V. A. Yudin, Packings of balls in Euclidean space, and extremal problems for trigonometric polynomials,
Diskr. Mat., 1989, Volume 1, Issue 2, 155–158

https://www.mathnet.ru/eng/dm918

Дискретная математика

том 1 выпуск 2 * 1989

УДК 517.5

УПАКОВКИ ШАРОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В. А. Юдин

Средствами гармонического анализа дается оценка сверху количества шаров радиуса ε, расположенных без самопересечения в n-мерном торе T^n. Как следствие дан новый вывод одной оценки В. И. Левенштейна для плотности упаковки пространства шарами одинакового радиуса.

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{Z}^n$ — n-мерная целочисленная решетка, $\nu x = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n$ — скалярное произведение ν и x, $|x| = \sqrt{xx}$; $T^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon -1/2 < x_k \leqslant 1/2,\ k=1, \ldots, n\}$ — n-мерный тор; $Q^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon -1/2 \leqslant x_k \leqslant 1/2,\ k=1, \ldots, n\}$ — n-мерный куб; $B^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant 1\}$ — n-мерный шар радиуса 1, объема ω_n; q_n — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{n/2}(z)$.

Через δ_n обозначим плотность упаковки $\mathbf{R}^n$ шарами B. Начиная со статьи В. М. Сидельникова в ряде работ получено улучшение оценки сверху Блихфельдта $\delta_n \leqslant 2^{-n/2}$. Наилучшие на сегодня оценки сверху даны в [1] с подробной историей вопроса. В настоящей работе средствами гармонического анализа дается оценка сверху для $N=N(\varepsilon)$ — количества шаров радиуса ε, которые можно разместить в T^n без самопересечения. Как следствие получен новый вывод одной, принадлежащей В. И. Левенштейну, оценки сверху для δ_n

Теорема. *Для любого* $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$, $n \in \mathbf{N}$

$$N(\varepsilon) \leqslant \omega_n q_n^n (4\pi\varepsilon)^{-n}. \tag{1}$$

Доказательство. Соображение Дельсарта [1] в тригонометрическом варианте сводит оценку $N(\varepsilon)$ к следующей экстремальной задаче. Найти

$$I(\varepsilon) = \inf_{f \in M_\varepsilon} \frac{f(0)}{\hat{f}_0} = \inf_{f \in M_\varepsilon} \frac{\|f(x)\|_C}{\int\limits_{T^n} f(x)\,dx}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}, \tag{2}$$

где M_ε — класс непрерывных функций $f(x)$, заданных на T^n, и удовлетворяющих ограничениям:

1) $f(x) \sim \sum\limits_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x}$, $\hat{f}_\nu = \int\limits_{T^n} f(x) e^{-2\pi i \nu x}\,dx \geqslant 0$, $\hat{f}_0 > 0$, т. е. ряд Фурье $f(x)$
имеет неотрицательные коэффициенты;

2) функция $f(x)$ неположительна вне шара радиуса 2ε.

Действительно, пусть $x^{(k)}$, $k=1, \ldots, N$,— центры шаров радиуса ε, расположенных в T^n без самопересечений. Тогда

$$\sum_{k,\, l=1}^{N} f(x^k - x^{(l)}) = Nf(0) + \sum_{k \neq l} f(x^{(k)} - x^{(l)}) \leqslant Nf(0),$$

с другой стороны,

$$\sum_{k,\, l=1}^{N} f(x^{(k)} - x^{(l)}) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \hat{f}_\nu \sum_{k,\, l=1}^{N} e^{2\pi i \nu (x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \hat{f}_\nu \left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \geqslant \hat{f}_0 N^2,$$

откуда

$$N \leqslant f(0)/\hat{f}_0.$$

В пространстве размерности $n \geqslant 2$ точное значение (2) $I(\varepsilon)$ неизвестно. Построим тригонометрический полином $f(x)$, с помощью которого дадим оценку сверху для $I(\varepsilon)$. Пусть

$$u(x) = |x|^{-\nu} J_\nu(|x|), \quad \nu = n/2 - 1.$$

Известно [2], что $u(x)$ является первой собственной функцией оператора Лапласа

$$\Delta u + u = 0, \quad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2.$$

Поскольку [3]

$$(z^{-\nu} J_\nu(z))' = z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),$$

то $z = q_n$ есть первая положительная точка минимума функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$. Пусть $m = -q_n^{-\nu} J_\nu(q_n)$; тогда функция

$$v(x) = \begin{cases} u(x) + m, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{x \in \mathbf{R}^n \colon |x| \leqslant q_n\}$, неотрицательна на D $v(x)$, и ее производная по внешней нормали $\partial v/\partial n$ на границе Γ шара D обращаются в 0. Полагая в формуле Грина [2]

$$\int_D [\Delta\varphi \cdot \psi - \varphi\, \Delta\psi]\, dx = \int_\Gamma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \psi - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dx,$$

$$\varphi(x) = e^{-2\pi i s x}, \quad \psi(x) = v(x),$$

$$\Delta\varphi = -|2\pi s|^2 e^{-2\pi i s x}, \quad \Delta v = \Delta(u+m) = -u = -v + m,$$

$$v|_\Gamma = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0,$$

получим

$$\int_D [e^{-2\pi i s x}(v(x) - m) - |2\pi s|^2 v(x)]\, dx = 0.$$

Из последнего равенства находим преобразование Фурье [4] функции $v(x)$:

$$\hat{v}(s) = \int_{\mathbf{R}^n} v(x) e^{-2\pi i s x}\, dx = \frac{m\hat{\chi}_D(s)}{1 - |2\pi s|^2}, \tag{3}$$

где $\chi_D(x) = 1$, $x \in D$; $\chi_D(x) = 0$, $x \notin D$,— характеристическая функция шара D. Положим

$$V(x) = (v * \chi_D)(x) = \int_D v(x-t)\, dt. \tag{4}$$

Как свертка неотрицательных функций $V(x)$ неотрицательна. Используя формулу для преобразования Фурье свертки [4], найдем, что

$$\hat{V}(s)=\hat{v}(s)\,\hat{\chi}_D(s)=m\,|\hat{\chi}_D(s)|^2[1-|2\pi s|^2]^{-1}. \tag{5}$$

Положим

$$W(x)=V\left(\frac{x}{R}\right),$$
$$R=(4\pi\varepsilon)^{-1}.$$

Найдем преобразование Фурье $W(x)$:

$$\hat{W}(s)=R^n\hat{V}(Rs)=m\,(4\pi\varepsilon)^{-n}\left|\hat{\chi}_D\left(\frac{s}{4\pi\varepsilon}\right)\right|^2\left[1-\left|\frac{s}{2\varepsilon}\right|^2\right]^{-1}. \tag{6}$$

Построенная функция $W(x)$ обладает свойствами:

$$\begin{aligned}&1)\ W(x)\geqslant 0,\quad x\in\mathbf{R}^n;\\ &2)\ \hat{W}(s)\leqslant 0,\quad |s|\geqslant 2\varepsilon.\end{aligned} \tag{7}$$

Введем тригонометрический полином

$$f(x)=\sum_{\nu\in\mathbf{Z}^n}W(\nu)\,e^{2\pi i\nu x};$$

по формуле суммирования Пуассона

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\hat{W}(k+x).$$

В силу (7) $f(x)\in M_\varepsilon$. Из (3)—(6) находим, что

$$\hat{f}_0=W(0)=V(0)=\hat{v}(0)=m\hat{\chi}_D(0)=m\operatorname{mes}D.$$

Оценим $f(0)$ сверху. Из (7) получаем, что

$$f(0)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\hat{W}(k)\leqslant\hat{W}(0)=m\,(4\pi\varepsilon)^{-n}(\operatorname{mes}D)^2.$$

Следовательно, для $I(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$I(\varepsilon)\leqslant\frac{f(0)}{\hat{f}_0}\leqslant\frac{m\,(4\pi\varepsilon)^{-n}(\operatorname{mes}D)^2}{m\operatorname{mes}D}=(4\pi\varepsilon)^{-n}\operatorname{mes}D,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Следствие (оценка В. И. Левенштейна). *Для любого* $n\in\mathbf{N}$

$$\delta_n\leqslant q_n^n 4^{-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Действительно, так как число шаров, расположенных в кубе Q^n, не больше числа шаров, расположенных в торе T^n, в силу (1)

$$\delta_n\leqslant\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\omega_n\varepsilon^n N(\varepsilon)\leqslant\omega_n^2 q_n^n(4\pi)^{-n}.$$

Поскольку $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, то

$$\delta_n \leqslant q_n^n 4^{-n}\,\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их применения // Проблемы кибернетики. Вып. 40.— М.: Наука, 1983.— С. 43—110.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1.— Л.: Гостехиздат, 1951.
3. Ватсон Г. Теория бесселевых функций.— М.: ИЛ, 1949.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.

Статья поступила 20.12.88