



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, М. А. Романов, О связи между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций, *Дальневост. матем. журн.*, 2017, том 17, номер 2, 210–220

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

17 марта 2025 г., 14:16:43



УДК 517.965+517.547.582+511.21

MSC2010 33E05+11B37

© А. А. Илларионов^{1,2}; М. А. Романов¹

О связи между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций

Мы исследуем связь между 1-периодическими решениями функционального уравнения

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y)$$

относительно неизвестных $f, g, \varphi_j, \psi_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и некоторыми последовательностями комплексных чисел, удовлетворяющих функциональным соотношениям билинейного типа. Полученные результаты используются для решения указанного уравнения в случае, когда $g = \theta$ — тэта-функция Якоби.

Ключевые слова: *функциональное уравнение, сигма-функция Вейерштрасса, тэта-функция Якоби, формула сложения, эллиптические функции, нелинейные последовательности.*

1. Введение

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y) \quad (1)$$

относительно неизвестных $f, g, \varphi_j, \psi_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Оно тесно связано с эллиптическими функциями. Например, классическая формула сложения в терминах сигма-функции Вейерштрасса имеет вид

$$\sigma(x+y)\sigma(x-y) = \sigma^2(x)\sigma^2(y)(\wp(y) - \wp(x)), \quad (2)$$

где $\wp = -(\ln \sigma)''$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Поэтому пара $(f, g) = (\sigma, \sigma)$ удовлетворяет соотношению (1), где

$$N = 2, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = (\sigma^2, -\wp\sigma^2), \quad (\psi_1, \psi_2) = (\wp\sigma^2, \sigma^2).$$

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.

²Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: illar_a@list.ru (А. А. Илларионов), romanov@iam.khv.ru (М. А. Романов).

Соотношение (1) также тесно связано с полилинейными функционально-дифференциальными уравнениями (см. [1,2]). Оно изучалось рядом авторов (см. [1–14]). Однако его общее решение известно только при $N=1,2$ (см. [2,3,9]) и $N=3$ (см. [1]). Вопрос об описании множества решений уравнения (1) при $N > 3$ является открытым.

Будем также рассматривать дискретные аналоги соотношения (1)

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{N_0} a_j(m)b_j(n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}), \tag{3}$$

$$A(m+n+1)B(m-n) = \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{a}_j(m)\tilde{b}_j(n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

относительно неизвестных последовательностей $A, B, a_j, b_j, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Как и в [12] (см. также [15–17]), будем использовать следующую терминологию.

Определение [12, 15–17]. Пусть целые (голоморфные на всем \mathbb{C}) не равные тождественно нулю функции $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяют разложению (1) с некоторыми $\varphi_j, \psi_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и минимально возможным N . Тогда пару (f, g) будем называть *гиперэллиптической системой функций ранга* $R(f, g) = N$.

Определение [12, 15–17]. Пусть не равные тождественно нулю последовательности $A, B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяют разложениям (3), (4) с некоторыми $a_j, b_j, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ и минимально возможными N_0, N_1 . Тогда пару (A, B) будем называть *гиперэллиптической системой последовательностей ранга* $R(A, B)$, где

$$R(A, B) = R_0(A, B) + R_1(A, B), \quad R_0(A, B) = N_0, \quad R_1(A, B) = N_1.$$

Пример. Пусть $f(z) = \sigma(z_0z + z_1)$, $g(z) = \sigma(z_0z + z_2)$, причем $z_0 \neq 0$. Тогда из формулы сложения (2) вытекает, что пара (f, g) есть гиперэллиптическая система функций ранга 2. Пусть $A(n) = \sigma(nz_0 + z_1)$, $B(n) = \sigma(nz_0 + z_2)$, $n \in \mathbb{C}$. Из той же формулы следует, что

$$R_0(A, B) = R_1(A, B) = 2, \quad R(A, B) = 4,$$

за исключением некоторых вырожденных случаев, в которых $R(A, B) < 4$.

В настоящей работе мы изучаем связь между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций. В качестве приложения мы описываем все 1-периодические решения уравнения (1) вида (f, θ) , где θ — тэта-функция Якоби.

Замечание 1. В [12, 15–17] ранг гиперэллиптической системы последовательностей определялся как $R(A, B) = \max\{R_0(A, B), R_1(A, B)\}$.

2. Связь между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ — функции со значениями в поле \mathbb{C} , то через $\text{rank}\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ обозначим ранг системы $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ (максимальное число линейно независимых функций из $\varphi_1, \dots, \varphi_N$).

Лемма 1. Пусть $\varphi_j, \psi_j : X \rightarrow \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$, где X — некоторое множество, причем

$$\forall x, y \in X \quad \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y) = 0.$$

Тогда

$$\text{rank}\{\varphi_j\}_{j=1}^N + \text{rank}\{\psi_j\}_{j=1}^N \leq N.$$

Доказательство. Пусть $\text{rank}\{\varphi_j\}_{j=1}^N = r$. Не умаляя общности, считаем, что $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ линейно независимы. Тогда существуют такие не равные тождественно нулю наборы $(c_{l1}, \dots, c_{lr}) \in \mathbb{C}^r$, $l = \overline{r+1, N}$, что

$$\varphi_l = \sum_{j=1}^r c_{lj}\varphi_j, \quad l = \overline{r+1, N}.$$

Следовательно,

$$0 = \sum_{j=1}^r \varphi_j\psi_j + \sum_{l=r+1}^N \varphi_l\psi_l = \sum_{j=1}^r \varphi_j \left(\psi_j + \sum_{l=r+1}^N c_{lj}\psi_l \right).$$

Поскольку $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ линейно независимы, то

$$\psi_j = - \sum_{l=r+1}^N c_{lj}\psi_l, \quad j = \overline{1, r} \implies \text{rank}\{\psi_j\}_{j=1}^N \leq N - r.$$

□

Будем использовать следующее обозначение:

$$e(z) = \exp(2\pi iz), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2. Пусть $R(A, B) = N$ и выполняются соотношения (3), (4). Тогда существуют $m_s, n_s \in \mathbb{Z}$, $t_{js}, h_{js} \in \mathbb{C}$, $j, s = \overline{1, N_0}$ и $\tilde{m}_s, \tilde{n}_s \in \mathbb{Z}$, $\tilde{t}_{js}, \tilde{h}_{js} \in \mathbb{C}$, $j, s = \overline{1, N_1}$ такие, что

$$\begin{aligned} a_j(m) &= \sum_{s=1}^{N_0} t_{js} A(m + n_s) B(m - n_s), \quad j = \overline{1, N_0}, \\ b_j(n) &= \sum_{s=1}^{N_0} h_{js} A(m_s + n) B(m_s - n), \quad j = \overline{1, N_0}, \\ \tilde{a}_j(m) &= \sum_{s=1}^{N_1} \tilde{t}_{js} A(m + \tilde{n}_s + 1) B(m - \tilde{n}_s), \quad j = \overline{1, N_1}, \\ \tilde{b}_j(n) &= \sum_{s=1}^{N_1} \tilde{h}_{js} A(\tilde{m}_s + n + 1) B(\tilde{m}_s - n), \quad j = \overline{1, N_1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как N_0 — наименьшее натуральное, для которого разложение (3) возможно, то b_1, \dots, b_{N_0} — линейно независимы. Поэтому найдутся такие точки $n_1, \dots, n_{N_0} \in \mathbb{Z}$, что матрица B с элементами $(B)_{sj} = b_j(n_s)$ ($j, s = \overline{1, N_0}$) является невырожденной. Тогда $a_1(m), \dots, a_{N_0}(m)$ можно выразить как решение следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_j(m)b_j(n_s) = A(m+n_s)B(m-n_s), \quad s = \overline{1, N_0}.$$

Отсюда вытекают формулы для $a_j(m)$. Остальные соотношения выводятся аналогичным образом. \square

Теорема 1. Пусть f, g — целые, не равные тождественно нулю 1-периодические функции $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть $A, B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательности коэффициентов Фурье из разложений

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m)e(mz), \quad g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B(n)e(nz). \quad (5)$$

Тогда

$$R(f, g) = R(A, B).$$

Доказательство. Согласно (5)

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y).$$

Представим сумму из правой части в виде $S_1 + S_2$, где S_1 состоит из слагаемых таких, что $m \equiv n \pmod{2}$, а $S_2 - m \equiv n + 1 \pmod{2}$. Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &= \left\{ \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2} \right) : m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \equiv n \pmod{2} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{m+n-1}{2}, \frac{m-n-1}{2} \right) : m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \equiv n+1 \pmod{2} \right\}, \end{aligned}$$

преобразуем сумму S_1 (замена $(m', n') = (\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2})$) и сумму S_2 (замена $(m', n') = (\frac{m+n-1}{2}, \frac{m-n-1}{2})$) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m \equiv n \pmod{2}} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y) = \\ &= \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y), \\ S_2 &= \sum_{m \equiv n+1 \pmod{2}} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y) = \\ &= \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m'+1)x)e((2n'+1)y). \end{aligned}$$

Тогда

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} \left(A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y) + A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m'+1)x)e((2n'+1)y) \right). \quad (6)$$

Пусть $R(f, g) = N$. Тогда существуют $\varphi_j, \psi_j, j = \overline{1, N}$, удовлетворяющие уравнению (1), причем $\{\varphi_j\}_{j=1}^N, \{\psi_j\}_{j=1}^N$ — линейно независимые системы функций. Нетрудно проверить, что эти функции имеют период 1. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\varphi_j(x+1) - \varphi_j(x))\psi_j(y) &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(x+1)\psi_j(y) - \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y) = \\ &= f(x+1+y)g(x-y) - f(x+y)g(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку ψ_1, \dots, ψ_N линейно независимы, то $\varphi_j(x+1) = \varphi_j(x)$. Периодичность ψ_j доказывается аналогичным образом. Так как φ_j, ψ_j целые (см. [2]), то их можно разложить в равномерно сходящиеся на любом компакте ряды Фурье:

$$\varphi_j(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_j(s)e(sx), \quad \psi_j(y) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_j(l)e(ly).$$

Подставляя эти разложения в (1) и учитывая (6), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} \left(A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y) + \right. \\ &\left. + A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m'+1)x)e((2n'+1)y) \right) = \\ &= \sum_{s, l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^N a_j(s)b_j(l) \right) e(sx)e(ly). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты Фурье в обеих частях последнего равенства, приходим к соотношениям

$$A(m'+n')B(m'-n') = \sum_{j=1}^N a_j(2m')b_j(2n'), \quad (7)$$

$$A(m'+n'+1)B(m'-n') = \sum_{j=1}^N a_j(2m'+1)b_j(2n'+1), \quad (8)$$

$$0 = \sum_{j=1}^N a_j(2m')b_j(2n'+1), \quad (9)$$

$$0 = \sum_{j=1}^N a_j(2m'+1)b_j(2n').$$

Пусть $a_j^+(m) = a_j(2m), b_j^-(n) = b_j(2n+1)$. Вследствие (7), (8),

$$R_0(A, B) \leq r_0 = \text{rank}\{a_j^+\}_{j=1}^N, \quad R_1(A, B) \leq r_1 = \text{rank}\{b_j^-\}_{j=1}^N.$$

Согласно лемме 1 из (9) следует, что $r_0 + r_1 \leq N$. Поэтому

$$R(A, B) = R_0(A, B) + R_1(A, B) \leq r_0 + r_1 \leq N.$$

Таким образом, $R(A, B) \leq R(f, g)$. Осталось доказать, что $R(f, g) \leq R(A, B)$.

Пусть $R(A, B) = N$. Тогда существуют последовательности $a_j, b_j, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющие (3), (4), причем $N_0 + N_1 = N$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_j(m) e(2mx), \quad j = \overline{1, N_0}, \\ \varphi_{j+N_0}(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_j(m) e((2m+1)x), \quad j = \overline{1, N_1}, \\ \psi_j(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_j(n) e(2ny), \quad j = \overline{1, N_0}, \\ \psi_{j+N_0}(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_j(n) e((2n+1)y), \quad j = \overline{1, N_1}. \end{aligned}$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте. Действительно, вследствие (6), ряды

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m + n_s) B(m - n_s) e(2mx), \quad s = \overline{1, N_0}$$

сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте. Поэтому, используя лемму 2, получаем, что ряд

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_j(m) e(2mx) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{s=1}^{N_0} t_{js} A(m + n_s) B(m - n_s) \right) e(2mx)$$

также сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Сходимость остальных рядов доказывается аналогичным образом.

Используя (6) и (3), (4), получаем

$$\begin{aligned} f(x+y)g(x-y) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(A(m+n)B(m-n)e(2mx)e(2ny) + \right. \\ &\quad \left. + A(m+n+1)B(m-n)e((2m+1)x)e((2n+1)y) \right) = \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^{N_0} a_j(m)b_j(n)e(2mx)e(2ny) \right) + \\ &+ \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{a}_j(m)\tilde{b}_j(n)e((2m+1)x)e((2n+1)y) \right) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y). \end{aligned}$$

Значит, $R(f, g) \leq N = R(A, B)$. □

Замечание 2. Неравенство $R(f, g) \leq R(A, B)$, в сущности, уже содержалось в работе [17].

3. Гиперэллиптические системы функций вида (f, θ)

Пусть $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$ и

$$\theta(z) = \theta(z; \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left(nz + \frac{n^2 \tau}{2}\right)$$

— тэта-функция Якоби.

Для любого натурального N определим множество $\mathcal{F}_N(\theta)$, состоящее из функций f вида

$$f(z) = \sum_{l=1}^s (L_l \theta)(z + z_l), \quad (10)$$

где $z_l \in \mathbb{C}$, а L_l — линейные дифференциальные операторы порядка r_l с постоянными коэффициентами, причем

$$\sum_{l=1}^s (r_l + 1) \leq \frac{N}{2}.$$

Теорема 2. *Множество, состоящее из 1-периодических целых функций f таких, что $R(f, \theta) \leq N$, совпадает с $\mathcal{F}_N(\theta)$.*

Доказательство. Пусть множество $\tilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$ состоит из 1-периодических целых функций f , таких что $R(f, \theta) \leq N$. Докажем сначала, что $\mathcal{F}_N(\theta) \subset \tilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$. Согласно классическим теоремам сложения $R(\theta, \theta) = 2$, то есть

$$\theta(x+y)\theta(x-y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y).$$

Используя замену $u = x+y$, $v = x-y$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\theta(u)\theta(v) = \varphi_1\left(\frac{u+v}{2}\right)\psi_1\left(\frac{u-v}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{u+v}{2}\right)\psi_2\left(\frac{u-v}{2}\right). \quad (11)$$

Пусть $L_l = L_l\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка r_l . Применяя этот оператор к (11), получаем уравнение

$$(L_l \theta)(u) \cdot \theta(v) = \sum_{j=0}^{r_l} \left(\varphi_1^{(j)}\left(\frac{u+v}{2}\right) \Psi_j\left(\frac{u-v}{2}\right) + \varphi_2^{(j)}\left(\frac{u+v}{2}\right) \tilde{\Psi}_j\left(\frac{u-v}{2}\right) \right),$$

где $\varphi_1^{(j)}$ и $\varphi_2^{(j)}$ — производные j -го порядка функций φ_1 и φ_2 , а $\Psi_j, \tilde{\Psi}_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторые функции, определяемые через линейные комбинации производных функций ψ_1 и ψ_2 . Возвращаясь к исходным переменным x, y , приходим к выводу:

$$R(L_l \theta, \theta) \leq 2(r_l + 1).$$

Очевидно, что для любых функций f_1, f_2, g

$$R(f_1 + f_2, g) \leq R(f_1, g) + R(f_2, g).$$

Кроме того, $R(f, g) = R(\tilde{f}, g)$ при $\tilde{f}(z) = f(z + z_l)$. Значит, если функция f имеет вид (10), то

$$R(f, \theta) \leq \sum_{l=1}^s 2(r_l + 1) \leq 2 \cdot \frac{N}{2} = N.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_N(\theta) \subset \tilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$. Осталось доказать, что $\tilde{\mathcal{F}}_N(\theta) \subset \mathcal{F}_N(\theta)$.

Пусть f — целая функция 1-периодическая, причем $R(f, \theta) \leq N$. Пусть

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m)e(mz), \quad \theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B(n)e(nz).$$

По теореме 1

$$R(A, B) \leq N.$$

Кроме того, $B(n) = e(n^2\tau/2)$. Положим

$$\tilde{A}(m) = A(m)e(-m^2\tau/2).$$

Нетрудно проверить (см. [17]), что $R(\tilde{A}, 1) \leq N$, где 1 — последовательность, состоящая из одних единиц. Пусть

$$R_0(\tilde{A}, 1) = N_0, \quad R_1(\tilde{A}, 1) = N_1, \quad N' = \min\{N_0, N_1\}.$$

Тогда

$$\tilde{A}(m+n) = \sum_{j=1}^{N'} \hat{a}_j(m)\hat{b}_j(n),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= a_j, & \hat{b}_j &= b_j, & \text{если } N_0 \leq N_1, \\ \hat{a}_j(n) &= a_j(n+1), & \hat{b}_j &= b_j, & \text{если } N_0 > N_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения

$$\tilde{A}(m+n) = \sum_{j=1}^{N'} \hat{a}_j(m)\hat{b}_j(n), \quad n = 0, 1, \dots, N'.$$

Их правые части линейно зависимы как $N' + 1$ линейные комбинации системы $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{N'}\}$, состоящей из N' функций. Значит,

$$\exists (c_0, \dots, c_{N'}) \in \mathbb{C}^{N'+1} \setminus \{0\} : \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad c_0\tilde{A}(m) + c_1\tilde{A}(m+1) + \dots + c_{N'}\tilde{A}(m+N') = 0.$$

Согласно теории линейных однородных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [18]), отсюда вытекает, что функция $\tilde{A}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ является квазимногочленом ранга не большего, чем N' , то есть

$$\tilde{A}(m) = \sum_{l=1}^s P_l(m)e(z_l m),$$

где P_l — многочлены степени $\deg P_l$, причем

$$\sum_{l=1}^s (1 + \deg P_l) \leq N'.$$

Значит,

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m)e(mz) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{A}(m)e\left(mz + \frac{m^2\tau}{2}\right) = \sum_{l=1}^s f_l(z), \quad (12)$$

где

$$f_l(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P_l(m)e\left(m(z + z_l) + \frac{m^2\tau}{2}\right).$$

Пусть

$$P_l(m) = \sum_{k=0}^{r_l} \alpha_{lk} m^k.$$

Определим дифференциальный оператор

$$L_l = \sum_{k=0}^{r_l} \frac{\alpha_{lk}}{(2\pi i)^k} \frac{d^k}{dz^k}.$$

Используя определение тэта-функции, получаем

$$\begin{aligned} (L_l \theta)(z + z_l) &= \sum_{k=0}^{r_l} \frac{\alpha_{lk}}{(2\pi i)^k} \frac{d^k \theta(z + z_l)}{dz^k} = \sum_{k=0}^{r_l} \alpha_{lk} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m^k e\left(m(z + z_l) + \frac{m^2\tau}{2}\right) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} P_l(m) e\left(m(z + z_l) + \frac{m^2\tau}{2}\right) = f_l(z). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{l=1}^s (1 + r_l) = \sum_{l=1}^s (1 + \deg P_l) \leq N' \leq \frac{N}{2},$$

из (12) вытекает, что $f \in \mathcal{F}_N(\theta)$. Значит, $\tilde{\mathcal{F}}_N(\theta) \subset \mathcal{F}_N(\theta)$. \square

Если N — нечетное, то $\mathcal{F}_N(\theta) = \mathcal{F}_{N-1}(\theta)$. Поэтому из теоремы 2 вытекают следующие результаты.

Следствие. Если N — нечетное, то не существует 1-периодических функций f , таких что $R(f, \theta) = N$.

Замечание 3. Последнее следствие, по сути, является частным случаем теоремы 1 из [14].

Следствие. Если N — четное, то множество 1-периодических функций f , таких что $R(f, \theta) = N$ совпадает с $\mathcal{F}_N(\theta) \setminus \mathcal{F}_{N-2}(\theta)$.

Примеры. Выпишем все 1-периодические функции, удовлетворяющие условию $R(f, \theta) = N$ при $N = 2, 4, 6$.

1. Если $N = 2$, то $f(z) = c_0 \theta(z + z_0)$, где $c_0 \neq 0$.
2. Если $N = 4$, то f имеет один из двух типов:
 - 1) $f(z) = c_0 \theta(z + z_0) + c_1 \theta'(z + z_0)$, где $c_1 \neq 0$;
 - 2) $f(z) = c_1 \theta(z + z_1) + c_2 \theta(z + z_2)$, где $c_1 c_2 \neq 0$, $(z_1 - z_2) \notin \mathbb{Z}$.

3. Если $N=6$, то f имеет один из трех типов:

- 1) $f(z) = c_0\theta(z + z_0) + c_1\theta'(z + z_0) + c_2\theta''(z + z_0)$, где $c_2 \neq 0$;
- 2) $f(z) = c_0\theta(z + z_0) + c_1\theta(z + z_1) + c_2\theta'(z + z_1)$, где $c_0c_2 \neq 0$, $(z_1 - z_0) \notin \mathbb{Z}$;
- 3) $f(z) = c_0\theta(z + z_0) + c_1\theta(z + z_1) + c_2\theta(z + z_3)$, где $c_0c_1c_2 \neq 0$, $(z_j - z_l) \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq l$.

Список литературы

- [1] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **299**, МАИК, М., 2017 (в печати).
- [2] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.
- [3] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.
- [4] M. Bonk, “The addition theorem of Weierstrass’s sigma function”, *Math. Ann.*, **298**:1, (1994), 591–610.
- [5] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, I”, *Aequationes Math.*, **48**, (1994), 171–193.
- [6] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, II”, *Aequationes Math.*, **49**, (1995), 122–152.
- [7] M. Bonk, “The Characterization of Theta Functions by Functional Equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65**, (1995), 29–55.
- [8] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, III”, *Aequationes Math.*, **51**, (1996), 311–327.
- [9] M. Bonk, “The addition formula for theta function”, *Aequationes Math.*, **53**:1–2, (1997), 54–72.
- [10] P. Sinopoulos, “Contribution to the study of two functional equations”, *Aequationes Math.*, **56**, (1998), 91–97.
- [11] A. Jarai, W. Sander, “On the characterization of Weierstrass’s sigma function”, *in: Functional Equations – Results and Advances*, *Adv. Math.*, v. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, 29–79.
- [12] В. Выковский, *Elliptic systems of sequences and functions*, Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications February 16–21, 2015, SkolTech, Moscow, Russia, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Vykovskii.pdf.
- [13] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:4, (2016), 43–54.
- [14] В. А. Быковский, “О ранге нечетных гиперквазимногочленов”, *Докл. РАН*, **470**:3, (2016), 255–256.
- [15] М. Д. Мони́на, “О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневост. матем. журн.*, **15**:1, (2015), 70–75.
- [16] М. Д. Мони́на, “Мультипликативный метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:1, (2016), 62–68.
- [17] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:2, (2016), 115–122.
- [18] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 2, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1959, 400 с.

Поступила в редакцию
26 октября 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225.)

Illarionov A. A., Romanov M. A. On the connection between hyperelliptic systems of sequences and functions. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2017. V. 17. No 2. P. 210–220.

ABSTRACT

We study the connection between 1-periodic solutions of the functional equation

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y) \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

and some sequences of special kind. As an application we solve the equation in the case when g is Jacobi theta function.

Key words: *functional equation, Weierstrass sigma function, Jacobi theta function, addition formula, elliptic functions, nonlinear sequences.*