяемым последовательностью $(\underline{X}, \underline{A})$ и комплексом K, называется пространство

$$(\underline{X}, \underline{A})^K = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subseteq \prod_{i=1}^m X_i.$$

Пусть, например, каждое пространство A_i — это точка. Тогда если K — несвязное объединение m точек, то $(\underline{X}, \underline{*})^K$ представляет собой букет $X_1 \vee \ldots \vee X_m$, а если K — стандартный $(m-1)$-симплекс, то $(\underline{X}, \underline{*})^K$ — произведение $X_1 \times \ldots \times X_m$.

Предположим теперь, что K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и σ — его грань. *Звездным подразделением* комплекса K в грани σ называется комплекс, получающийся из K удалением грани σ вместе со всеми гранями, содержащими σ, и последующим вклеиванием джойна конуса над границей грани σ и линка грани σ. Если обозначить вершину конуса через v, то звездное подразделение — это симплициальный комплекс

$$\mathrm{sd}_\sigma(K) = (K \setminus \sigma) \cup \big(\{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)\big).$$

Строгие определения всех используемых понятий даны в разд. 2.

Тривиальным примером является ситуация, когда σ — вершина i. Тогда $\partial\sigma = \varnothing$ и легко понять, что комплекс $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ симплициально изоморфен K, причем вершина v заменяет вершину i. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда грань σ имеет более одной вершины.

Мы изучаем влияние звездного подразделения на полиэдральные произведения в двух ключевых случаях: для пар $(X_i, *)$ и (CA_i, A_i), где CA_i — приведенный конус над A_i. А именно, мы изучаем, что представляет собой переход от $(\underline{X}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$ к $(\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ или от $(\underline{CA}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}$ к $(\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ с гомотопической точки зрения.

Пусть пара (X_v, A_v) соответствует вершине v. В дальнейшем через $X_v \rtimes G$ мы обозначаем фактор-пространство $(X_v \times G)/{\sim}$, в котором G стянуто в точку, а через $A_v * G$ — джойн пространств, который гомотопически эквивалентен $\Sigma A_v \wedge G$. Наши основные результаты следующие.

Теорема 1.1. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, σ — его грань не менее чем с двумя вершинами и v — вершина, не принадлежащая K. Тогда существует гомотопическое расслоение*

$$X_v \rtimes G \to (\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{X}, \underline{*})^{K \setminus \sigma},$$

где G — гомотопический слой отображения $(\underline{X}, \underline{*})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \to (\underline{X}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$, и это расслоение расщепляется после взятия петель, что приводит к гомотопической эквивалентности

$$\Omega(\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega(\underline{X}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} \times \Omega(X_v \rtimes G).$$

Теорема 1.2. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, σ — его грань не менее чем с двумя вершинами и v — вершина, не принадлежащая K. Тогда существует гомотопическое расслоение*

$$A_v * G \to (\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{CA}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

где G — гомотопический слой отображения $(\underline{CA}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to (\underline{CA}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}$, и это расслоение расщепляется после взятия петель, что приводит к гомотопической эквивалентности

$$\Omega(\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega(\underline{CA}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \times \Omega(A_v * G).$$

Теоремы 1.1 и 1.2 являются частью более обширной программы исследования гомотопических типов пространств петель полиэдральных произведений. В идеале хотелось бы уметь

определять гомотопический тип самого полиэдрального произведения, но пока это удается только для специальных классов симплициальных комплексов [11, 12, 15]. Работы [21, 22] показывают, что после взятия петель чаще удается описать соответствующий гомотопический тип, и о том же свидетельствуют две приведенные выше теоремы.

В качестве приложения теоремы 1.1 мы рассмотрим различные теоретико-гомотопические свойства полиэдральных произведений, построенных по односвязным сферам. Пусть $(\underline{S}, \underline{*})$ — последовательность пар $(S^{n_i}, *)$ для $1 \leq i \leq m$, причем $n_i \geq 2$ для всех i. В следующем предложении рациональная гиперболичность, в частности, влечет за собой экспоненциальный рост размерностей рациональных гомотопических групп, mod-p^r-гиперболичность означает, что количество циклических слагаемых порядка p^r в гомотопических группах растет экспоненциально, а из отсутствия экспонент для всех простых p следует, что для всех простых p в гомотопических группах существует p-кручение сколь угодно большого порядка. Данное предложение показывает, что переход от $(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$ к $(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ оказывает огромное влияние на гомотопические группы. Обозначим через S^{n_v} сферу, соответствующую вершине v.

Предложение 1.3. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и σ — его грань не менее чем с двумя вершинами. Тогда если $K \setminus \sigma \neq \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, то пространство $S^{n_v} \rtimes G$, а следовательно и $(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$, рационально гиперболично,* mod-p^r*-гиперболично для всех простых чисел p и $r \geq 1$ и не имеет экспонент ни для какого простого числа p.*

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРИКИ

Пусть K — абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$, т.е. K — такое семейство подмножеств $\sigma \subseteq [m]$, что для любого $\sigma \in K$ все подмножества в σ также принадлежат K. Мы будем называть K просто симплициальным комплексом, опуская слово “абстрактный”. Подмножества $\sigma \in K$ называются *симплексами* или *гранями* комплекса K. Предполагается, что пустое множество $\varnothing$ принадлежит K. *Границей* грани $\sigma \in K$, обозначаемой через $\partial\sigma$, называется симплициальный комплекс, состоящий из всех собственных подмножеств в σ. *Джойн* двух симплициальных комплексов K и L определяется формулой

$$K * L = \bigl\{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in K,\ \tau \in L\bigr\}.$$

Пусть K — симплициальный комплекс и $\sigma \in K$ — его грань. Тогда *звезда* $\mathrm{star}_K(\sigma)$ и *линк* $\mathrm{link}_K(\sigma)$ грани σ определяются формулами

$$\mathrm{star}_K(\sigma) = \bigl\{\tau \in K \mid \sigma \cup \tau \in K\bigr\} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{link}_K(\sigma) = \bigl\{\tau \in \mathrm{star}_K(\sigma) \mid \tau \cap \sigma = \varnothing\bigr\}.$$

Заметим, что

$$\mathrm{star}_K(\sigma) = \sigma * \mathrm{link}_K(\sigma).$$

Удаление грани σ из K определяется как

$$K \setminus \sigma = \{\tau \in K \mid \sigma \not\subseteq \tau\}.$$

Заметим, что $\mathrm{link}_K(\sigma)$ является подкомплексом в $K \setminus \sigma$. Следующая лемма, по-видимому, хорошо известна.

Лемма 2.1. *Пусть K — симплициальный комплекс и $\sigma \in K$ — его грань. Тогда имеет место кодекартов квадрат симплициальных комплексов*

$$\begin{tikzcd} \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{star}_K(\sigma) \arrow[d] \\ K \setminus \sigma \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

Доказательство. Сначала покажем, что квадрат в формулировке леммы имеет смысл и коммутативен, доказав, что $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ является подкомплексом как в $\mathrm{star}_K(\sigma)$, так и в $K \setminus \sigma$. Так как $\mathrm{star}_K(\sigma) = \sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, имеем $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \subseteq \mathrm{star}_K(\sigma)$. С другой стороны, любая грань в $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ имеет вид $\tau \cup \mu$ для $\tau \in \partial\sigma$ и $\mu \in \mathrm{link}_K(\sigma)$. Из определения линка следует, что $\mu \cap \sigma = \varnothing$, поэтому для включения $\sigma \subseteq \tau \cup \mu$ должно было бы выполняться включение $\sigma \subseteq \tau$. Но это невозможно, поскольку $\tau \in \partial\sigma$. Таким образом, $\sigma \nsubseteq \tau \cup \mu$, откуда по определению операции удаления грани получаем $\tau \cup \mu \in K \setminus \sigma$. Так как это верно для любой грани из $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, то $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \subseteq K \setminus \sigma$.

Теперь покажем, что квадрат в утверждении леммы является кодекартовым, доказав, что $\mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma = \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$. Поскольку $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ является подкомплексом как в $\mathrm{star}_K(\sigma)$, так и в $K \setminus \sigma$, справедливо включение $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \subseteq \mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma$. С другой стороны, предположим, что $\alpha \in \mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma$. Тогда $\alpha \in \mathrm{star}_K(\sigma) = \sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, так что α имеет вид $\tau \cup \mu$ для $\tau \in \sigma$ и $\mu \in \mathrm{link}_K(\sigma)$. Поскольку $\alpha \in K \setminus \sigma$, из определения операции удаления грани следует, что $\sigma \nsubseteq \alpha$. По определению линка $\mu \cap \sigma = \varnothing$, поэтому из того, что $\sigma \nsubseteq \alpha = \tau \cup \mu$, следует, что $\sigma \nsubseteq \tau$. Поскольку $\tau \in \sigma$, это исключает возможность равенства $\tau = \sigma$. Таким образом, $\tau \in \partial\sigma$. Следовательно, $\alpha = \tau \cup \mu \in \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$. Поскольку это верно для любого $\alpha \in \mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma$, мы имеем $\mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma \subseteq \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$. Следовательно, $\mathrm{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma = \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$. $\square$

Определим теперь хорошо известную операцию над симплициальными комплексами.

Определение 2.2. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Пусть σ — его грань и v — вершина, не принадлежащая K. *Звездным подразделением* комплекса K в грани σ называется симплициальный комплекс

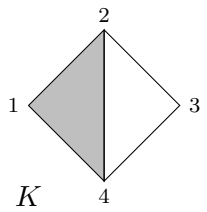
$$\mathrm{sd}_\sigma(K) = (K \setminus \sigma) \cup \big(\{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)\big).$$

Полезно сравнить K и $\mathrm{sd}_\sigma(K)$. Переписывая $\mathrm{star}_K(\sigma)$ в лемме 2.1 в виде $\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ и используя определение 2.2, мы получаем кодекартовы квадраты симплициальных комплексов

$$\begin{tikzcd} \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[d] \\ K \setminus \sigma \arrow[r] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[d] \\ K \setminus \sigma \arrow[r] & \mathrm{sd}_\sigma(K) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

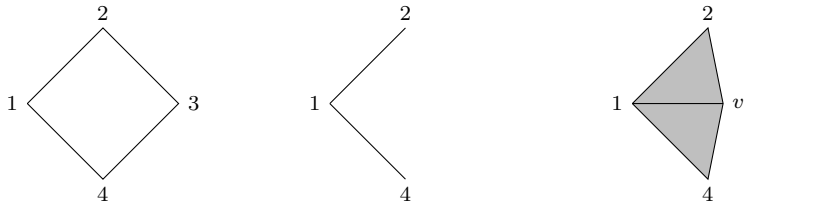
Замечание 2.3. Если σ — вершина i, то $\partial\sigma = \varnothing$. В этом случае кодекартовы квадраты (2.1) становятся одинаковыми, причем $\sigma = \{i\}$ слева заменяется на $\{v\}$ справа. Таким образом, замена i на v осуществляет симплициальный изоморфизм $K \cong \mathrm{sd}_\sigma(K)$. Поэтому достаточно рассматривать случаи, когда σ имеет не менее двух вершин.

Пример 2.4. Рассмотрим комплекс K на множестве вершин $[4]$ с ребрами $\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4),(2,4)\}$ и одной двумерной гранью $(1,2,4)$:



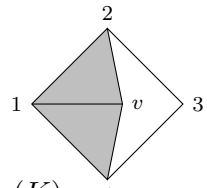
Рассмотрим ребро $\sigma = (2,4)$. Тогда комплекс $K \setminus \sigma$ имеет множество вершин $[4]$ и ребра $\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)\}$, при этом $\partial\sigma = \{2,4\}$ и $\mathrm{link}_K(\sigma) = \{1\}$. Таким образом, участвующие

в определении звездного подразделения комплексы имеют вид



$K \setminus \sigma$ $\qquad$ $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ $\qquad$ $\{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$

Следовательно,



$\mathrm{sd}_\sigma(K)$

Подкомплекс L симплициального комплекса K называется *полным подкомплексом*, если каждая грань из K на множестве вершин из L принадлежит L. В случае комплекса $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ справедлива следующая

Лемма 2.5. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, $\sigma \in K$ — его непустая грань и v — вершина, не принадлежащая K. Тогда $K \setminus \sigma$ — полный подкомплекс в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$.*

Доказательство. Если σ не является вершиной комплекса K, то множество вершин границы $\partial\sigma$ совпадает с множеством вершин самой грани σ и, следовательно, множество вершин комплекса $K \setminus \sigma$ совпадает с множеством вершин всего комплекса K. Тогда из равенства $\mathrm{sd}_\sigma(K) = (K \setminus \sigma) \cup (\{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma))$, где v — вершина, не принадлежащая K, следует, что полный подкомплекс в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ на множестве вершин $[m]$ равен $(K \setminus \sigma) \cup (\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma))$. Но по лемме 2.1 мы имеем включение $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \subseteq K \setminus \sigma$; следовательно, полный подкомплекс в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ на множестве вершин $[m]$ совпадает с $K \setminus \sigma$.

Если σ — одна из вершин комплекса K, то мы можем так перенумеровать вершины, что $\sigma = \{m\}$. Тогда $K \setminus \sigma = K \setminus \{m\}$ — полный подкомплекс в K на множестве вершин $[m-1]$. Согласно замечанию 2.3 существует симплициальный изоморфизм $K \cong \mathrm{sd}_\sigma(K)$, заменяющий вершину m на вершину v. Следовательно, $\mathrm{sd}_\sigma(K) \setminus \{v\} \cong K \setminus \{m\}$, и, значит, $K \setminus \sigma = K \setminus \{m\}$ — полный подкомплекс в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$. $\square$

3. ТРИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТРУМЕНТА

Чтобы изучить, что с гомотопической точки зрения происходит с полиэдральными произведениями при звездном подразделении симплициального комплекса, мы будем использовать три топологических инструмента: наличие ретракций полиэдральных произведений, соответствующих полным подкомплексам, тот факт, что кодекартов квадрат симплициальных комплексов индуцирует кодекартов квадрат полиэдральных произведений, и лемму о кубе.

3.1. Ретракции, связанные с полными подкомплексами. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Если L — подкомплекс в K, то симплициальное включение $L \to K$ индуцирует отображение полиэдральных произведений $(\underline{X}, \underline{A})^L \to (\underline{X}, \underline{A})^K$.

В теории полиэдральных произведений также полезно следующее небольшое расширение понятия подкомплекса. Пусть $\overline{L}$ — симплициальный комплекс L, но рассматриваемый как комплекс на множестве всех вершин $[m]$, т.е., переобозначая вершины при необходимости, мы можем считать, что L имеет вершины $1,\dots,\ell$, где $\ell < m$, и тогда $\overline{L}$ имеет *призрачные вершины* $\ell+1,\dots,m$. По определению полиэдрального произведения существует гомеоморфизм

$$(\underline{X},\underline{A})^{\overline{L}} \cong (\underline{X},\underline{A})^{L} \times \prod_{i=\ell+1}^{m} A_i.$$

Денем и Сучу [7, Lemma 2.2.3] показали, что если L — полный подкомплекс в K, то, хотя и не существует симплициального отображения, проектирующего K на L, такая проекция существует на уровне полиэдральных произведений.

Лемма 3.1. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и L — полный подкомплекс в K. Тогда индуцированное отображение полиэдральных произведений $(\underline{X},\underline{A})^{L} \to (\underline{X},\underline{A})^{K}$ имеет левое обратное отображение*

$$r\colon\ (\underline{X},\underline{A})^{K} \to (\underline{X},\underline{A})^{L}. \qquad \square$$

Отображение r в лемме 3.1 определяется координатными проекциями. А именно, если $V(L)$ — множество вершин подкомплекса L, то композиция $(\underline{X},\underline{A})^{K} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{m} X_i \xrightarrow{\text{proj}} \prod_{j\in V(L)} X_j$ имеет образ $(\underline{X},\underline{A})^{L}$. То же самое рассуждение дает уточненные утверждения при наличии призрачных вершин с учетом свойства естественности.

Лемма 3.2. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и L — полный подкомплекс в K. Тогда симплициальное включение $\overline{L} \to K$ определяет коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
(\underline{X},\underline{A})^{L} \times \prod_{i=\ell+1}^{m} A_i & \longrightarrow & (\underline{X},\underline{A})^{K} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r} \\
(\underline{X},\underline{A})^{L} & = & (\underline{X},\underline{A})^{L}
\end{array}$$

где r — отображение из леммы 3.1, а π_1 — проекция на первый множитель. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть K и K' — симплициальные комплексы на множестве вершин $[m]$ и существует симплициальное отображение $K \to K'$. Предположим, что L и L' — полные подкомплексы в K и K' соответственно, причем на одном и том же множестве вершин. Тогда имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
(\underline{X},\underline{A})^{K} & \longrightarrow & (\underline{X},\underline{A})^{K'} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r'} \\
(\underline{X},\underline{A})^{L} & \longrightarrow & (\underline{X},\underline{A})^{L'}
\end{array}$$

где r и r' — проекции из леммы 3.1. $\square$

3.2. От кодекартовых квадратов симплициальных комплексов к кодекартовым квадратам полиэдральных произведений. Пусть дан кодекартов квадрат симплициальных комплексов

$$\begin{array}{ccc}
L & \longrightarrow & K \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
M & \longrightarrow & N
\end{array} \tag{3.1}$$

Предположим, что множество вершин комплекса N равно $[m]$. Перенумеровав при необходимости вершины, мы можем считать, что множество вершин комплекса M равно $\{1,\dots,t\}$, множество вершин комплекса K равно $\{s+1,\dots,m\}$ и множество вершин комплекса L равно $\{s+1,\dots,t\}$. Тогда с учетом призрачных вершин справедливо следующее утверждение, доказанное в [12].

Лемма 3.4. *Кодекартов квадрат симплициальных комплексов* (3.1) *индуцирует кодекартов квадрат полиэдральных произведений*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^s A_i \times (\underline{X},\underline{A})^L \times \prod_{j=t+1}^m A_j \arrow[r, "1\times a"] \arrow[d, "b\times 1'"] & \prod_{i=1}^s A_i \times (\underline{X},\underline{A})^K \arrow[d] \\
(\underline{X},\underline{A})^M \times \prod_{j=t+1}^m A_j \arrow[r] & (\underline{X},\underline{A})^N
\end{tikzcd}$$

где 1 *— тождественное отображение на* $\prod_{i=1}^s A_i$, *а* $1'$ *— тождественное отображение на* $\prod_{j=t+1}^m A_j$. $\square$

3.3. Лемма о кубе. Мэзер [16] доказал следующий фундаментальный результат в теории гомотопий.

Лемма 3.5. *Предположим, что существует гомотопически коммутативная диаграмма пространств и отображений*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& G \arrow[rr] \arrow[dd] & & H \arrow[dd] \\
A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \arrow[dr] & \\
& C \arrow[rr] & & D
\end{tikzcd}$$

в которой нижняя грань является гомотопическим кодекартовым квадратом, а четыре боковые грани — гомотопическими декартовыми квадратами. Тогда верхняя грань также является гомотопическим кодекартовым квадратом. $\square$

Типичное построение такого куба происходит следующим образом.

Пример 3.6. Имея гомотопический кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

и отображение $f\colon D \to Z$, определим H как гомотопический слой отображения f. Определим также F, G и E из соответствующих декартовых квадратов с отображением $H \to D$. Эквивалентным образом F, G и E определяются из гомотопических расслоений

$$F \to B \to Z, \qquad G \to C \to Z, \qquad E \to A \to Z,$$

где каждое из правых отображений является композицией соответствующего отображения из указанного кодекартова квадрата и отображения f. Тогда из леммы 3.5 следует, что существует гомотопический кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
G \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

4. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЗВЕЗДНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ

Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, σ — его непустая грань и v — вершина, не принадлежащая K. Как уже было отмечено в (2.1), K и его звездное подразделение $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ в грани σ описываются кодекартовыми квадратами симплициальных комплексов

$$\begin{tikzcd} \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[d] \\ K \setminus \sigma \arrow[r] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \arrow[d] \\ K \setminus \sigma \arrow[r] & \mathrm{sd}_\sigma(K) \end{tikzcd}$$

Предположим сначала, что σ — одна из вершин $\{i\}$ для $1 \le i \le m$. Согласно замечанию 2.3 существует симплициальный изоморфизм $K \cong \mathrm{sd}_\sigma(K)$, откуда следует, что существует гомеоморфизм $(\underline{X}, \underline{A})^K \cong (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$.

Более интересен случай, когда σ имеет хотя бы две вершины. Заметим, что в этом случае (без учета призрачных вершин) $K \setminus \sigma$ является комплексом на множестве вершин $[m]$, в то время как $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ является комплексом на множестве вершин $\{v\} \cup [m]$. Перенумеровав вершины, если необходимо, мы можем считать, что множество вершин комплекса $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ имеет вид $\{1, \dots, \ell\}$, где $\ell \le m$. Для дополнительной вершины v в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ пусть (X_v, A_v) — соответствующая пара пространств. Вообще из определения полиэдрального произведения следует, что для любых двух комплексов A и B существует гомеоморфизм $(\underline{X}, \underline{A})^{A*B} \cong (\underline{X}, \underline{A})^A \times (\underline{X}, \underline{A})^B$. Таким образом, с учетом призрачных вершин из кодекартова квадрата, описывающего $\mathrm{sd}_\sigma(K)$, с помощью леммы 3.4 мы получаем кодекартов квадрат полиэдральных произведений

$$\begin{tikzcd} A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r, "i\times 1"] \arrow[d, "1'\times b"] & X_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[d] \\ A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma} \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

в котором $\mathcal{A} = \prod_{j=\ell+1}^m A_j$, i — вложение A_v в X_v и $1'$ — тождественное отображение на A_v.

По лемме 2.5 комплекс $K \setminus \sigma$ является полным подкомплексом в $\mathrm{sd}_\sigma(K)$. Следовательно, по леммам 3.1 и 3.2 существует отображение $r\colon (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma}$, которое можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \arrow[d, "r"] \\ (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma} \arrow[r, equal] & (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma} \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

где π_2 — проекция на второй множитель. Далее, поскольку r определяется с помощью проекции на дополнение к вершине v, имеет место также коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \arrow[d, "r"] \\ (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{A})^{K\setminus\sigma} \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

где π — проекция.

Теперь рассмотрим композиции четырех углов в (4.1) с отображением r и возьмем гомотопические слои. Сначала определим пространства F и G из гомотопических расслоений

$$F \to (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

$$G \to (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}.$$

С помощью (4.2) и (4.3) также получаем гомотопические расслоения

$$A_v \to A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

$$A_v \times G \to A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

$$X_v \times G \to X_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}.$$

Поэтому, как в примере 3.6, в итоге мы получаем гомотопический кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} A_v \times G \arrow[r, "c"] \arrow[d, "d"] & X_v \times G \arrow[d] \\ A_v \arrow[r] & F \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

для некоторых c и d. Эти отображения можно явно описать.

Лемма 4.1. *В (4.4) в качестве отображений c и d можно взять отображение $i \times 1$ и проекцию π_1 на первый множитель соответственно.*

Доказательство. В обозначениях из (4.1) отображение c является индуцированным отображением слоев в диаграмме гомотопических расслоений

$$\begin{tikzcd} A_v \times G \arrow[r] \arrow[d, "c"] & A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "i\times 1"] & (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \arrow[d, equal] \\ X_v \times G \arrow[r] & X_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \end{tikzcd}$$

Верхняя строка представляет собой произведение гомотопического расслоения, определяющего G, и гомотопического расслоения $A_v \to A_v \to *$, а нижняя строка является произведением гомотопического расслоения, определяющего G, и гомотопического расслоения $X_v \to X_v \to *$. Поскольку среднее и правое вертикальные отображения сохраняют эту структуру произведения расслоений, отображение слоев c можно выбрать равным $i \times 1$.

С другой стороны, отображение d является индуцированным отображением слоев в диаграмме гомотопических расслоений

$$\begin{tikzcd} A_v \times G \arrow[r] \arrow[d, "d"] & A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "1'\times b"] & (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \arrow[d, equal] \\ A_v \arrow[r] & A_v \times (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \end{tikzcd}$$

Верхняя строка представляет собой произведение гомотопического расслоения, определяющего G, и гомотопического расслоения $A_v \to A_v \to *$, а нижняя строка является тривиальным расслоением, которое можно рассматривать как произведение гомотопических расслоений $* \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}$ и $A_v \to A_v \to *$. Так как среднее и правое вертикальные отображения сохраняют эту структуру произведения расслоений, в качестве отображения слоев d можно взять проекцию π_1. $\square$

Суммируя все сказанное выше, мы получаем следующее

Предложение 4.2. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, σ — его грань не менее чем с двумя вершинами и v — вершина, не принадлежащая K. Тогда существует гомотопическое расслоение*

$$F \to (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

которое расщепляется после взятия петель, что дает гомотопическую эквивалентность

$$\Omega(\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega(\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \times \Omega F.$$

Пространство F описывается с помощью гомотопического кодекартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} A_v \times G & \xrightarrow{i \times 1} & X_v \times G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow \\ A_v & \longrightarrow & F \end{array}$$

где G — гомотопический слой отображения $(\underline{X}, \underline{A})^{\partial\sigma} \times (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}$.

Доказательство. Отображение r было построено как левое обратное к отображению полиэдральных произведений $(\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma} \to (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$, индуцированному симплициальным включением $K \setminus \sigma \to \mathrm{sd}_\sigma(K)$. Таким образом, r имеет правое обратное, откуда следует, что гомотопическое расслоение $F \to (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus \sigma}$ расщепляется после взятия петель. Это дает требуемую гомотопическую эквивалентность. Описание F дается диаграммой (4.4) и леммой 4.1. $\square$

Вообще говоря, может оказаться невозможным явно описать гомотопический тип пространства F из гомотопического кодекартова квадрата (4.4). Однако это можно сделать для полиэдральных произведений, построенных на парах $(\underline{X}, \underline{*})$ и $(\underline{CA}, \underline{A})$. Для этого требуются некоторые определения.

Для пространств с отмеченными точками A и B *правым полупрямым произведением* $A \rtimes B$ называется фактор-пространство $(A \times B)/{\sim}$, где $(*, b) \sim (*, *)$ для всех $b \in B$. В частности, существует корасслоение $B \xrightarrow{i_2} A \times B \to A \rtimes B$, где i_2 — включение второго множителя.

Пусть $I = [0, 1]$ — единичный отрезок. Тогда (*приведенным*) *джойном* $A * B$ называется фактор-пространство $(A \times I \times B)/{\sim}$, где $(a, 1, b) \sim (a', 1, b)$, $(a, 0, b) \sim (a, 0, b')$ и $(*, t, *) \sim$ $\sim (*, 0, *)$ для всех $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и $t \in I$. Известно, что существует гомотопический кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A * B \end{array}$$

где π_1 и π_2 — проекции на первый и второй множители соответственно.

Теперь мы готовы доказать теоремы 1.1 и 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Согласно предложению 4.2 существует гомотопическое расслоение

$$F \to (\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{X}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}.$$

Так как A_v является отмеченной точкой, гомотопический кодекартов квадрат, описывающий F, упрощается до гомотопического кодекартова квадрата

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_2"] \arrow[d] & X_v \times G \arrow[d] \\ * \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Это равносильно тому, что существует гомотопическое корасслоение $G \xrightarrow{i_2} X_v \times G \to F$, откуда следует, что $F \simeq X_v \rtimes G$. Описание пространства G и разложение пространства петель $\Omega(\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ следуют из предложения 4.2. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Согласно предложению 4.2 существует гомотопическое расслоение

$$F \to (\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \xrightarrow{r} (\underline{CA}, \underline{A})^{K \setminus \sigma},$$

где F определяется гомотопическим кодекартовым квадратом

$$\begin{tikzcd} A_v \times G \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & G \arrow[d] \\ A_v \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Таким образом, $F \simeq A_v * G$. Описание пространства G и разложение пространства петель $\Omega(\underline{CA}, \underline{A})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ следуют из предложения 4.2. $\square$

Замечание 4.3. С точки зрения разложения пространств петель частный случай $(\underline{CA}, \underline{A})$ в теореме 1.2 в определенном смысле включает в себя и общий случай, поскольку, как было показано в [13], для любого симплициального комплекса K существует гомотопическая эквивалентность

$$\Omega(\underline{X}, \underline{A})^K \simeq \prod_{i=1}^m \Omega X_i \times \Omega(\underline{CY}, \underline{Y})^K,$$

где $(\underline{CY}, \underline{Y})$ состоит из пар (CY_i, Y_i) для $1 \le i \le m$, а Y_i — гомотопический слой включения $A_i \to X_i$.

Замечание 4.4. Двумя важными случаями являются *пространства Дэвиса–Янушкевича* $\mathrm{DJ}_K = (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, *)^K$ и *момент–угол-комплексы* $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K$. Они имеют ключевое значение в торической топологии. Согласно теореме 1.1 существует гомотопическая эквивалентность

$$\Omega \mathrm{DJ}_{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega \mathrm{DJ}_{K \setminus \sigma} \times \Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \rtimes G),$$

где G — гомотопический слой отображения $\mathrm{DJ}_{\partial\sigma} \times \mathrm{DJ}_{\mathrm{link}_K(\sigma)} \to \mathrm{DJ}_{K \setminus \sigma}$. С учетом того, что диск D^2 гомеоморфен конусу над S^1 и $A * B \simeq \Sigma A \wedge B$, из теоремы 1.2 получаем гомотопические эквивалентности

$$\Omega \mathcal{Z}_{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega \mathcal{Z}_{K \setminus \sigma} \times \Omega(S^1 * G) \simeq \Omega \mathcal{Z}_{K \setminus \sigma} \times \Omega \Sigma^2 G,$$

где G — гомотопический слой отображения $\mathcal{Z}_{\partial\sigma} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to \mathcal{Z}_{K \setminus \sigma}$. Здесь $\mathcal{A} = \prod_{j=\ell+1}^m S^1$, где множество индексов $\ell+1, \dots, m$ состоит из всех вершин $[m]$, которые не входят в $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$.

В качестве явного примера вернемся к примеру 2.4.

Пример 4.5. Для $\sigma = (2, 4)$ имеем $\partial\sigma = \{2, 4\}$ и, значит, $\mathcal{Z}_{\partial\sigma} \simeq S^3$. Так как $\mathrm{link}_K(\sigma) = \{3\}$, то $\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_K(\sigma)} = D^2$, и это пространство стягиваемо. Для единственной вершины $\{1\}$ не из

$\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ имеем $\mathcal{A} = S^1$. Так как $K \setminus \sigma$ является джойном $\{2,4\} * \{1,3\}$, то $\mathcal{Z}_{K\setminus\sigma} \cong \mathcal{Z}_{\{2,4\}} \times \times \mathcal{Z}_{\{1,3\}} \simeq S^3 \times S^3$. Следовательно, отображение $\mathcal{Z}_{\partial\sigma} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_K(\sigma)} \times \mathcal{A} \to \mathcal{Z}_{K\setminus\sigma}$ из теоремы 1.2 имеет вид $g\colon S^3 \times S^1 \to S^3 \times S^3$. Далее, так как на это отображение можно смотреть как на индуцированное отображением джойнов $\{2,4\} * \varnothing \to \{2,4\} * \{1,3\}$, где $\varnothing$ соответствует вершине 1, отображение g является произведением тождественного отображения на S^3 и отображения $S^1 \to S^3$, которое гомотопно нулю. Следовательно, гомотопический слой G отображения g гомотопически эквивалентен $S^1 \times \Omega S^3$. Тогда из теоремы 1.2 следует, что существует гомотопическая эквивалентность

$$\Omega\mathcal{Z}_{\mathrm{sd}_K(\sigma)} \simeq \Omega S^3 \times \Omega S^3 \times \Omega(\Sigma^2(S^1 \times \Omega S^3)).$$

Заметим, что для общего симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ существует гомотопическая эквивалентность $\Omega\mathrm{DJ}_K \simeq \prod_{i=1}^m S^1 \times \Omega\mathcal{Z}_K$. Таким образом, пример 4.5 также дает гомотопический тип пространства $\Omega\,\mathrm{DJ}_{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГОМОТОПИЧЕСКИМ ГРУППАМ

Мы используем теорему 1.1 для исследования влияния звездного подразделения на гомотопические группы полиэдрального произведения. Точнее, мы выясним, что происходит с гомотопическими группами пространства $(\underline{X}, \underline{*})^{K\setminus\sigma}$ при переходе к пространству $(\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$. Начнем с нескольких определений.

Определение 5.1. Конечный односвязный CW-комплекс X называется *рационально эллиптическим*, если он имеет конечное число ненулевых рациональных гомотопических групп. В противном случае он называется *рационально гиперболическим*.

Знаменитая теорема Феликса, Гальперина и Томаса [8] утверждает, что если X рационально гиперболично, то его рациональные гомотопические группы растут экспоненциально, т.е. ранг группы $\bigoplus_{i=1}^m \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ растет экспоненциально с ростом m. В частности, не существует конечного односвязного CW-комплекса, у которого рациональные гомотопические группы имеют полиномиальный рост.

Пример 5.2. Базовым примером рационально эллиптического пространства является сфера S^n при $n \geq 2$. Базовым примером рационально гиперболического пространства является букет $S^m \vee S^n$ для $m, n \geq 2$, экспоненциальный рост рациональных гомотопических групп которого следует из теоремы Хилтона–Милнора.

Недавно было начато изучение аналога гиперболичности для подгрупп кручения.

Определение 5.3. Пусть p — простое число и $r \geq 1$. Конечный односвязный CW-комплекс X называется mod-p^r-*гиперболическим*, если число слагаемых p^r-кручения в $\bigoplus_{i=1}^m \pi_i(X)$ растет экспоненциально с ростом m.

Пример 5.4. В [3] с помощью теоремы Хилтона–Милнора было показано, что букеты $S^m \vee S^n$ являются mod-p^r-гиперболическими для всех простых p и всех $r \geq 1$. Ни для каких простого p и $r \geq 1$ неизвестно, является ли mod-p^r-гиперболическим пространством сфера S^n.

Рациональная эллиптичность/гиперболичность также связана с гомотопическими экспонентами.

Определение 5.5. Пусть p — простое число и $r \geq 1$. Говорят, что конечный односвязный CW-комплекс X имеет *гомотопическую экспоненту*, равную p^r, если p^r — наименьшая степень числа p, которая обращает в нуль всё p-кручение в $\pi_*(X)$. Это записывается как $\exp_p(X) = r$.

Пример 5.6. В работах [5, 6] показано, что $\exp_p(S^{2n+1}) = p^n$ при $p \geq 3$. Точное значение 2-примарной экспоненты для нечетномерных сфер остается открытой проблемой, а наилучшая известная верхняя оценка имеет вид $\exp_2(S^{2n+1}) \leq 2^{3/2+\epsilon}$, где $\epsilon \in \{0,1\}$ в зависимости от n

(см. [20]). С другой стороны, в [17] с помощью теоремы Хилтона–Милнора было показано, что если $m, n \geq 2$, то букет $S^m \vee S^n$ не имеет гомотопической экспоненты ни для одного простого числа.

Есть предположение о глубокой связи между рациональной эллиптичностью/гиперболичностью и гомотопическими экспонентами.

Гипотеза 5.7 (Мур). *Пусть X — конечный односвязный* CW-*комплекс. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) $\exp_p(X) < \infty$ *для некоторого простого числа* p;

(б) $\exp_p(X) < \infty$ *для всех простых чисел* p;

(в) X *рационально эллиптичен.*

Из гипотезы следовало бы, что X является рационально гиперболическим тогда и только тогда, когда X не имеет гомотопической экспоненты ни для какого простого числа p. С гиперболической точки зрения можно еще добавить следующую гипотезу.

Гипотеза 5.8. *Пусть X — конечный односвязный* CW-*комплекс. Если X рационально гиперболичен, то он также* mod-p^r-*гиперболичен для всех простых чисел p и $r \geq 1$.*

Известно, что гипотеза Мура верна для некоторых семейств пространств, хотя до ее полного решения еще очень далеко. Гипотеза 5.8 мало исследована, но известно, что она верна в некоторых случаях. Обратное утверждение к гипотезе 5.8 неверно: mod-p^r-пространство Мура рационально стягиваемо и, следовательно, рационально эллиптично, но известно, что оно mod-p^s-гиперболично для $1 \leq s \leq r+1$ (см. [14, 4]).

Далее мы рассматриваем рациональную гиперболичность и mod-p^r-гиперболичность, экспоненты и две указанные выше гипотезы в случае полиэдральных произведений на парах $(S^{n_i}, *)$ для $1 \leq i \leq m$, где $n_i \geq 2$. Будем писать $(\underline{S}, \underline{*})$ для последовательности из m таких пар, и пусть $(S^{n_v}, *)$ — пара, соответствующая вершине v.

Ниже мы докажем предложение 1.3 из введения, но сначала сделаем несколько замечаний.

Замечание 5.9. Ценность предложения 1.3 состоит не только в установлении гиперболичности и утверждения об экспонентах, но и в указании на то, где именно происходит рост. Из этого предложения также вытекает следующий примечательный факт: независимо от того, как растут гомотопические группы пространства $(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$, гомотопические группы пространства $(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ имеют экспоненциальный рост.

Замечание 5.10. Вообще говоря, нельзя утверждать, что при переходе от $(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$ к $(\underline{S}, \underline{*})^{K}$ происходит экспоненциальный рост. Например, пусть K — граница треугольника с вершинами $\{1, 2, 3\}$ и $\sigma = (2, 3)$. Тогда $K \setminus \sigma = \{1\} * \{2, 3\}$ и, следовательно, $(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} = S^{n_1} \times \times (S^{n_2} \vee S^{n_3})$. Однако при этом пространство $(\underline{S}, \underline{*})^{K}$ является толстым букетом в произведении $S^{n_1} \times S^{n_2} \times S^{n_3}$, который, как известно, рационально эллиптичен.

Заметим, что в этом случае $\mathrm{sd}_k(\sigma)$ — граница квадрата, представляющего собой джойн $\{1, 4\} * \{2, 3\}$, откуда следует, что $(\underline{X}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} = (S^{n_1} \vee S^{n_4}) \times (S^{n_2} \vee S^{n_3})$. Видно, что экспоненциальный рост при переходе от $K \setminus \sigma$ к $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ возникает в переходе от S^{n_1} к $S^{n_1} \vee S^{n_4}$.

Замечание 5.11. Предложение 1.3 представляет собой классификационный результат. Если $K \setminus \sigma = \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, то из кодекартова квадрата для $\mathrm{sd}_\sigma(K)$ в (2.1) следует, что $\mathrm{sd}_\sigma(K) = \{v\} * \partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ и, значит, $\mathrm{sd}_\sigma(K) = \{v\} * K \setminus \sigma$. Таким образом, существуют гомеоморфизмы

$$(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \cong (\underline{S}, \underline{*})^{\{v\}} \times (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} \cong S^{n_v} \times (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma},$$

где S^{n_v} — сфера, соответствующая вершине v. В частности, гомотопические группы пространства $(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$ отличаются от гомотопических групп пространства $(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$ только добавлением групп $\pi_*(S^{n_v})$, которые рационально эллиптичны и имеют конечные экспоненты.

Нам понадобится предварительная лемма.

Лемма 5.12. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и пусть $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ — его грань. Тогда имеет место гомотопическое расслоение*

$$\Omega X_{i_1} * \dots * \Omega X_{i_k} \to (\underline{X}, \underline{*})^{\partial\sigma} \to (\underline{X}, \underline{*})^{\sigma}.$$

Доказательство. Так как σ — симплекс, из определения полиэдрального произведения следует, что $(\underline{X}, \underline{*})^{\sigma} = \prod_{s=1}^{k} X_{i_s}$. Толстый букет в этом произведении — это подпространство

$$\mathrm{FW}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) = \left\{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \prod_{s=1}^{k} X_{i_k} \;\middle|\; \text{Как минимум одна из точек } x_{i_s} \text{ отмеченная} \right\}.$$

Из определения полиэдрального произведения следует, что $(\underline{X}, \underline{*})^{\partial\sigma} = \mathrm{FW}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, а также что отображение $(\underline{X}, \underline{*})^{\partial\sigma} \to (\underline{X}, \underline{*})^{\sigma}$, индуцированное включением $\partial\sigma \to \sigma$, совпадает с включением $\mathrm{FW}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \to \prod_{s=1}^{k} X_{i_s}$. Его гомотопический слой совпадает с джойном $\Omega X_{i_1} * \dots * \Omega X_{i_k}$ согласно Ганеа [10] при $k = 2$ и Портеру [19] при $k \geq 2$. $\square$

Доказательство предложения 1.3. Начнем с некоторой редукции. Пусть $(S^{n_v}, *)$ — пара, соответствующая вершине v. Согласно теореме 1.1 существует гомотопическая эквивалентность

$$\Omega(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)} \simeq \Omega(\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} \times \Omega(S^{n_v} \rtimes G), \tag{5.1}$$

где G — гомотопический слой отображения $(\underline{S}, \underline{*})^{\partial\sigma} \times (\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \to (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$. Поскольку S^{n_v} является надстройкой, существует гомотопическая эквивалентность

$$S^{n_v} \rtimes G \simeq S^{n_v} \vee (S^{n_v} \wedge G).$$

Следовательно, если G ретрагируется на некоторую сферу S^t, то $S^{n_v} \rtimes G$ ретрагируется на букет $S^{n_v} \vee S^{n_v+t}$. Тогда из (5.1) следует, что группа $\pi_*(S^{n_v} \vee S^{n_v+t})$ является прямым слагаемым в $\pi_*((\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)})$. Тогда, так как пространство $S^{n_v} \vee S^{n_v+t}$ является рационально гиперболическим, mod-p^r-гиперболическим для всех простых p и $r \geq 1$ и не имеет экспонент ни для какого простого p, то же самое верно для $(\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{sd}_\sigma(K)}$. Аналогично если некоторое пространство петель ΩS^d является ретрактом для G, то из расщепления Джеймса для $\Sigma\Omega S^d$ следует, что $S^{n_v+d-1} \simeq S^{n_v} \wedge S^{d-1}$ является ретрактом в $S^{n_v} \wedge \Omega S^d$ и, следовательно, в $S^{n_v} \wedge G$. Тогда букет $S^{n_v} \vee S^{n_v+d-1}$ будет ретрактом в $S^{n_v} \rtimes G$, и мы получаем те же выводы о гиперболичности и экспонентах, что и прежде. Таким образом, чтобы доказать предложение 1.3, осталось показать, что в его предположениях либо сфера, либо пространство петель на сфере является ретрактом пространства G.

Рассмотрим симплициальное включение $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma) \to K \setminus \sigma$. Поскольку предполагается, что это включение не является тождественным отображением, мы имеем две возможности: либо в $K \setminus \sigma$ есть вершина i_0, которая не принадлежит $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, либо комплексы $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ и $K \setminus \sigma$ имеют одинаковые множества вершин, но (минимальная) недостающая грань для $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ является гранью в $K \setminus \sigma$.

Случай 1: *существует вершина i_0 комплекса $K \setminus \sigma$, не принадлежащая $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$.* Включение вершины $\{i_0\}$ в комплекс $K \setminus \sigma$ порождает отображение полиэдральных произведений $\imath\colon X_{i_0} \to (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma}$. Так как $\{i_0\}$ является полным подкомплексом в $K \setminus \sigma$ на множестве вершин $\{i_0\}$, по лемме 3.1 существует отображение $r\colon (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} \to X_{i_0}$, являющееся левым обратным к $\imath$. Кроме того, поскольку i_0 не является вершиной для $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, по лемме 3.3 композиция

$$(\underline{S}, \underline{*})^{\partial\sigma} \times (\underline{S}, \underline{*})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \to (\underline{S}, \underline{*})^{K \setminus \sigma} \xrightarrow{r} X_{i_0}$$

гомотопна нулю. Следовательно, существует диаграмма гомотопических расслоений

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\underline{S},\underline{*})^{K\setminus\sigma} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Omega r"] & G \arrow[r] \arrow[d, "r'"] & (\underline{S},\underline{*})^{\partial\sigma}\times(\underline{S},\underline{*})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \arrow[r] \arrow[d] & (\underline{S},\underline{*})^{K\setminus\sigma} \arrow[d, "r"] \\
\Omega S^{n_v} \arrow[r, equal] & \Omega S^{n_v} \arrow[r] & * \arrow[r] & S^{n_v}
\end{tikzcd}$$

определяющая отображения ∂ и r'. Так как $\imath$ является правым обратным к r, из левого квадрата этой диаграммы следует, что композиция $\partial\circ\Omega\imath$ будет правым гомотопически обратным отображением для r'. Таким образом, ΩS^{n_v} — ретракт в G.

Случай 2: (*минимальная*) *недостающая грань комплекса* $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ *является гранью в* $K\setminus\sigma$. Пусть $\tau=(j_1,\dots,j_\ell)$ — недостающая грань комплекса $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$, являющаяся гранью в $K\setminus\sigma$. Из условия минимальности вытекает, что $\partial\tau\subseteq\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Omega S^{n_1}*\ldots*\Omega S^{n_\ell} \arrow[r] \arrow[d, "a"] & (\underline{S},\underline{*})^{\partial\tau} \arrow[r] \arrow[d] & (\underline{S},\underline{*})^{\tau} \arrow[d] \\
G \arrow[r] \arrow[d, "b"] & (\underline{S},\underline{*})^{\partial\sigma}\times(\underline{S},\underline{*})^{\mathrm{link}_K(\sigma)} \arrow[r] \arrow[d, "r'"] & (\underline{S},\underline{*})^{K\setminus\sigma} \arrow[d, "r"] \\
\Omega S^{n_1}*\ldots*\Omega S^{n_\ell} \arrow[r] & (\underline{S},\underline{*})^{\partial\tau} \arrow[r] & (\underline{S},\underline{*})^{\tau}
\end{tikzcd}$$

где отображения r', r, a и b мы сейчас определим. Верхний правый квадрат коммутативен, так как он индуцирован включениями комплексов $\partial\tau$ и τ в $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ и $K\setminus\sigma$ соответственно. Полными подкомплексами в $\partial\sigma * \mathrm{link}_K(\sigma)$ и $K\setminus\sigma$ на множестве вершин недостающей грани τ являются $\partial\tau$ и τ соответственно, поэтому согласно лемме 3.1 существуют такие отображения r и r', что средний и правый столбцы диаграммы представляют собой тождественные отображения. Правый нижний квадрат коммутативен в силу естественности в лемме 3.3. Беря гомотопические слои горизонтальных отображений, мы получаем индуцированные отображения слоев a и b, делающие верхний и нижний левые квадраты гомотопически коммутативными. Тогда внешний прямоугольник представляет собой диаграмму гомотопических расслоений, в которой среднее и правое вертикальные отображения являются тождественными, и тогда из леммы о пяти гомоморфизмах, примененной к индуцированной длинной точной последовательности гомотопических групп, следует, что $b\circ a$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп. Так как $\Omega S^{n_1}*\ldots*\Omega S^{n_\ell}$ является CW-комплексом, из теоремы Уайтхеда следует, что $b\circ a$ — гомотопическая эквивалентность. Применяя несколько раз расщепление Джеймса для $\Sigma\Omega S^{n_i}$, мы получаем, что $\Omega S^{n_1}*\ldots*\Omega S^{n_\ell}$ гомотопически эквивалентно букету сфер, в котором сфера наименьшей размерности — это S^t для $t=\left(\sum_{j=1}^{\ell} n_j\right)-1$. Следовательно, S^t является ретрактом в G. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahri A., Bendersky M., Cohen F.R., Gitler S.* The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment–angle complexes, arrangements and related spaces // Adv. Math. 2010. V. 225, N 3. P. 1634–1668.
2. *Bahri A., Bendersky M., Cohen F.R., Gitler S.* Cup-products for the polyhedral product functor // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2012. V. 153, N 3. P. 457–469.
3. *Boyde G.* p-Hyperbolicity of homotopy groups via K-theory // Math. Z. 2022. Bd. 301, H. 1. S. 977–1009.
4. *Boyde G.* $\mathbb{Z}/p^r$-hyperbolicity via homology // Isr. J. Math. 2024. V. 260, N 1. P. 141–193; arXiv: 2106.03516 [math.AT].
5. *Cohen F.R., Moore J.C., Neisendorfer J.A.* Torsion in homotopy groups // Ann. Math. Ser. 2. 1979. V. 109, N 1. P. 121–168.

6. *Cohen F.R., Moore J.C., Neisendorfer J.A.* The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres // Ann. Math. Ser. 2. 1979. V. 110, N 3. P. 549–565.
7. *Denham G., Suciu A.I.* Moment–angle complexes, monomial ideals and Massey products // Pure Appl. Math. Q. 2007. V. 3, N 1. P. 25–60.
8. *Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C.* The homotopy Lie algebra for finite complexes // Publ. math. Inst. hautes étud. sci. 1982. V. 56. P. 179–202.
9. *Félix Y., Tanré D.* Rational homotopy of the polyhedral product functor // Proc. Am. Math. Soc. 2009. V. 137, N 3. P. 891–898.
10. *Ganea T.* A generalization of the homology and homotopy suspension // Comment. math. Helv. 1965. V. 39. P. 295–322.
11. *Grbić J., Theriault S.* The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement // Topology. 2007. V. 46, N 4. P. 357–396.
12. *Grbić J., Theriault S.* The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes // Adv. Math. 2013. V. 245. P. 690–715.
13. *Hao Y., Sun Q., Theriault S.* Moore's conjecture for polyhedral products // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2019. V. 167, N 1. P. 23–33.
14. *Huang R., Wu J.* Exponential growth of homotopy groups of suspended finite complexes // Math. Z. 2020. Bd. 295, H. 3–4. S. 1301–1321.
15. *Iriye K., Kishimoto D.* Fat-wedge filtration and decomposition of polyhedral products // Kyoto J. Math. 2019. V. 59, N 1. P. 1–51.
16. *Mather M.* Pull-backs in homotopy theory // Can. J. Math. 1976. V. 28, N 2. P. 225–263.
17. *Neisendorfer J.A., Selick P.S.* Some examples of spaces with or without exponents // Current trends in algebraic topology: Semin. London/Ont., 1981. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1982. P. 343–357. (CMS Conf. Proc.; V. 2, Part 1).
18. *Панов Т.Е., Верёвкин Я.А.* Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера // Мат. сб. 2016. Т. 207, №11. С. 105–126.
19. *Porter G.J.* The homotopy groups of wedges of suspensions // Am. J. Math. 1966. V. 88, N 3. P. 655–663.
20. *Selick P.* 2-primary exponents for the homotopy groups of spheres // Topology. 1984. V. 23, N 1. P. 97–99.
21. *Терио С.* Полиэдральные произведения над связными суммами симплициальных комплексов // Тр. МИАН. 2022. Т. 317. С. 168–178.
22. *Theriault S.* Polyhedral products for wheel graphs and their generalizations // Toric topology and polyhedral products. Cham: Springer, 2024. P. 295–311. (Fields Inst. Commun.; V. 89).

Перевод с английского Г.С. Черных