И.З.Голубчик, А.В.Михалев

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППОВЫЕ ТОЖДЕСТВА В КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Введение

Пусть $\mathcal{D}$ – тело, $GL(n,\mathcal{D})$ – полная линейная группа над $\mathcal{D}$. Выражение

$$h(x_1,\dots,x_k)=A_1x_{i_1}^{\varepsilon_1}A_2\dots A_mx_{i_m}^{\varepsilon_m}A_{m+1},$$

где $\varepsilon_j=\pm1$ и $A_j\in GL(n,\mathcal{D})$, назовем обобщенным групповым многочленом с коэффициентами из $GL(n,\mathcal{D})$, если из условий $i_j=i_{j+1}$ и $\varepsilon_j=-\varepsilon_{j+1}$ следует, что матрица A_{j+1} – нецентральная. Скажем, что тождество $h(x_1,\dots,x_k)=1$ выполнено в подгруппе G группы $GL(n,\mathcal{D})$, если $h(B_1,\dots,B_k)=1$ для любых $B_j\in G$.

ТЕОРЕМА I. В группе $GL(n,\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ – тело с бесконечным центром и $n\geqslant2$, не выполнено никакое обобщенное групповое тождество.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{D}$ – тело с бесконечным центром и в группе $GL(1,\mathcal{D})$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество. Тогда тело $\mathcal{D}$ коммутативно.

Пусть $a_1,\dots,a_{m+1},b_1,\dots,b_{n+1}$ – ненулевые элементы кольца R. Ненулевое обобщенное полиномиальное тождество вида

$$a_1x_{i_1}a_2\dots a_mx_{i_m}a_{m+1}-b_1x_{j_1}b_2\dots b_nx_{j_n}b_{n+1}=0$$

назовем обобщенным полугрупповым тождеством кольца R.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – ассоциативное кольцо без делителей нуля и в R выполнено некоторое обобщенное полугрупповое тождество. Тогда кольцо R коммутативно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n\geqslant2$, $\mathcal{D}$ – тело с бесконечным центром Z и инволюцией $*$, причем, если $*$ – инволюция первого рода (все элементы центра симметрические), то $\dim_Z\mathcal{D}>4$, и f – невырожденная T-форма в пространстве $\mathcal{D}^n$ (т.е. $f(x,y)=\varepsilon f(y,x)^*$, где $\varepsilon=1$, если f – эрмитова форма, и $\varepsilon=-1$, если f – косоэрмитова форма, и значение $f(a,a)$ имеет вид $\beta^*+\varepsilon\beta$, где $\beta\in\mathcal{D}$), индекс Витта $\eta(f)$ строго больше нуля. Тогда в унитарной группе $U(n,f,\mathcal{D})$ не выполнено никакое обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(n,\mathcal{D})$.

Пусть $\mathcal{D}$ – тело с инволюцией $*$. Матрицу $A=(a_{ij})\in GL(n,\mathcal{D})$ назовем знакопеременной, если $\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j^*=0$ для любых $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{D}$. Выражение $g(x_1,\dots,x_k)=A_1x_{i_1}^{\varepsilon_1}\dots A_mx_{i_m}^{\varepsilon_m}A_{m+1}$,

где $A_j \in GL(n,\mathcal{D})$, $\xi_j \in \{1,-1,*,-*\}$, назовем обобщенным групповым многочленом с инволюцией, если из условий $i_j = i_{j+1}$ и $\xi_j = -\xi_{j+1}$ следует, что матрица A_{j+1} нецентральная, а из условий $i_j = i_{j+1}$ и $\xi_j = * \cdot \xi_{j+1}$ следует, что матрица A_{j+1} не является знакопеременной.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{D}$ – тело с бесконечным центром Z и инволюцией $*$. Тогда в группе $GL(n,\mathcal{D})$ при $n \geq 2$ не выполнено никакое обобщенное групповое тождество с инволюцией.

Пусть $H \subseteq \mathcal{D}_n$ и $H \neq \mathcal{D}_n$. Будем говорить, что обобщенный групповой многочлен $A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} A_{m+1}$ H-нецентрален, если из условий $i_j = i_{j+1}$ и $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$ следует, что $A_{j+1} \notin H$. Пусть P – бесконечное поле с тождественной инволюцией, $n \geq 2$ и f – невырожденная билинейная форма в пространстве P^n. Положим $K_f = \{A \in GL(n,P) \mid$ квадратичные формы $\lambda \cdot f(x,x)$ и $f(xA,x)$ совпадают для некоторого $\lambda \in P\}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть P – бесконечное поле, $char P \neq 2$, $n \geq 3$ и f – невырожденная симметрическая форма. Тогда:

1) в ортогональной группе $O(n,f,P)$ не выполнено никакое K_f-нецентральное обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(n,P)$;

2) если $\eta(f) > 0$, то в ортогональной группе $O(n,f,P)$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(n,P)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть P – бесконечное поле, $n > 1$ и f – невырожденная знакопеременная билинейная форма. Тогда:

1) в симплектической группе $Sp(2n,f,P)$ не выполнено никакое K_f-нецентральное обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(2n,P)$;

2) в симплектической группе $Sp(2n,f,P)$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(2n,P)$.

Обобщенный групповой многочлен $A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} A_{m+1}$ назовем строгим, если из условия $i_j = i_{j+1}$ следует, что $\varepsilon_j \neq -\varepsilon_{j+1}$. Ясно, что если $H \neq \mathcal{D}_n$, то строгое тождество является H-нецентральным. Из теорем 6 и 7 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть P – бесконечное поле. Тогда в группах $O(n,f,P)$, где $n \geq 3$ и $char P \neq 2$, и в группах $Sp(n,f,P)$, где $n = 2m > 2$, не выполнено никакое строгое обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(n,P)$.

§ I. Доказательство теоремы I

Пусть $R = \mathcal{D}_n$ – кольцо $(n\times n)$-матриц над телом $\mathcal{D}$ и $n>1$, P – центр кольца R. Тогда $R \cong \mathrm{End}_{\mathcal{D}} V$, где V – n-мерное векторное пространство над телом $\mathcal{D}$ и $\mathrm{End}_{\mathcal{D}} V$ – его кольцо эндоморфизмов.

I.I. Если $c_1,\dots,c_m \in R\setminus P$, то существует одномерное подпространство $L \subseteq V$ такое, что $c_i(L) \nsubseteq L$ для любого i, где $1 \le i \le m$.

Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $m=1$ и $c_1(L) \subseteq L$ для любого одномерного пространства L из V. Пусть v_1, v_2 – линейно независимые над $\mathcal{D}$ векторы из V. В силу предположения, $c_1(v_1) = v_1 d_1$ и $c_1(v_2) = v_2 d_2$, где $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$. Далее, $c_1(v_1+v_2) = (v_1+v_2)d_3 = v_1 d_3 + v_2 d_3 = c_1(v_1)+c_1(v_2) = v_1 d_1 + v_2 d_2$. Тогда $d_3 = d_1 = d_2$, и поскольку для любого $v \in V\setminus\{0\}$ либо векторы v_1, v линейно независимы, либо v_2, v линейно независимы, то $c_1(v) = v d_1$ для любого $v \in V$. Отсюда $(vd)d_1 = c_1(vd) = c_1(v)d = v d_1 d$ и $d d_1 = d_1 d$ для любого $d \in \mathcal{D}$. Значит, $d_1 \in Z$ и $c_1 \in P$, что приводит к противоречию. Следовательно, $c_1(L) \nsubseteq L$ для некоторого одномерного пространства L из V.

Пусть $c_1,\dots,c_m \in R\setminus P$ и $m>1$. По индуктивному предположению существуют $v_1, v_2 \in V$ такие, что $c_1(v_1) \notin v_1\mathcal{D}$ и $c_i(v_2) \notin v_2\mathcal{D}$ для любого $i>1$. Если $v_1\mathcal{D} = v_2\mathcal{D}$, то прямая $v_1\mathcal{D}$ удовлетворяет условиям пункта I.I. Пусть $v_1\mathcal{D} \ne v_2\mathcal{D}$, т.е. векторы v_1, v_2 линейно независимы над $\mathcal{D}$. Предположим, что для любого $\lambda \in P$ существует индекс i, $1 \le i \le m$, для которого $c_i(v_1+\lambda v_2) \subseteq (v_1+\lambda v_2)\mathcal{D}$. Так как поле P бесконечно, то существует i, $1 \le i \le m$, и различные ненулевые элементы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ поля P, для которых $c_i(v_1+\lambda_j v_2) = (v_1+\lambda_j v_2)d_j$, где $1 \le j \le 3$, $d_j \in \mathcal{D}$. Пусть $e_j = v_1 + \lambda_j v_2$. Тогда векторы e_1, e_2 линейно независимы над $\mathcal{D}$ и $e_3 = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2$, $v_1 = e_1\alpha_3 + e_2\alpha_4$, $v_2 = e_1\alpha_5 + e_2\alpha_6$, где $\alpha_k \in P\setminus\{0\}$, $1 \le k \le 6$. В частности, $e_1 d_3 \alpha_1 + e_2 d_3 \alpha_2 = (e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2)d_3 = e_3 d_3 = c_i(e_3) = c_i(e_1)\alpha_1 + c_i(e_2)\alpha_2 = e_1 d_1 \alpha_1 + e_2 d_2 \alpha_2$. Отсюда $(d_3-d_1)\alpha_1 = 0$, $(d_3-d_2)\alpha_2 = 0$ и $d_3 = d_1 = d_2 = d$. Тогда $c_i(v_1) = e_1 d\alpha_3 + e_2 d\alpha_4 = (e_1\alpha_3 + e_2\alpha_4)d = v_1 d$ и $c_i(v_2) = v_2 d$. Тем самым, $c_i(v_1) \in v_1\mathcal{D}$ и $c_i(v_2) \in v_2\mathcal{D}$, что противоречит выбору векторов v_1, v_2. Значит, существует элемент $\lambda \in P$ такой, что $c_i(v_1+\lambda v_2) \nsubseteq (v_1+\lambda v_2)\mathcal{D}$ для любого i, $1 \le i \le m$. Утверждение I.I. доказано.

I.2. Если $c_1,\dots,c_m \in R\setminus P$, то $yc_1y\dots yc_my \ne 0$ для

некоторого элемэнта $y \in R$ такого, что $y^2 = 0$.

Действительно, в силу I.I, существует одномерное подпространство L такое, что $c_i(L) \not\subseteq L$ для любых i, $1 \leq i \leq m$. Пусть $L = v_1 \mathcal{D}$. Тогда $c_i(v_1) \notin L$ и, поскольку тело $\mathcal{D}$ бесконечно, то существует $(n-1)$-мерное подпространство L_1 пространства V, такое, что $L \subseteq L_1$ и $c_i(v_i) \notin L_1$ для любого i, $1 \leq i \leq m$. Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1}$ – базис пространства L_1, $v_n \notin L_1$. Положим $y(v_n) = v_1$ и $y(v_i) = 0$ для $1 \leq i < n$. Тогда $y \in R$, $y^2 = 0$ и $\ker y = L_1$. Так как $c_i(v_1) \notin L_1$, то $yc_i(v_1) = v_1 d_i$, где $d_i \in \mathcal{D}$, $d_i \neq 0$. Следовательно, $yc_1 y \ldots y c_m y(v_m) = v_1 d_1 \ldots d_m \neq 0$. Значит, $yc_1 y \ldots yc_m y \neq 0$.

I.3. Пусть в $GL(n, \mathcal{D})$ выполнено обобщенное групповое тождество $A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} A_2 \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} A_{m+1} = 1$, где $1 \leq i_j \leq k$. Тогда в $GL(n, \mathcal{D})$ выполнено тождество $c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 \ldots c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1} = 1$, где $c_i \in GL(n, \mathcal{D}) \setminus P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $s_j = (-1)^{\varepsilon_j} i_j$, где $1 \leq j \leq m$. Тогда $-k \leq s_j \leq k$. По определению обобщенного группового многочлена, если $s_j = -s_{j+1}$, то $A_{j+1} \notin P$. Пусть $\{\lambda_s\}$ – различные ненулевые элементы поля P, где $-k \leq s \leq k$ и $I = \{j \mid A_j \notin P\}$. В силу пункта I.2, существует элемент $y \in R$ такой, что $y^2 = 0$ и $yA_j y \neq 0$ для любых $j \in I$. Положим $x_t = (1 - \lambda_{-t} y) x (1 + \lambda_t y)$, где $1 \leq t \leq k$. Тогда $A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} A_2 \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} A_{m+1} = c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 \ldots c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1}$, где $c_j = (1 + \lambda_{s_j} y) A_j (1 - \lambda_{-s_j} y)$, причем $\lambda_s = \lambda_{s_{m+1}} = 0$. Покажем, что $c_j \in R \setminus P$ для всех j, $1 \leq j \leq m+1$. Если $j \in I$, то $y c_j y = y A_j y \neq 0$ и $y^2 = 0$. Значит, $c_j \notin P$. Если $j \notin I$, то $A_j \in P$ и $c_j = A_j (1 + (\lambda_{s_{j-1}} - \lambda_{-s_j}) y)$. Поскольку $A_j \in P$, то $s_{j-1} \neq -s_j$ и $\mu_j = \lambda_{s_{j-1}} - \lambda_{-s_j} \neq 0$. Значит, $1 + \mu_j y \notin P$ и $c_j = A_j (1 + \mu_j y) \notin P$. Утверждение I.3 доказано.

I.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть в группе $GL(n, \mathcal{D})$ выполнено обобщенное групповое тождество $A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} A_2 \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} x_{i_m}^{\varepsilon_m} A_{m+1} = 1$. Тогда, в силу пункта I.3, в $GL(n, \mathcal{D})$ выполнено тождество $c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 \ldots c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1} = 1$ и $c_j \in R \setminus P$ для всех j, $1 \leq j \leq m+1$. В силу пункта I.2, существует элемент y такой, что $y^2 = 0$ и $yc_1 y \ldots y c_{m+1} y \neq 0$. Положим $x = 1 + \lambda y$, где $\lambda \in P$. Тогда $x \in GL(n, \mathcal{D})$ и

$$0 = c_1 (1 + \lambda y)^{\varepsilon_1} \ldots c_m (1 + \lambda y)^{\varepsilon_m} c_{m+1} - 1 = g_0 + \lambda g_1 + \ldots + \lambda^m g_m . \qquad (I)$$

При этом $y g_m y = (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m} y c_1 y \ldots y c_{m+1} y \neq 0$, и, значит, $g_m \neq 0$. С другой стороны, из равенства (I) следует, что

$g_0 = g_1 = \ldots = g_m = 0$, поскольку поле P бесконечно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы I.

§ 2. Доказательство теорем 2 и 3

Начнем с доказательства теоремы 2. Пусть C – центр тела $\mathcal{D}$, $h(x_1,\ldots,x_k) = a_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} a_2 \ldots a_n x_{i_n}^{\varepsilon_n} a_{n+1} = 1$ – тождество, выполненное в группе $GL(1,\mathcal{D})$. Пусть $\psi : \mathcal{D} \to R$ – вложение тела $\mathcal{D}$ в кольцо R. Скажем, что тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$ выполнено в кольце R, если $\psi(a_1) b_{i_1}^{\varepsilon_1} \psi(a_2) \ldots b_{i_n}^{\varepsilon_n} \psi(a_{n+1}) = 1$ для любых обратимых элементов $b_1,\ldots,b_k$ кольца R.

2.I. Если тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$ выполнено в теле K, $\mathcal{D} \subseteq K \subseteq S$ и кольцо S порождается множеством $K \cup P$, где P – центр кольца S, то тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$ выполнено в кольце S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$ не выполняется в кольце S, т.е. $h(b_1,\ldots,b_k) \neq 1$ для некоторых обратимых элементов $b_1,\ldots,b_k$ кольца S. По условию, $b_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} d_j$, где $d_1,\ldots,d_m \in K$, $\lambda_{ij} \in P$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$. Тогда $h(b_1,\ldots,b_k) - 1 = f(\lambda_{11},\ldots,\lambda_{km})$, где $f(x_{11},\ldots,x_{km})$ – элемент тела частных $K(x_{11},\ldots,x_{km})$ кольца многочленов $K[x_{11},\ldots,x_{km}]$ над телом K. По определению классического кольца частных получаем, что $f(x_{11},\ldots,x_{km}) = f_1(x_{11},\ldots,x_{km}) f_2(x_{11},\ldots,x_{km})^{-1}$, где f_1, f_2 элементы кольца $K[x_{11},\ldots,x_{km}]$. Так как $f(\lambda_{11},\ldots,\lambda_{km}) \neq 0$, то многочлен f_1 – ненулевой. Далее $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} d_j = g_i(x_{ij})$ – также ненулевые элементы кольца $K[x_{11},\ldots,x_{km}]$, ибо $g_i(\lambda_{ij}) = b_i \neq 0$. Положим $g(x_{ij}) = f_1(x_{ij}) f_2(x_{ij}) g_1(x_{ij}) \ldots g_k(x_{ij})$. Тогда $g(x_{ij})$ – ненулевой элемент кольца $K[x_{11},\ldots,x_{km}]$. Так как поле C бесконечно, то $g(\alpha_{ij}) \neq 0$ для некоторых $\alpha_{ij} \in C$. Положим $c_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} d_j$. Тогда c_i – ненулевые элементы тела K и $h(c_1,\ldots,c_k) - 1 = f_1(\alpha_{ij}) f_2(\alpha_{ij})^{-1} \neq 0$, т.е. тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$ не выполнено в теле K, что противоречит условию.

2.2. Существует тело K, содержащее тело $\mathcal{D}$, в котором не выполнено тождество $h(x_1,\ldots,x_k)=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [5] (лемма I5) доказано, что для любого тела $\mathcal{D}$ и натурального числа m существует тело K такое, что $\mathcal{D} \subseteq K$ и $L \subset K$, где L – тело размерности m^2 над

своим центром P, $C \subseteq P$, $\mathcal{D} \cap L = P$, тела $\mathcal{D}$ и L перестановочны и кольцо K порождается множеством $\mathcal{D} \cup L$. Пусть $m > 1$ и F – максимальное подполе в теле L. Тогда $L \otimes_P F \cong F_m$ и $S = K \otimes_P F \supseteq \mathcal{D}_m$. Отождествляя элементы из тела $\mathcal{D}$ с соответствующими скалярными матрицами в кольце $\mathcal{D}_m$, получим, что $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_m \subseteq S$. По теореме I, тождество $h(x_1,\dots,x_k) = 1$ не выполнено в кольце $\mathcal{D}_m$, а значит, и в кольце S. Но $\mathcal{D} \subseteq K \subseteq S$ и кольцо S порождается $K \cup P_1$, где P_1 – центр кольца S, следовательно, в силу пункта 2.I, тождество $h(x_1,\dots,x_k) = 1$ не выполнено в теле K.

Пусть $X = \{x_1,\dots,x_k,\dots\}$, $C\langle X\rangle$ – свободная C-алгебра над X и $R = \mathcal{D}\langle X\rangle = \mathcal{D} *_C C\langle X\rangle$ – свободное произведение алгебр $\mathcal{D}$ и $C\langle X\rangle$ над C. Следуя книге [4], кольцо L вместе с гомоморфизмом $R \to L$ назовем R-кольцом, а R-телом будем называть R-кольцо K, являющееся телом и такое, что K – наименьшее тело, содержащее образ кольца R. Специализацией из R-тела в R-тело L называется гомоморфизм R-колец $f : K_0 \to L$ некоторого R-подкольца K_0 тела K в тело L такой, что любой элемент из K_0, не лежащий в ядре $\ker f$, обратим в подкольце K_0. В [4] (§ 7,6) показано, что для кольца $R = \mathcal{D}\langle X\rangle$ существует универсальное тело частных $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$. Это означает, что имеется вложение $i : \mathcal{D}\langle X\rangle \to \overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ и для любого гомоморфизма $\varphi : \mathcal{D}\langle X\rangle \to \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1$ – некоторое тело, существует специализация f тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ в тело $\mathcal{D}_1$, для которой $f \circ i = \varphi$. Элементы тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ называются обобщенными рациональными функциями над телом $\mathcal{D}$.

2.3. Элемент $h(x_1,\dots,x_k) - 1 = a_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_n x_{i_n}^{\varepsilon_n} a_{n+1} - 1$ является ненулевым элементом тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу пункта 2.2, существует тело $\mathcal{D}_1$, содержащее $\mathcal{D}$, в котором тождество $h(x_1,\dots,x_k) = 1$ не выполнено, т.е. существует гомоморфизм $\varphi : \mathcal{D}\langle X\rangle \to \mathcal{D}_1$, для которого отображение φ тождественно на $\mathcal{D}$, $\varphi(x_i) \neq 0$ и $h(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_k)) - 1 \neq 0$. В силу определения универсального $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$-тела, существует специализация $f : K_0 \to \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}\langle X\rangle \subseteq K_0 \subseteq \overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ и f совпадает с φ на кольце $\mathcal{D}\langle X\rangle$. Так как $\varphi(x_i) = f(x_i) \neq 0$, то, по определению специализации, получаем, что $x_i^{-1} \in K_0$, и $h(x_1,\dots,x_k) - 1 = a_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_n x_{i_n}^{\varepsilon_n} a_{n+1} - 1 \in K_0$. Тогда $f(h(x_1,\dots,x_k) - 1) = h(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_k)) - 1 \neq 0$, и значит, $h(x_1,\dots,x_k) - 1$ – ненулевой элемент тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$.

2.4. Тело $\mathcal{D}$ конечномерно над своим центром C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(\mathcal{D}:C)=\infty$. Тогда для любого элемента $g\in\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ существует гомоморфизм $\varphi:\mathcal{D}\langle X\rangle\to\mathcal{D}$ и соответствующая ему специализация $f:K_0\to\mathcal{D}$ тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$ в тело $\mathcal{D}$, для которой $g\in K_0$ (см. [6], теорема 3). Иными словами, любая обобщенная рациональная функция над телом $\mathcal{D}$, бесконечномерным над своим центром, определена для некоторых значений из тела $\mathcal{D}$. Далее, в силу пункта 2.3, $h(x_1,\dots,x_k)-1$ - ненулевой элемент тела $\overline{\mathcal{D}\langle X\rangle}$, и значит, $g=[(h(x_1,\dots,x_k)-1)x_1x_2\dots x_k]^{-1}\in\mathcal{D}\langle X\rangle$. Следовательно, существует специализация $f:K_0\to\mathcal{D}$, для которой $g\in K_0$. Тогда $f(x_i)\neq 0$ и $h(f(x_1),\dots,f(x_k))-1\neq 0$. Получили противоречие с тем, что тождество $h(x_1,\dots,x_k)=1$ выполнено в теле $\mathcal{D}$. Значит, $(\mathcal{D}:C)<\infty$.

2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы показали, что $(\mathcal{D}:C)<\infty$. Пусть F - максимальное подполе тела $\mathcal{D}$ и $(\mathcal{D}:F)=m$. Предположим, что $m>1$. Тогда $S=\mathcal{D}\otimes_C F=F_m$, и по теореме I в кольце S не выполнено тождество $h(x_1,\dots,x_k)=1$. Далее, $\mathcal{D}\subseteq S$, кольцо S порождается множеством $\mathcal{D}\cup P$, где P - центр кольца S и по пункту 2.I тождество $h(x_1,\dots,x_k)=1$ не выполнено в теле $\mathcal{D}$. Полученное противоречие показывает, что $m=1$, $\mathcal{D}=F$, и значит, тело $\mathcal{D}$ - коммутативно. Теорема 2 доказана.

2.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть в кольце R выполнено тождество $a_1x_{i_1}a_2\dots a_m x_{i_m}a_{m+1}-b_1x_{j_1}b_2\dots b_n x_{j_n}b_{n+1}=0$. Так как R - кольцо без делителей нуля с обобщенным полиномиальным тождеством, то R - PI-кольцо ([I], теорема 8). Следовательно, R обладает классическим телом частных $\mathcal{D}$ ([8], теорема I.3.4). Тогда в теле $\mathcal{D}$ выполнено то же самое обобщенное полиномиальное тождество $a_1x_{i_1}a_2\dots a_m x_{i_m}a_{m+1}-b_1x_{j_1}b_2\dots b_n x_{j_n}b_{n+1}=0$ ([I], теорема 5), и, значит, в $\mathcal{D}$ выполнено обобщенное групповое тождество $(a_1x_{i_1}\dots x_{i_m}a_{m+1})^{-1}b_1x_{j_1}\dots x_{j_n}b_{n+1}=1$. По теореме 2, тело $\mathcal{D}$ коммутативно, и, следовательно, подкольцо R также коммутативно. Теорема 3 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 4

3.I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $n\geq 2$, $\mathcal{D}$ - тело с бесконечным центром Z и инволюцией $*$, причем, если $*$ - инволюция первого рода, то $\dim_Z\mathcal{D}>4$, f - невырожденная T-форма и $\eta(f)>0$. Тогда, если $A_1,\dots,A_m$ - нецентральные элементы из $GL(n,\mathcal{D})$, то существует элемент $e\in\mathcal{D}^n$, для которого $f(e,e)=0$ и $f(eA_i,e)\neq 0$ для всех i, $1\leq i\leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию f - T-форма, т.е. $f(x,y)=$

$=\varepsilon f(y,x)^*$, где $\varepsilon=1$, если форма f эрмитова, и $\varepsilon=-1$, если форма f косоэрмитова, и для любого $a\in\mathcal{D}^n$ значение $f(a,a)$ имеет вид $\beta^*+\varepsilon\beta$, где $\beta\in\mathcal{D}$. Положим $M=\{x\in\mathcal{D}\,|\,x^*=-\varepsilon x\}$.

3.I.I. Покажем, что централизатор множества M в $\mathcal{D}$ совпадает с Z. Действительно, если $\varepsilon=-1$, то $M=S$, где S - множество симметрических элементов тела $\mathcal{D}$, и подкольцо, порожденное множеством S, совпадает с $\mathcal{D}$ ([3], с.72). Пусть $\varepsilon=1$, т.е. $M=K$, где K - множество кососимметрических элементов тела $\mathcal{D}$. Если $\dim_Z\mathcal{D}>4$, то (см. [8], лемма 2.I.I0) подкольцо, порожденное множеством K, совпадает с $\mathcal{D}$. Наконец, если $\varepsilon\neq-1$ и $\dim_Z\mathcal{D}\leq 4$, то $\mathrm{char}\,\mathcal{D}\neq 2$, $*$ - инволюция второго рода (т.е.инволюция на центре не является тождественной) и (см. [8], лемма 6.3.I) централизатор множества K совпадает с Z.

3.I.2. Пусть $\alpha,\beta\in\mathcal{D}$ и $\alpha t=t\beta$, $\beta t=t\alpha$ для всех $t\in M$. Покажем, что $\alpha=\beta\in Z$. Действительно,

$$(\alpha-\beta)t+t(\alpha-\beta)=0. \qquad (2)$$

Пусть $\mathrm{char}\,\mathcal{D}\neq 2$, $\dim_Z\mathcal{D}>4$. Тогда из [8] (теоремы 6.3.3 и 6.3.4) следует, что $\alpha-\beta=0$ и $\alpha t=t\alpha$. В силу пункта 3.I.I, $\alpha=\beta\in Z$. Пусть $\mathrm{char}\,\mathcal{D}\neq 2$ и $\dim_Z\mathcal{D}\leq 4$. Тогда, по условию, $*$ - инволюция второго рода. Значит, подпространство над Z в $\mathcal{D}$, порожденное подмножеством M, совпадает с $\mathcal{D}$. Из равенства (2) вытекает, что $2(\alpha-\beta)=0$ и $\alpha-\beta=0$. Следовательно, $\alpha t=t\alpha$. В силу пункта 3.I.I, $\alpha=\beta\in Z$. Пусть, наконец, $\mathrm{char}\,\mathcal{D}=2$. Тогда, если $t\in M$, то $t^2\in M$ и $\alpha t^2=t^2\beta$. С другой стороны, $\alpha t^2=(\alpha t)t=t\beta t=t^2\alpha$. Значит, $t^2(\alpha-\beta)=0$ и $\alpha=\beta$. Следовательно, $\alpha t=t\alpha$ и, по пункту 3.I.I, $\alpha=\beta\in Z$.

3.I.3. Пусть $\alpha,\beta\in\mathcal{D}$ и $\alpha r^*=r\beta$ для любого $r\in\mathcal{D}$. Покажем, что $\alpha=\beta=0$. Действительно, полагая $r=t\in K$, получаем, что $-\alpha t=\alpha t^*=t\beta$. С другой стороны, при $r=1$, получаем, что $\alpha=\beta$. Значит, $-\alpha t=t\alpha$ и $\alpha t=t(-\alpha)$. В силу пункта 3.I.2, $\alpha\in Z$. Тогда $0=-\alpha r^*+r\beta=(r-r^*)\alpha$. Значит, $\alpha=0$, поскольку, по условию, инволюция в $\mathcal{D}$ нетождественна и $r-r^*\neq 0$ для некоторого $r\in\mathcal{D}$.

3.I.4. Пусть $g(x,y)$ - некоторая полуторалинейная форма на $\mathcal{D}^n$ и для любого $e\in\mathcal{D}^n$ из условия $f(e,e)=0$ следует, что $g(e,e)=0$. Тогда существует элемент $\lambda\in Z$ такой, что $g(x,y)=\lambda f(x,y)$.

Случай I: $n=2$. По условию, $\eta(f)>0$. Значит, матрица F формы f имеет вид $F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$ в некотором базисе e_1,e_2, где $\varepsilon=\pm 1$. Пусть $G=(g_{ij})$ - матрица формы g в базисе e_1,e_2.

Тогда $g(e,e)=\sum_{i,j=1}^{2} x_i g_{ij} x_j^*$ для $e=x_1e_1+x_2e_2$. По условию, $g(e_i,e_i)=0$, $i=1,2$. Значит, $g_{11}=g_{22}=0$. Положим $e=e_1+te_2$, где $t\in M$. Тогда $f(e,e)=t^*+\varepsilon t=0$. Следовательно, $0=g(e,e)=c_{12}t^*+te_{21}=-\varepsilon c_{12}t+tc_{21}$ и $\varepsilon c_{12}t=tc_{21}$. Аналогично, $t\varepsilon c_{12}=c_{21}t$. В силу пункта 3.I.2, $\varepsilon c_{12}=c_{21}=\varepsilon\lambda\in P$. Тогда $G=\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \varepsilon\lambda & 0\end{pmatrix}$ и $g(x,y)=\lambda f(x,y)$. Тем самым рассмотрение первого случая, когда $n=2$, в пункте 3.I.4 завершено.

Случай 2: $n>2$. По условию, $\eta(f)>0$. Значит, матрица F формы f имеет вид

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ \varepsilon & 0 & & \\ & & \alpha_3 & \\ 0 & & & \ddots\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

в некотором базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$. Пусть G – матрица формы g в базисе $e_1,\dots,e_n$. Поскольку для $n=2$ утверждение 3.I.4 доказано, то

$$G=\left(\begin{array}{cc|c}0 & \lambda & \\ \varepsilon\lambda & 0 & G_2\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{G_3} & G_4\end{array}\right), \qquad (3)$$

где $\lambda\in Z$. Пусть L – подпространство в $\mathcal{D}^n$, натянутое на векторы $e_3,\dots,e_n$, и элемент $a\in L$ такой, что $f(a,a)=\gamma\neq 0$. Тогда $\gamma=\beta^*+\varepsilon\beta$, ибо f – T-форма. Положим $e=e_1+(t-\beta)e_2+a$, где $t\in M$. Тогда $f(e,e)=(t-\beta)\varepsilon+t^*-\beta^*+f(a,a)=0$, поскольку $t\varepsilon+t^*=0$, $f(e_i,a)=f(a,e_i)=0$ для $i=1,2$ и $f(a,a)=\beta^*+\varepsilon\beta$. Тогда, по условию,

$$\begin{aligned}0=g(e,e)=\lambda(-\varepsilon\beta-\beta^*)+g(e_1,a)+g(a,e_1)-\beta g(e_2,a)-\\ -g(a,e_2)\beta^*+tg(e_2,a)-\varepsilon g(a,e_2)t+g(a,a).\end{aligned} \qquad (4)$$

Покажем, что $g(e_i,a)=g(a,e_i)=0$ для $i=1,2$. Поскольку t – произвольный элемент из M и $0\in M$, то из равенства (4) получаем, что $tg(e_2,a)-\varepsilon g(a,e_2)t=0$. Аналогично, для $b=da$, где d – произвольный элемент тела $\mathcal{D}$, получаем, что $tg(e_2,b)=\varepsilon g(b,e_2)t$ и $tg(e_2,a)d=d^*\varepsilon g(a,e_2)t$, ибо $g(x,y)$ – полуторалинейная форма. Согласно пункту 3.I.3, $tg(e_2,a)=\varepsilon g(a,e_2)=0$. Значит, $g(e_2,a)=g(a,e_2)=0$. Аналогично, $g(e_1,a)=g(a,e_1)=0$. Следовательно, равенство (4) принимает вид $0=-\lambda(\varepsilon\beta+\beta^*)+g(a,a)=-\lambda f(a,a)+g(a,a)$ для любого $a\in L$ такого, что $f(a,a)\neq 0$. Но, если $f(a,a)=0$, то, по условию,

$g(a,a)=0$. Значит,

$$g(a,a) = \lambda f(a,a) \tag{5}$$

для любого $a\in L$. Если $3\leq i\leq n$, то $g(e_i,e_i)=\lambda f(e_i,e_i)=\lambda\alpha_i$. Покажем, что $g(e_i,e_j)=0$ для $3\leq i\neq j\leq n$. Пусть $b=e_i+de_j$, $d\in\mathcal{D}$, $3\leq i\neq j\leq n$. Тогда $f(b,b)=f(e_i,e_i)+df(e_j,e_j)d^*$ и $g(b,b)=g(e_i,e_i)+dg(e_j,e_j)d^*+dg(e_j,e_i)+g(e_i,e_j)d^*$.
Из равенства (5) вытекает, что $dg(e_j,e_i)+g(e_i,e_j)d^*=0$ и, по пункту 3.I.3, $g(e_i,e_j)=0$. Итак, $G_2=G_3=0$ и $G_4=\lambda\begin{pmatrix}\alpha_3 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$,

а равенство (3) принимает вид $G=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & \\ \varepsilon & \lambda & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix}\lambda\alpha_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n\end{matrix}\end{array}\right)=\lambda F$. Следовательно, $g(x,y)=\lambda f(x,y)$, и утверждение 3.I.4 доказано.

Положим $g_i(x,y)=f(xA_i,y)$, где $1\leq i\leq m$.

3.I.5. Доказательство предложения 3.I проведем индукцией по m . Пусть $m=1$ и F – матрица формы f в каноническом базисе. Тогда A_1F – матрица формы $g_1(x,y)$ в каноническом базисе и $A_1F\neq\lambda F$ при $\lambda\in Z$, так как матрица A_1 нецентральная. Значит, $g_1(x,y)\neq\lambda f(x,y)$, и, согласно пункту 3.I.4, существует вектор $e\in\mathcal{D}^n$, для которого $f(e,e)=0$ и $g_1(e,e)=$ $=F(e_1A,e_1)\neq 0$. Тем самым для $m=1$ предложение доказано.
Пусть предложение 3.I справедливо для $k=m-1$ и векторы $e_1,e_2\in\mathcal{D}^n$ таковы, что $f(e_j,e_j)=0$ при $j=1,2$ и $g_i(e_1,e_1)\neq 0$ при $1\leq i\leq m-1$ и $g_m(e_2,e_2)\neq 0$. Положим $P=\{\lambda\in Z\mid\lambda=\lambda^*\}$. По условию поле Z , а значит и поле P , бесконечно. Предположим, что $f(e_2,e_1)=\alpha\neq 0$. Положим $e_3=t\alpha^{-1}e_2$, где $t\in K\setminus\{0\}$, если f – эрмитова форма, и $t=1$, если f – коэрмитова форма. Пусть $e=e_1+\lambda e_3$, где $\lambda\in P$. Тогда $f(e_3,e_1)=t\alpha^{-1}f(e_2,e_1)=t$ и $f(e_3,e_1)+f(e_1,e_3)=t+t^*=0$, если f – эрмитова форма, и $f(e_3,e_1)+f(e_1,e_3)=1-1=0$, если f – косоэрмитова форма. Значит, $f(e,e)=\lambda[f(e_3,e_1)+f(e_1,e_3)]=0$. Далее, $g_m(e_3,e_3)=$ $=(t\alpha^{-1})g_m(e_2,e_2)(t\alpha^{-1})^*\neq 0$, ибо $g_m(e_2,e_2)\neq 0$. Пусть теперь $f(e_2,e_1)=0$. Положим $e_3=e_2$ и $e=e_1+\lambda e_3$, где $\lambda\in P$. Тогда $f(e,e)=0$, ибо f – рефлексивная форма, и $f(e_1,e_1)=f(e_2,e_2)=$ $=f(e_2,e_1)=0$. Далее $g_m(e_3,e_3)=g_m(e_2,e_2)\neq 0$. Итак, в обоих случаях $f(e_1+\lambda e_3,e_1+\lambda e_3)=0$ для всех $\lambda\in P$, $g_m(e_3,e_3)\neq 0$ и $g_i(e_1,e_1)\neq 0$ для всех i, $1\leq i\leq m-1$. Покажем, что существует элемент $\lambda\in P$ такой, что $g_i(e_1+\lambda e_3,e_1+\lambda e_3)\neq 0$ для всех i, $1\leq i\leq m$. Действительно, $h_i(\lambda)=g_i(e_1+\lambda e_3,e_1+\lambda e_3)=$

$=g_i(e_1,e_1)+\lambda[g_i(e_1,e_3)+g_i(e_3,e_1)]+\lambda^2 g_i(e_3,e_3)$. Тогда $h_i(\lambda)$ – ненулевой многочлен от λ для любого i, $1\leq i\leq m$, ибо $g_i(e_1,e_1)\neq 0$ при $i\leq m-1$ и $g_m(e_2,e_2)\neq 0$. Положим $h(\lambda)=h_1(\lambda)h_2(\lambda)\dots h_m(\lambda)$. Тогда $h(\lambda)$ – ненулевой многочлен от λ с коэффициентами из $\mathcal{D}$, и, поскольку $|P|=\infty$, то существует элемент $\lambda\in P$, для которого $h(\lambda)\neq 0$. Поэтому $h_i(\lambda)\neq 0$ и $g_i(e_1+\lambda e_3, e_1+\lambda e_3)\neq 0$ для всех i, $1\leq i\leq m$. Значит, если $e=e_1+\lambda e_3$, то $f(e,e)=0$ и $f(eA_i,e)\neq 0$, где $1\leq i\leq m$. Тем самым предложение 3.I доказано.

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть в группе $U(n,f,\mathcal{D})$ выполнено тождество $A_1x_{i_1}^{\varepsilon_1}\dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}A_{m+1}=g(x_1,\dots,x_k)$, $M=\{j\mid 1\leq j\leq m+1, A_j$ – нецентральная матрица$\}$. По предложению 3.I, существует вектор $e\in\mathcal{D}^n$ такой, что $f(e,e)=0$ и $f(eA_j,e)\neq 0$ для всех $j\in M$. Зададим отображение $B:\mathcal{D}^n\longrightarrow\mathcal{D}^n$, полагая $B(u)=f(u,e)re$, где $r=-r^*\in\mathcal{D}\setminus\{0\}$, если f – эрмитова форма, и $r=1$, если f – косоэрмитова форма. Тогда $B(e)=0, B^2=0, B\neq 0$ и $1+\lambda B\in U_n(f,\mathcal{D})$ для любого $\lambda\in P$, где $P=\{\lambda\in Z\mid\lambda=\lambda^*\}$ (т.е. $1+\lambda B$ – унитарный сдвиг вдоль гиперплоскости $e^\perp$). Положим $x_t=(1-\lambda_{-t}B)x(1+\lambda_t B)$, где $1\leq t\leq k$, λ_t, λ_{-t} – набор из $2k$ различных ненулевых элементов поля P. Тогда $g(x_1,\dots,x_k)=c_1x^{\varepsilon_1}c_2\dots c_m x^{\varepsilon_m}c_{m+1}$ и $c_j=(1+\lambda_{s_{j-1}}B)A_j(1-\lambda_{-s_j}B)$, где $s_j=(-1)^{\varepsilon_j}i_j$ и $\lambda_{s_0}=\lambda_{s_{m+1}}=0$. Покажем, что $C_j\notin Z$ для любого j, $1\leq j\leq m+1$. Действительно, если $j\in M$ и $C_j\in Z$, то $(1+(\lambda_{s_{j-1}}-\lambda_{-s_j})B)A_j=$ $=\alpha E_n$, где $\alpha\in Z$, и $0=\alpha f(e,e)=$ $=f(e(1+(\lambda_{s_{j-1}}-\lambda_{-s_j})B)A_j,e)=f(eA_j,e)$, ибо $eB=B(e)=0$. Но $f(eA_j,e)\neq 0$ при $j\in M$. Значит, $C_j\notin Z$ при $j\in M$. Пусть $j\notin M$. Тогда A_j – центральная матрица. В силу определения обобщенного тождества $s_{j-1}\neq s_j$ и $\mu_j=\lambda_{s_{j-1}}-\lambda_{-s_j}\neq 0$. В этом случае $C_j=$ $=A_j(1+\mu_j B)\notin Z$, ибо $A_j\in Z$, $\mu_j\neq 0$ и $B^2=0$. Итак, в группе $U(n,f,\mathcal{D})$ выполнено обобщенное групповое тождество $C_1x^{\varepsilon_1}C_2\dots C_m x^{\varepsilon_m}C_{m+1}$ и все C_j нецентральны, $1\leq j\leq m+1$. По предложению 3.2, существует вектор $e_1\in\mathcal{D}^n$ такой, что $f(e_1C_j,e_1)\neq 0$ для всех j, $1\leq j\leq m+1$ и $f(e_1,e_1)=0$. Тогда унитарный сдвиг $h(u)=u+\lambda f(u,e_1)re_1$, где r – некоторый ненулевой элемент из $\mathcal{D}$, принадлежит группе $U(n,f,\mathcal{D})$ для любого $\lambda\in P$. Тогда $C_1h^{\varepsilon_1}\dots C_m h^{\varepsilon_m}C_{m+1}=1$,

$$0=f(e_1,e_1)=f(e_1C_1h^{\varepsilon_1}\dots C_m h^{\varepsilon_m}C_{m+1},e_1)=g_0+\lambda g_1+\dots+\lambda^m g_m \quad (6)$$

и $g_m=(-1)^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_m} f(e_1C_1,e_1)r\ldots f(e_1C_{m+1},e_1)r\neq 0$. С другой стороны, из равенства (6) следует, что $g_0=g_1=\ldots=g_m=0$, так как поле P – бесконечно (см. [7]). Полученное противоречие показывает, что в группе $\mathcal{U}(n,f,\mathcal{D})$ не выполнено никакое обобщенное групповое тождество с коэффициентами из $GL(n,\mathcal{D})$. Тем самым теорема 4 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 5

4.I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{D}$ – тело с бесконечным центром Z, $n>1$, G – подгруппа группы $GL(n,\mathcal{D})$, A – нецентральная матрица из $GL(n,\mathcal{D})$, L – гиперплоскость в $\mathcal{D}^n$ (т.е. $\dim_{\mathcal{D}} L=n-1$) и e – ненулевой вектор из $\mathcal{D}$, причем $ehAh^{-1}\in L$ для любого $h\in G$. Тогда в группе G выполнено некоторое обобщенное групповое тождество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ – базис пространства L и $e_1,\ldots,e_n$ – базис пространства $\mathcal{D}^n$. Положим $e_nT=e$ и $e_jT=0$ при $1\leq j\leq n-1$. Тогда $\operatorname{im}T=\mathcal{D}e$, $\ker T=L$ и, значит, $ThAh^{-1}T=0$, для любого $h\in G$. Пусть $\lambda\in Z$, $\lambda\neq 0,-1$. Тогда $1+\lambda T$ – нецентральный элемент группы $GL(n,\mathcal{D})$ и $C_\lambda=hA^{-1}h^{-1}(1+\lambda T)hAh^{-1}(1+\lambda T)=1+\lambda(hA^{-1}h^{-1}ThAh^{-1}+T)$. Пусть α,β – различные элементы из P, $\alpha\neq 0,-1$, $\beta\neq 0,-1$. Тогда $C_\alpha C_\beta=C_\beta C_\alpha$, $C_\alpha C_\beta C_\alpha^{-1}C_\beta^{-1}=1$ и в группе G выполнено тождество

$$g(x)=xA^{-1}x^{-1}(1+\alpha T)xAx^{-1}(1+\alpha T)xA^{-1}x^{-1}(1+\beta T)xA^{-1}x^{-1}\times$$
$$\times(1+\beta T)(1+\alpha T)^{-1}xA^{-1}x^{-1}(1+\alpha T)^{-1}xAx^{-1}(1+\beta T)^{-1}xA^{-1}x^{-1}(1+\beta T)^{-1}xAx^{-1},$$

т.е. $g(h)=1$ для всех $h\in G$. Покажем, что коэффициенты $(1+\alpha T)^{\pm 1}$, $(1+\beta T)^{\pm 1}$, $A^{\pm 1}$, $(1+\beta T)(1+\alpha T)^{-1}$ – нецентральные элементы группы $GL(n,\mathcal{D})$. Матрица A – нецентральная по условию, $1+\alpha T$, $1+\beta T$ нецентральны, ибо $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Предположим, что матрица $(1+\beta T)(1+\alpha T)^{-1}$ – нецентральная. Тогда $(1+\beta T)=(1+\alpha T)\lambda$, где $\lambda\in Z$, $e_1=e_1(1+\beta T)=e_1(1+\alpha T)\lambda=e_1\lambda=\lambda e_1$ и $\lambda=1$. Следовательно, $1+\beta T=1+\alpha T$ и $\beta=\alpha$. Но $\beta\neq\alpha$ Значит, матрица $(1+\beta T)(1+\alpha T)^{-1}$ также нецентральная и $g(x)$ – обобщенное групповое тождество. Предложение 4.I доказано.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть P – бесконечное поле, $n>2$ и f – невырожденная билинейная форма в пространстве размерности n над полем P. Тогда K_f содержит нецентральную матрицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – матрица формы f в единичном бази-

се и $F_1 = F + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & \\ -\lambda & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$, причем λ подберем так, чтобы $F_1 \in GL(n,P)$ и $\lambda \neq 0$. Положим $A = F_1 \cdot F^{-1}$. Так как матрицы F и F_1 задают одну и ту же квадратичную форму, то $f(xA,x) = f(x,x)$ и $A \in K_f$. Если A – центральная матрица, то $\alpha F = F + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & \\ -\lambda & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$, где $\alpha \in P$, $\alpha \neq 1$ и $F = (\alpha-1)^{-1}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & \\ -\lambda & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$, что противоречит невырожденности формы f. Значит, матрица A – нецентральная. Предложение 4.2 доказано.

4.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть в группе $GL(n,\mathcal{D})$ выполнено обобщенное групповое тождество с инволюцией

$$A_1 x_{i_1}^{\xi_1} A_2 \ldots x_{i_m}^{\xi_m} A_{m+1} = 1, \tag{7}$$

где $1 \leq i_j \leq k$. Положим:

$P = \{\alpha \in Z \mid \alpha = \alpha^*\}$;

$T = \{1, 2, \ldots, m+1\}$;

$L_1 = \{j \in T \mid \xi_{j-1} = \pm 1,\ \xi_j = \pm 1\}$;

$L_2 = \{j \in T \mid \xi_{j-1} = \pm *,\ \xi_j = \pm *\}$;

$L_3 = \{j \in T \mid \xi_{j-1} = \pm *,\ \xi_j = \pm 1\}$;

$L_4 = \{j \in T \mid \xi_{j-1} = \pm 1,\ \xi_j = \pm *\}$ $\quad (\xi_0 = \xi_{m+1} = 1)$.

Положим $s_j = i_j$ при $\xi_j = 1, -*$ и $s_j = -i_j$ при $\xi_j = -1, *$. Пусть α_s – различные ненулевые элементы поля $\mathcal{D}$, $-k \leq s \leq k$. Положим в равенстве (7) $x_t = (1 - \lambda\alpha_{-t} e_{12}) x (1 + \lambda\alpha_t e_{12})$, где $\lambda \in P$, $1 \leq t \leq k$. Тогда $B_1(\lambda) x^{\xi_1} \ldots x^{\xi_m} B_{m+1}(\lambda) = 1$.

4.3.1. Покажем, что найдется элемент $\lambda_0 \in P$ такой, что матрицы $B_j(\lambda_0)$ нецентральны при всех $j \in L_1 \cup L_2$ и матрицы $B_j(\lambda_0)$ незнакопеременные при всех $j \in L_3 \cup L_4$. Действительно, пусть $j \in L_1$. Тогда $B_j(\lambda) = (1 + \lambda\alpha_{s_{j-1}} e_{12}) A_j (1 - \lambda\alpha_{-s_j} e_{12})$. Предположим, что $B(\lambda_1), B(\lambda_2) \in Z$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in P$. Тогда

$$(1 + \lambda_i(\alpha_{s_{j-1}} - \alpha_{-s_j}) e_{12}) A_j \in Z \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Если $s_{j-1} = -s_j$, то из (8) следует, что $A_j \in Z$. С другой стороны, $s_{j-1} = -s_j$ и $j \in L_1$ влечет, что $i_j = i_{j-1}$ и $\xi_{j-1} = -\xi_j$. В си-

лу определения обобщенного группового тождества, $A_j \notin Z$. Значит, $s_{j-1} \neq -s_j$ и $\beta_j = \alpha_{s_{j-1}} - \alpha_{-s_j} \neq 0$. Тогда из включения (8) следует, что $1+(\lambda_1-\lambda_2)\beta_j e_{12} \in Z$ и, значит, $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, при $j \in L_1$ включение $B_j(\lambda) \in Z$ имеет место не более, чем для одного $\lambda = \lambda_j \in P$. Пусть $j \in L_2$. Тогда $B_j(\lambda) = (1-\lambda\alpha_{s_{j-1}} e_{21}) A_j (1+\lambda\alpha_{-s_j} e_{21})$. Как и в случае $j \in L_1$, получаем, что $B_j(\lambda) \in Z$ не более чем для одного $\lambda = \lambda_j \in P$. Пусть $j \in L_3$. Тогда $B_j(\lambda) = (1-\lambda\alpha_{s_{j-1}} e_{21}) A_j (1-\lambda\alpha_{-s_j} e_{12})$. Пусть $B_j(\lambda)$ – знакопеременная матрица. Тогда матрица $T_j^* B_j(\lambda) T_j = (1-\lambda(\alpha_{s_{j-1}} - \alpha_{-s_j}) e_{21}) A_j$ также знакопеременная, где $T_j^* = 1+\lambda\alpha_{-s_j} e_{21}$. Пусть $s_{j-1} = -s_j$. Тогда матрица A_j знакопеременная. Но $s_{j-1} = -s_j$ и $j \in L_3$. Значит $i_{j-1} = i_j$ и либо $\xi_{j-1} = *$, $\xi_j = 1$, либо $\xi_{j-1} = -*$, $\xi_j = -1$. В обоих случаях $\xi_{j-1} = * \xi_j$ и, по определению обобщенного тождества с инволюцией, матрица A_j не является знакопеременной. Полученное противоречие показывает, что $s_{j-1} \neq -s_j$ и $\alpha_{s_{j-1}} - \alpha_{-s_j} \neq 0$. По условию, $A_j \in GL(n, \mathcal{D})$. Значит, первая строка матрицы A_j – ненулевая и $(A_j)_{1i} \neq 0$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Пусть $v = e_2 + \mu e_i$, где e_2, e_i – векторы канонического базиса и $\mu \in P$, причем $d = (A_j)_{12} + \mu (A_j)_{1i} \neq 0$ и $\mu = 0$, если $i = 2$. Тогда (по определению знакопеременной матрицы)

$$0 = v T_j^* B_j(\lambda) T_j \bar{v} = b_2 + \lambda b_3, \quad \text{где } b_2, b_3 \in \mathcal{D} \text{ и } b_3 = (\alpha_{s_{j-1}} - \alpha_{-s_j}) d \neq 0.$$

Но уравнение $b_2 + \lambda b_3 = 0$, где $b_3 \neq 0$, имеет не более одного решения относительно $\lambda \in P$. Значит, для $j \in L_3$ матрица A_j будет знакопеременной не более, чем для одного $\lambda = \lambda_j \in P$. Пусть $j \in L_4$. Тогда $B_j(\lambda) = (1+\lambda\alpha_{s_{j-1}} e_{12}) A_j (1+\lambda\alpha_{-s_j} e_{21})$. Как и в случае $j \in L_3$, получаем, что $B_j(\lambda)$ – знакопеременная матрица не более, чем для одного $\lambda = \lambda_j \in P$. Так как поле P бесконечно, то найдется $\lambda_0 \in P \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}\}$. Итак, мы показали, что если $j \in L_1 \cup L_2$, то $B_j(\lambda_0)$ – нецентральная матрица, и если $j \in L_3 \cup L_4$, то $B_j(\lambda_0)$ – знакопеременная матрица. Доказательство утверждения 4.3.I завершено.

Итак, в группе $GL(n, \mathcal{D})$ выполнено тождество

$$B_1 x^{\xi_1} \ldots x^{\xi_m} B_{m+1} = 1, \tag{9}$$

в котором B_j – нецентральная матрица при $j \in L_1 \cup L_2$ и B_j – незнакопеременная при $j \in L_3 \cup L_4$. Пусть

$$F = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix},$$

$f(x,y)$ – полуторалинейная форма, задаваемая матрицей F и $e_1=(1,0,\dots,0)\in\mathcal{D}^n$. Тогда $f(e_1,e_1)=0$ и $f(e_1,d_1)=-f(d_1,e_1)^*$ для любого $d_1\in\mathcal{D}^n$. Положим $G=AFA^*$ и $e=e_1A^{-1}$, где $A\in E(n,\mathcal{D})$. Пусть $g(x,y)$ – полуторалинейная форма, задаваемая матрицей G. Тогда $g(x,y)=f(xA,yA)$. Значит, $g(e,e)=0$ и $g(e,d)=-g(d,e)^*$ для любого $d\in\mathcal{D}^n$. Пусть $h\in GL(n,\mathcal{D})$ – такой элемент, что $hGh^*=G$. Подставим $x=h$ в равенство (9), учитывая при этом, что $h^*=G^{-1}h^{-1}G$ и $h^{-*}=G^{-1}hG$. Получим, что $1=$ $=C_1(A)h^{\varepsilon_1}C_2(A)\dots h^{\varepsilon_m}C_{m+1}(A)$, где $\varepsilon_j=\xi_j$, если $\xi_j=\pm1$ и $\varepsilon_j=-*\xi_j$, если $\xi_j=\pm*$. При этом $C_j(A)=B_j$ при $j\in L_1$, $C_j(A)=GB_jG^{-1}$ при $j\in L_2$, $C_j(A)=GB_j$ при $j\in L_3$, $C_j(A)=B_jG^{-1}$ при $j\in L_4$, где $G=AFA^*$. Положим $f_j(A)=$ $=g(eC_j,e)=eC_jGe^*=e_1A^{-1}C_jAFA^*A^{-*}e_1^*=e_1(A^{-1}C_jAF)e_1^*$.

4.3.2. Пусть $1\le j\le m+1$. Покажем, что существует матрица $A_j\in E(n,\mathcal{D})$, для которой $f_j(A_j)\neq0$. Пусть $j\in L_1$, тогда B_j – нецентральная матрица и $f_j(A)=e_1A^{-1}C_jAFe_1^*=e_1A^{-1}B_jAFe_1^*$. Если $f_j(A)=0$ для всех $A\in E(n,\mathcal{D})$, то $e_1A^{-1}B_jA\in L$, где $L=\{v\in\mathcal{D}^n\mid f(v,e_1)=0\}$ – гиперплоскость в $\mathcal{D}^n$, и по предположению 4.I в группе $E(n,\mathcal{D})$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество. Но тогда и в группе $GL(n,\mathcal{D})$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество, ибо коммутант $GL(n,\mathcal{D})$ совпадает с $E(n,\mathcal{D})$. Но по теореме I в $GL(n,\mathcal{D})$ не выполнено никакое обобщенное групповое тождество. Значит, $f_j(A_j)\neq0$ для некоторого $A_j\in E(n,\mathcal{D})$. Пусть $j\in L_2$. Тогда $f_j(A)=$ $=e_1FA^*B_jA^{-*}e_1^*$. Если $f_j(A)=0$, то $f_j(A)^*=e_1A^{-1}B_j^*AF^*e_1^*=0$ и так же, как в случае $j\in L_1$, получаем, что $f_j(A_j)\neq0$ для некоторого $A_j\in E(n,\mathcal{D})$. Пусть $j\in L_3$. Тогда B_j не является знакопеременной матрицей и

$$f_j(A)=e_1A^{-1}GA_jAFe_1^*=e_1A^{-1}AFA^*B_jAFe_1^*=-e_1F^*A^*B_jAFe_1^*,$$

ибо $e_1F=-e_1F^*$. Матрица B_j незнакопеременная, и значит, $vB_jv^*\neq0$ для некоторого $v\in\mathcal{D}_n$. Тогда существует матрица $C\in GL(n,\mathcal{D})$ такая, что $e_1C=v$ и $C^*F^{-1}=\lambda A_j$, где $A_j\in E(n,\mathcal{D})$ и $\lambda\in Z$ (ибо $GL(n,\mathcal{D})\subseteq Z\cdot E(n,\mathcal{D})$). Следовательно, $\lambda^{-1}C^*=A_jF$, $(\lambda^{-1})^*C=F^*A_j^*$ и $e_1F^*A_j^*=(\lambda^{-1})^*v$. Тогда $f_j(A_j)=$ $=-(\lambda^{-1})^*\lambda^{-1}vB_jv^*\neq0$. Пусть, наконец, $j\in L_4$. Тогда

$$f_j(A)=e_1A^{-1}B_jGAFe_1^*=e_1A^{-1}B_jA^{-*}F^{-1}A^{-1}AFe_1^*=e_1A^{-1}B_jA^{-*}e_1^*.$$

Как и в случае $j\in L_3$, получаем, что $f_j(A_j)\neq0$ для некоторого $A_j\in E(n,\mathcal{D})$.

4.3.3. Покажем, что существует матрица $A \in E(n, \mathcal{D})$ такая, что $f_j(A) \neq 0$ для всех j, $1 \leq j \leq m+1$. Действительно, группа $E(n,\mathcal{D})$ порождается элементами вида $1 + r e_{is}$, где $r \in \mathcal{D}$, $1 \leq i \neq s \leq n$. Следовательно, $A_j = \prod_{k=1}^{d_j} (1 + r_{jk} e_{i_{jk} s_{jk}})$.

Положим $g_j(x_j) = \prod_{k=1}^{d_j} (1 + r_{jk} e_{i_{jk} s_{jk}} s_{jk} x_j) \in E(n, \mathcal{D})$. Тогда $g_j(1) = A_j$, $g_j(0) = E$, $g_j(\lambda) \in E(n, \mathcal{D})$ для любого $\lambda \in P$. Положим $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) = g_1(x_1) g_2(x_2) \ldots g_{m+1}(x_{m+1})$. Тогда $f_j(g(x_1, \ldots, x_{m+1})) = h_j(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathcal{D}[x_1, \ldots, x_{m+1}]$. Покажем, что многочлены $h_j(x)$ ненулевые для всех j, $1 \leq j \leq m+1$. Действительно, полагая $t_j = 1$ и $t_i = 0$ при $i \neq j$, получим, что $g(t_1, \ldots, t_{m+1}) = g_j(1) = A_j$ и $h_j(t_1, \ldots, t_{m+1}) = f_j(A_j) \neq 0$. Положим $h(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \prod_{j=1}^{m+1} h_j(x_1, \ldots, x_{m+1})$. Тогда $h(x)$ – ненулевой многочлен от $m+1$ переменных над телом $\mathcal{D}$. Так как поле P, лежащее в центре тела $\mathcal{D}$, бесконечно, то $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) \neq 0$ для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \in P$. Положим $A = g(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$. Тогда $A \in E(n, \mathcal{D})$ и $f_j(A) = h_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) \neq 0$. Отметим, что доказательство пункта 4.3.3 аналогично доказательству утверждения о том, что связная алгебраическая группа неприводима в топологии Зарисского.

4.3.4. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 5. Мы показали, что существует матрица $A \in E(n, \mathcal{D})$ такая, что $g(eC_1, e) = f_j(A) \neq 0$ для всех j, $1 \leq j \leq m+1$, и выполнено равенство

$$C_1 h^{\varepsilon_1} C_2 \ldots h^{\varepsilon_m} C_{m+1} = 1 \qquad (10)$$

для всех $h \in GL(n, \mathcal{D})$ таких, что $hGh^* = G$, где $\varepsilon_j = \pm 1$. Кроме того, $g(e,e) = 0$ и $g(e,d) = -g(d,e)^*$ для любого $d \in \mathcal{D}^{n}$. Положим $vh = v - \lambda g(v, e) e$, где $v \in \mathcal{D}^n$, $\lambda \in P$. Тогда $h_\lambda \in GL(n, \mathcal{D})$, $h_\lambda^{-1} = h_{-\lambda}$ и

$$g(v_1 h_\lambda, v_2 h_\lambda) = g(v_1 - \lambda g(v_1, e) e, v_2 - \lambda g(v_2, e) e) =$$
$$= g(v_1, v_2) - \lambda [g(v_1, e) g(e, v_2) + g(v_1, e) g(v_2, e)^*] =$$
$$= g(v_1, v_2) - \lambda g(v_1, e) [-g(v_2, e)^* + g(v_2, e)^*] = g(v_1, v_2).$$

Значит, $h_\lambda G h_\lambda^* = G$ и $1 = C_1 h_\lambda^{\varepsilon_1} C_2 \ldots h_\lambda^{\varepsilon_m} C_{m+1} = C_1 h_{\varepsilon_1 \lambda} C_2 \ldots h_{\varepsilon_m \lambda} C_{m+1}$. Тогда

$$0 = g(e,e) = g(eC_1 h_{\varepsilon_1 \lambda} \ldots h_{\varepsilon_m \lambda} C_{m+1}, e) = g_0 + \lambda g_1 + \ldots + \lambda^m g_m, \qquad (11)$$

где $g_m = g(eC_1, e) \ldots g(eC_{m+1}, e) \cdot (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m} \neq 0$. С другой стороны, из равенства (11) следует, что $g_0 = \ldots = g_m = 0$, ибо поле P

бесконечно (см. [7]). Полученное противоречие и доказывает теорему 5.

§ 5. Доказательство теорем 6,7

5.I.I. Пусть $\eta_f > 0$, $g(x,x)$ – некоторая квадратичная форма над P и для любого $e \in P^n$ из условия $f(e,e)=0$ следует, что $g(e,e)=0$. Тогда существует элемент $\lambda \in P$ такой, что $\lambda f(a,a) = g(a,a)$ для всех $a \in P^n$.

Действительно, так как $\eta_f > 0$ и $char P \neq 2$, то существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства P^n такой, что для $a = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ имеем

$$f(a,a) = x_1 x_2 + \sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j . \tag{I2}$$

Пусть $G = (g_{ij})$ – матрица формы g в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. По условию, $g(e_1, e_1) = 0$. Значит,

$$g(a,a) = x_1 \sum_{j=2}^{n} (g_{1j} + g_{j1}) x_j + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} x_i x_j . \tag{I3}$$

Из равенства (I2) получаем, что если $f(a,a)=0$ и $x_2 \neq 0$, то $x_1 = -x_2^{-1} \sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &0 = g(a,a) = x_2^{-1}\Big(\sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{j=2}^{n}(g_{1j}+g_{j1})x_j\Big) + \sum_{i,j=2} g_{ij} x_i x_j \\ &\text{и} \\ &\Big(\sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{j=2}^{n}(g_{1j}+g_{j1})x_j\Big) = x_2\Big(\sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} x_i x_j\Big) \end{aligned}\right\} \tag{I4}$$

для любых элементов $x_2, \ldots, x_n \in P$. Так как кольцо многочленов $P[x_2, \ldots, x_n]$ факториально и x_2 не делит ненулевой многочлен $\sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j$ (ибо $n > 2$ и форма f – невырожденная), то

$$\lambda x_2 = \sum_{j=2}^{n} (g_{1j} + g_{j1}) x_j \tag{I5}$$

для некоторого $\lambda \in P$, и, значит,

$$\lambda\Big(\sum_{i,j=3}^{n} f_{ij} x_i x_j\Big) = \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} x_i x_j . \tag{I6}$$

Из равенств (I2)–(I6) получаем, что $\lambda f(a,a) = g(a,a)$.

5.I.2. Пусть $\eta_f > 0$ и $A_1, \ldots, A_m \in P_n \setminus K_f$. Тогда существует вектор $e \in P^n$, для которого $f(e,e)=0$ и $f(eA_k, e) \neq 0$ для всех k,

$1 \leq k \leq m$.

Положим $g_k(x,y)=f(xA_k,y)$. По определению K_f, $g_k(x,x)\neq\lambda f(x,x)$ при $\lambda\in P$. Согласно 5.I.I, $g_1(e,e)\neq 0$ и $f(e,e)=0$ для некоторого вектора $e\in P^n$. Пусть для $m_1=m-1$ утверждение 5.I.2 справедливо и $e_1,e_2\in P_n$, $f(e_1,e_1)=f(e_2,e_2)=0$, $g_m(e_2,e_2)\neq 0$ и $g_k(e_1,e_1)\neq 0$ для всех k, $1\leq k\leq m-1$. Если $f(e_2,e_1)=0$, то положим $e=e_1+\lambda e_2$, где $\lambda\in P$. Тогда $f(e,e)=0$. Ввиду бесконечности поля P существует элемент $\lambda\in P$, для которого $g_k(e,e)\neq 0$ при всех k, $1\leq k\leq m$. Пусть теперь $f(e_2,e_1)\neq 0$ и L – гиперболическая плоскость, натянутая на векторы e_1,e_2. Тогда $L^\perp$ – ненулевое (так как $n>2$) неизотропное пространство в P^n. Так как форма f симметрична, то $f(a,a)\neq 0$ для некоторого $a\in L^\perp$. Пусть $\alpha=f(a,a)(2f(e_2,e_1))^{-1}$ и $e=\lambda^2e_1-\alpha\mu^2e_2+\lambda\mu a$, где $\lambda,\mu\in P$. Тогда $f(e,e)=(-2\alpha f(e_1,e_2)+f(a,a))\lambda^2\mu^2=0$ для всех $\lambda,\mu\in P$ и

$$g_k(e,e)=\lambda^4g_k(e_1,e_1)+\alpha^2\mu^4g_k(e_2,e_2)+\lambda^2\mu^2(-\alpha(g_k(e_1,e_2)+$$

$$+g_k(e_2,e_1))+g_k(a,a))+\lambda^3\mu(g_k(e_1,a)+g_k(a,e_1))+$$

$$+\lambda\mu^3(g_k(e_2,a)+g_k(a,e_2))=h_k(\lambda,\mu).$$

Заметим, что для любого k, $1\leq k\leq m$ многочлены $h_k(\lambda,\mu)$ ненулевые, так как при $k=m$ коэффициент $\alpha^2g_k(e_2,e_2)$ при μ^4 отличен от нуля, а при $k<m$ коэффициент $g_k(e_1,e_1)$ при λ^4 отличен от нуля. Положим $h(\lambda,\mu)=h_1(\lambda,\mu)\ldots h_m(\lambda,\mu)$. Тогда $h(x,y)$ – ненулевой многочлен из кольца $P[x,y]$. Поскольку поле P бесконечно, то $h(\lambda,\mu)\neq 0$ для некоторых $\lambda,\mu\in P$. Тогда $g_k(e,e)=$ $=h_k(\lambda,\mu)\neq 0$ для всех k, $1\leq k\leq m$, и утверждение 5.I.2 доказано.

5.I.3. В группе $O(n,f,P)$ не выполнено никакое K_f-нецентральное обобщенное групповое тождество.

Пусть это не так, и в $O(n,f,P)$ выполнено K_f-нецентральное обобщенное групповое тождество $g(x_1,\ldots,x_k)=A_1x_{i_1}^{\varepsilon_1}A_2\ldots x_{i_m}^{\varepsilon_m}A_{m+1}=1$ и $\bar{P}$ – алгебраическое замыкание поля P. Тогда $O(n,f,P)\subseteq GL(n,P)$. Ясно, что тождество g выполнено в замыкании H группы $O(n,f,P)$ относительно топологии Зарисского в группе $GL(n,\bar{P})$, так как условие $g(x_1,\ldots,x_k)=1$ является системой полиномиальных уравнений относительно элементов матриц x_i из группы $O(n,f,P)$. Далее, $H=O(n,f,\bar{P})$, так как группы $O(n,f,P)$ и $O(n,f,\bar{P})$ порождаются отражениями, т.е. множеством матриц $A(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, зависимых от параметров, лежащих в поле P и $\bar{P}$ соответственно, и поле P

бесконечно. Значит, утверждение 5.I.3 достаточно доказать в случае алгебраически замкнутого поля и, в частности, можно считать, что $\eta(f)>0$. Положим $M=\{s \mid A_s \notin K_f,\ 1\le s\le m+1\}$. Согласно пункту 2, существует вектор $e_1\in\mathcal{D}^n$ такой, что $f(e_1,e_1)=0$ и $f(e_1A_s,e_1)\neq 0$ для всех $s\in M$. Положим $g_0(x,y)=f(x,y)$, $g_s(x,y)=f(xA_s,y)$ при $1\le s\le m+1$. Тогда $g_s(x,y)$- невырожденные билинейные формы, так как поле P бесконечно, то существует вектор d_1, не принадлежащий объединению гиперплоскостей $L_\rho=\{b \mid g_\rho(e_1,b)=0\}$, где $0\le\rho\le m+1$. Получаем, что $f(e_1A_s,d_1)\neq 0$ для всех ρ, $1\le\rho\le m+1$, и $f(e_1,d)\neq 0$. Тогда векторы e_1 и d_1 образуют гиперболическую плоскость, т.е. существует вектор $e_2=d_1+\alpha e_1$, для которого $f(e_2,e_2)=0$ и $f(e_1,e_2)=f(e_2,e_1)=1$. Далее, $A_s\in K_f$ при $s\notin M$ и, значит,

$$f(e_1A_s,e_2)=f(e_1A_s,\alpha e_1+d_1)=\alpha f(e_1A_s,e_1)+f(e_1A_s,d_1)=$$
$$=f(e_1A_s,d_1)\neq 0, \qquad \text{ибо } f(e_1A_s,e_1)=\lambda f(e,e_1)=\lambda\cdot 0=0.$$

Итак, мы получили, что

$$f(e_1A_s,e_1)\neq 0 \qquad \text{для всех } s\in M, \tag{I7}$$

$$f(e_1A_s,e_2)\neq 0 \qquad \text{для всех } s\notin M, \tag{I8}$$

$f(e_1,e_1)=f(e_2,e_2)=0$, $f(e_1,e_2)=f(e_2,e_1)=1$. Выберем $d\in P^n$ так, чтобы $f(e_i,d)=0$ для $i=1,2$ и $f(d,d)\neq 0$. Вектор d с такими свойствами существует, ибо f – невырожденная симметрическая форма и $n>2$. Положим $a=d+\lambda e_1$, где $\lambda\in P$. Тогда $f(a,a)=f(d,d)\neq 0$ и отражение h_λ, для которого

$$h_\lambda(b)=b-\frac{2f(b,a)}{f(a,a)}a=b-\frac{2(f(b,d)+\lambda f(b,e_1)}{f(d,d)}(d+\lambda e_1),$$

принадлежит группе $O(n,f,P)$ для любого $\lambda\in P$. При этом $h_\lambda^2=1$ и $e_1h_\lambda=h_\lambda(e_1)=e_1$, ибо $f(e_1,e_1)=f(e_1,d)=0$. Пусть μ_i и $-\mu_i$- различные ненулевые элементы поля P, где $1\le i\le k$ и $\lambda_i=\lambda\mu_i$, $\lambda\in P$. Положим $x_i=h_{-\lambda_i}xh_{\lambda_i}$, $1\le i\le k$. Тогда $h_0g(x_1,\dots,x_k)h_0=c_1(\lambda)x^{\varepsilon_1}\dots c_m(\lambda)x^{\varepsilon_m}c_{m+1}(\lambda)$ является тождеством группы $O(n,f,P)$, где $c_s(\lambda)=h_{\alpha_{s-1}}A_sh_{-\alpha_s}$, $\alpha_s=\varepsilon_s\lambda_{i_s}=\lambda\varepsilon_s\mu_{i_s}$ при $1\le s\le m+1$ и $\alpha_0=\alpha_{m+1}=0$. Покажем сначала, что существует $\lambda_0\in P$, для которого $C_s(\lambda_0)\notin K_f$ для всех s, $1\le s\le m+1$. Действительно, если $C_s(\lambda)\in K_f$, то $h_{-\alpha_s}h_{\alpha_{s-1}}A_s\in K_f$ ибо K_f инвариантно относительно сопряжения элементами из $O(n,f,P)$. Предположим, что $s\in M$ и

$C_s(\lambda)\in K_f$. Тогда, по определению множества K_f, получаем, что $f(e_1 h_{-\alpha_s} h_{\alpha_{s-1}} A_s, e_1)=\mu f(e_1,e_1)=0$. Но $e_1 h_\alpha = e_1$ для любого $\alpha\in P$ и, значит,

$$0=f(e_1 h_{-\alpha_s} h_{\alpha_{s-1}} A_s, e_1)=f(e_1 A_s, e_1).$$

С другой стороны, из неравенства (I7) следует, что $f(e_1 A_s, e_1)\neq 0$ при $s\in M$. Значит, $C_s(\lambda)\notin K_f$ для любых $s\in M$ и $\lambda\in P$.

Предположим, что $s\notin M$ и $C_s(\lambda)\in K_f$. Тогда $A_s\in K_f$ по определению множества M. Так как тождество $g(x_1,\dots,x_k)=1$ K_f- нецентрально, то либо $i_{s-1}\neq i_s$, либо $\varepsilon_{s-1}\neq -\varepsilon_s$. Значит, $\varepsilon_{s-1}\mu_{i_{s-1}}+\varepsilon_s\mu_{i_s}=\beta_s\neq 0$, при этом $\alpha_{s-1}+\alpha_s=\lambda\beta_s$. Рассмотрим вектор $e_2 h_{-\alpha_s} h_{\alpha_{s-1}}$. По определению отражения $h_{-\alpha_s}$ получаем, что

$$e_2 h_{-\alpha_s}=e_2-\frac{2(f(e_2,d)-\alpha_s f(e_2,e_1)}{f(d,d)}(d-\alpha_s e_1)=$$
$$=e_2-\frac{2\alpha_s}{f(d,d)}(d-\alpha_s e_1);$$
$$e_2 h_{-\alpha_s}\cdot h_{\alpha_{s-1}}=e_2-\frac{2\alpha_{s-1}}{f(d,d)}(d+\alpha_{s-1}e_1)+$$
$$+\frac{2\alpha_s}{f(d,d)}\left(d-\alpha_s e_1-\frac{2f(d,d)}{f(d,d)}(d+\alpha_{s-1}e_1)\right)=$$
$$=e_2-\frac{2(\alpha_{s-1}+\alpha_s)d}{f(d,d)}-\frac{2(\alpha_{s-1}+\alpha_s)^2}{f(d,d)}e_1=$$
$$=e_2-\lambda\frac{2\beta_s}{f(d,d)}d-\lambda^2\frac{2\beta_s^2}{f(d,d)}e_1.$$

Так как $C_s(\lambda)\in K_f$, то $h_{-\alpha_s}h_{\alpha_{s-1}}A_s\in K_f$ и $f(e_2 h_{-\alpha_s}h_{\alpha_{s-1}}A_s, e_2)=$ $=\mu f(e_2,e_2)=0$. С другой стороны, $\varphi_s(\lambda)=f(e_2 h_{-\alpha_s}h_{\alpha_{s-1}}A_s, e_2)=$ $=f\left(\left(e_2-\lambda\frac{2\beta_s}{f(d,d)}d-\lambda^2\frac{2\beta_s^2}{f(d,d)}e_1\right)A_s, e_2\right)$ и $\varphi_s(x)$ - ненулевой многочлен над телом $\mathcal{D}$, ибо коэффициент при λ^2 равен $\frac{2\beta_s^2}{f(d,d)}f(e_1A_s,e_2)=0$, поскольку $f(e_1A_s,e_2)\neq 0$ для $s\in M$ (см. (I8)). Из бесконечности поля P следует существование элемента $\lambda_0\in P$ такого, что $\varphi_s(\lambda_0)\neq 0$ для всех $s\notin M$, $1\leq s\leq m+1$. Тогда $C_s(\lambda_0)\notin K_f$ для всех $s\in M$ и всех $s\notin M$. Итак, в группе $O(n,f,P)$ выполнено тождество $C_1x^{\varepsilon_1}\dots C_m x^{\varepsilon_m}C_{m+1}=1$ и $C_s\notin K_f$ для всех s, $1\leq s\leq m+1$. Согласно 5.I.2, существует вектор $e\in P^n$ такой, что $f(e,e)=0$ и $f(eC_s,e)\neq 0$ для всех s, $1\leq s\leq m+1$. Положим $a_1=d_1+\lambda e$, где $d_1\in P^n$,

$f(e,d_1)=0$ и $f(d_1,d_1)\neq 0$. Тогда $f(a_1,a_1)=f(d_1,d_1)$ и отражение t_λ, для которого

$$t_\lambda(b)=b-\frac{2f(b,a_1)}{f(a_1,a_1)}=b-\frac{2(f(b,d_1)+\lambda f(b,e))}{f(d_1,d_1)}(d_1+\lambda e),$$

лежит в группе $O(n,f,P)$ для любого $\lambda\in P$. Положим $x=t_\lambda$. Получаем $1=C_1t_\lambda C_2\dots t_\lambda C_{m+1}$, ибо $t_\lambda^{-1}=t_\lambda$ и

$$0=f(e,e)=f(eC_1t_\lambda\dots t_\lambda C_{m+1},e)=g_0+\lambda g_1+\dots+\lambda^{2m}g_{2m}, \qquad (19)$$

где $g_{2m}=\frac{(-2)^m}{f(d_1,d_1)^m}f(eC_1,e)\dots f(eC_{m+1},e)\neq 0$,

ибо $f(eC_s,e)\neq 0$ для всех s, $1\leq s\leq m+1$. С другой стороны, из равенства (19) вытекает, что $g_0=\dots=g_{2m}=0$, ибо поле P бесконечно. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 5.1.3.

5.1.4. Если $\eta(f)>0$, то в группе $O(n,f,P)$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество.

Действительно, по предложению 4.2, существует нецентральная обратимая матрица $A\in K_f$, и, по определению K_f, $f(xA,x)=\lambda f(x,x)$, где $\lambda\in P$. Из условия $\eta(f)>0$ следует существование вектора $e\in P^n$ такого, что $f(e,e)=0$. Пусть $G\in O(n,f,P)$. Тогда

$$f(eGAG^{-1},e)=f(eGA,eG)=\lambda f(eG,eG)=\lambda f(e,e)=0,$$

и значит, $eGAG^{-1}\in L$, где $L=\{c\in P^n \mid f(c,e)=0\}$ – гиперплоскость пространства P^n. Тогда по предложению 4.1 в группе $O(n,f,P)$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество.

Вместе с доказательством утверждения 5.1.4 нами завершено доказательство теоремы 6.

.2.1. Пусть $A_1,\dots,A_m\in P^n\setminus K_f$. Тогда найдется вектор $e\in P_n$, для которого $f(eA_i,e)\neq 0$ при всех i, $1\leq i\leq m$ и $f(e,e)=0$.

Доказательство проведем индукцией по m. Так как $f(e,e)=0$ для всех $e\in P^n$ и $A_1\in K_f$, то $f(eA_1,e)\neq 0$ для некоторого $e\in P^n$, т.е. при $m=1$ все в порядке. Пусть для $m=k-1$ утверждение 5.2.1 справедливо и $m=k$. Тогда существуют $e_1,e_2\in P^n$, для которых $f(e_1A_i,e_1)\neq 0$ при $1\leq i\leq k-1$ и $f(e_2A_k,e_2)\neq 0$. Пусть $e=e_1+\lambda e_2$, $\lambda\in P$. Тогда $f(eA_i,e)=f(e_1A,e_1)+\lambda g_1+\lambda^2 f(e_2A_i,e_2)=f_i(\lambda)$ и $f_i(\lambda)$ – ненулевой многочлен от λ при $1\leq i\leq k$. Так как поле P бесконечно, то найдется элемент $\lambda_0\in P$, для которого $f_i(\lambda_0)\neq 0$ для

всех i, $1\leq i\leq k$ и, значит, для $e=e_1+\lambda_0 e_2$ получаем, что $f(eA_i,e)\neq 0$ для всех i, $1\leq i\leq k$.

5.2.2. В группе $Sp(2n,f,P)$ не выполнено никакое K_f-нецентральное групповое тождество.

Пусть это не так, и в $Sp(2n,f,P)$ выполнено K_f-нецентральное групповое тождество $g(x_1,\dots,x_k)=A_1x_{i_1}^{\varepsilon_1}A_2\dots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m}A_{m+1}$. Положим $M=\{s\mid A_s\notin K_f,\ 1\leq s\leq m+1\}$. Согласно утверждению 5.2.I существует элемент $e_1\in P^n$ такой, что $f(e_1,e_1)=0$ и $f(e_1A_s,e_1)\neq 0$ при $s\in M$. Тогда унитарный сдвиг h_λ, для которого $h_\lambda(b)=b-\lambda f(b,e_1)e_1$ принадлежит группе $Sp(2n,f,P)$ для любого $\lambda\in P$. При этом $h_\lambda^{-1}=h_{-\lambda}$, $h_\lambda h_\mu=h_{\lambda+\mu}$, $e_1h_\lambda=h_\lambda(e_1)=e_1$. Положим $x_i=h_{\lambda_{-i}}xh_{\lambda_i}$, где λ_i,λ_{-i} – различные элементы из $P\setminus\{0\}$, $1\leq i\leq k$. Тогда $g(x_1,\dots,x_k)=C_1x^{\varepsilon_1}C_2\dots C_m x_{i_m}^{\varepsilon_m}C_{m+1}=1$ является обобщенным групповым тождеством группы $Sp(2n,f,P)$, где $C_s=h_{\lambda_{j_{s-1}}}A_s h_{-\lambda_{-j_s}}$, $j_s=(-1)^{\varepsilon_s}i_s$ и $\lambda_{j_0}=\lambda_{j_{m+1}}=0$. Покажем сначала, что $C_s\notin K_f$ для всех s, $1\leq s\leq m+1$. Отметим, что если $C_s\in K_f$, то $h_{-\lambda_{-j_s}}h_{\lambda_{j_{s-1}}}A_s=h_{\alpha_s}A_s\in K_f$, где $\alpha_s=\lambda_{j_{s-1}}-\lambda_{-j_s}$. Предположим, что $s\in M$ и $C_s\in K_f$. Тогда, по определению K_f, получаем, что $f(eh_{\alpha_s}A_s,e_1)=$ $=\alpha f(e_1,e_1)=0$. Но $e_1h_{\alpha_s}=e_1$ и, значит, $f(e_1h_{\alpha_s}A_s,e_1)=$ $=f(e_1A_s,e_1)$. Далее, $s\in M$ и, значит, $f(e_1A_s,e_1)\neq 0$ (по выбору вектора e_1). Полученное противоречие показывает, что $C_s\notin K_f$ при $s\in M$. Предположим, что $s\in M$ и $C_s\in K_f$. Тогда, по определению M, $A_s\in K_f$, а так как тождество $g(x_1,\dots,x_k)=1$ является K_f-нецентральным, то $j_{s-1}\neq -j_s$ и значит, $\alpha_s=\lambda_{j_{s-1}}-\lambda_{-j_s}$. Следовательно, $h_{\alpha_s}A_s\in K_f$, $\alpha_s\neq 0$ и $A_s\in K_f$. Так как поле P бесконечно, а $f(x,y)$ и $g_s(x,y)=$ $=f(xA_s,y)$ – невырожденные билинейные формы, то существует вектор $e_2\in P^n$ такой, что $f(e_1,e_2)\neq 0$ и $f(e_1A_s,e_2)\neq 0$ для всех s, $1\leq s\leq m+1$. Тогда $e_2\cdot h_{\alpha_s}=e_2-\alpha_s f(e_2,e_1)e_1$. Из условия $h_{\alpha_s}A_s\in K_f$ следует, что $f(e_2h_{\alpha_s}A_s,e_2)=\mu f(e_2,e_2)=0$. С другой стороны, $f(e_2h_{\alpha_s}A_s,e_2)=f(e_2A_s,e_2)-$ $-\alpha_s f(e_2,e_1)f(e_1A_s,e_2)\neq 0$, ибо $f(e_2A_s,e_2)=\mu f(e_2,e_2)=0$ (так как $A_s\in K_f$), и $f(e_1A_s,e_2)\neq 0$, $\alpha_s\neq 0$, $f(e_2,e_1)\neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $C_s\notin K_f$ при всех $s\in M$.

Итак, в группе $Sp(2n,f,P)$ выполнено тождество

$C_1 x^{\varepsilon_1} C_2 \dots C_m x_{m+1}^{\varepsilon_m} C = 1$ и $C_s \notin K_f$ для всех s, $1 \leq s \leq m+1$. Согласно утверждению пункта 5.2.I, существует вектор $e \in P^n$ такой, что $f(eC_s, e) \neq 0$ для всех s, $1 \leq s \leq m+1$. Тогда унитарный сдвиг t_λ, для которого $t_\lambda(b) = b - \lambda f(b,e)e$, принадлежит группе $Sp(2n, f, P)$ для любого $\lambda \in P$, при этом $t_\lambda^{-1} = t_{-\lambda}$, $t_\lambda t_\mu = t_{\lambda+\mu}$. Положим $x = t_\lambda$. Получаем $1 = C_1 t_{\varepsilon_1 \lambda} C_2 \dots C_m t_{\varepsilon_m \lambda} C_{m+1}$ и

$$0 = f(e,e) = f(eC_1 t_{\varepsilon_1 \lambda} C_2 \dots C_m t_{\varepsilon_m \lambda} C_{m+1}, e) = \tag{20}$$
$$= g_0 + \lambda g_1 + \dots + \lambda^m g_m,$$

где

$$g_m = (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m} f(eC_1, e) \dots f(eC_{m+1}, e) \neq 0,$$

ибо $f(eC_s, e) \neq 0$ для всех s, $1 \leq s \leq m+1$. С другой стороны, из равенства (20) вытекает, что $g_0 = g_1 = \dots = g_m = 0$, ибо поле P бесконечно. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 5.2.2.

5.2.3. В группе $Sp(2n, f, P)$, $n > 1$, выполнено некоторое обобщенное групповое тождество.

Действительно, по предложению 4.2 существует нецентральная обратимая матрица $A \in K_f$ и, по определению K_f, $f(eA, e) = \lambda f(e,e) = 0$ для любого $e \in P^n$. Пусть $G \in Sp(2n, f, P)$, $e \in P^n \setminus \{0\}$. Тогда $f(eGAG^{-1}, e) = f(eGA, eG) = \lambda f(eG, eG) = 0$ и, значит, $eGAG^{-1} \in L$, где $L = \{ e_1 \in P^n \mid f(e_1, e) = 0 \}$ – гиперплоскость в пространстве P^n. По предложению 4.I, в группе $Sp(2n, f, P)$ выполнено некоторое обобщенное групповое тождество. Теорема 7 доказана.

Авторы выражают признательность А.И.Кострикину за обсуждение постановки задачи и В.Н.Латышеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

I. Бейдар К.И. Полупервичные кольца с обобщенным тождеством. – Успехи мат.наук, I977, т.32, № 4, с.249–250.

2. Голубчик И.З., Михалев А.В. Обобщенные рациональные тождества в телах. – XУ Всесоюзная алгебр.конф., тезисы докл., ч.П, Красноярск, I979, с.38.

3. Дьёдонне Ж. Геометрия классических групп. М., I974, 204 с.

4. Кон П. Свободные кольца и их связи. М., I975. 422с.

5. A m i t s u r S.A. Rational identities and applications to algebra and geometry. - J.Algebra, 1966, vol.3, N 2, p.304-359.
6. C o h n P.M. Generalized rational identities. - In.:"Proc. Symp.at Park City, Utah, 1971", New York, 1972, p.107-115.
7. G o l u b c h i k I.,M i k h a l e v A. A note on varieties of semiprime rings with semigroup identities. - J.Algebra, 1978, vol.54, N 1, p.42-45.
8. H e r s t e i n I.N. Rings with involution. Chicago-London, 1977.