

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

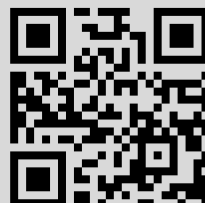
А. В. Князев, Дихотомические графы с максимальным
обхватом, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 56–64

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 марта 2025 г., 14:40:44



УДК 519.1

ДИХОТОМИЧЕСКИЕ ГРАФЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ ОБХВАТОМ

А. В. Князев

Дихотомическим называется орграф, у которого полустепени исхода и захода каждой вершины совпадают и равны 2. В [2] доказано, что обхват (длина кратчайшего контура) n -вершинного дихотомического графа не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не меньшее x . В работе описаны (с точностью до подстановочного подобия) матрицы смежности всех дихотомических графов с обхватом $\lfloor n/2 \rfloor$ и доказаны некоторые свойства таких графов.

Напомним, что *дихотомическим* называется орграф без параллельных дуг, у которого полустепени исхода и захода каждой вершины совпадают и равны 2. В [2] доказано, что обхват (длина кратчайшего контура) n -вершинного дихотомического графа не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не меньшее x . Обозначим $G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ класс всех дихотомических графов с обхватом $\lfloor n/2 \rfloor$. В работе описаны (с точностью до подстановочного подобия) матрицы смежности всех дихотомических графов из $G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ и доказаны некоторые свойства таких графов.

Введем обозначения. Пусть g — полноцикловая подстановка $(0, 1 \dots n-1)$ (а \tilde{g} — соответствующая ей подстановочная матрица) из симметрической группы S_n , действующей на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Для $g^* \in S_n$ пусть

$$\Delta_j(g^*) = j \ominus i,$$

где $g^*(i) = j$, а \ominus — операция вычитания по модулю n , т. е. $j \ominus i = j - i$, если $j \geq i$, и $j \ominus i = n + j - i$, если $j < i$;

$$\Delta_{\max}(g^*) = \max \{ \Delta_j(g^*) \mid j = 0, \dots, n-1 \};$$

$$\Delta_{\min}(g^*) = \min \{ \Delta_j(g^*) \mid j = 0, \dots, n-1 \}.$$

Там, где будет ясно, о какой подстановке идет речь, будем писать просто Δ_{\max} , Δ_{\min} , Δ_j .

Теорема 1. Пусть $\Gamma \in G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ и A — матрица смежности графа Γ . Тогда существует такая подстановка g^* , что выполнено равенство

$$(\tilde{g}^*)^{-1} A \tilde{g}^* = \tilde{g} + (\tilde{g})^t,$$

где $t \in \{2, (n/2) + 1\}$, если n четное, и $t \in \{2, (n+1)/2\}$, если n нечетное и $n \geq 3$.

При $n = 6, 8$ помимо графов с вышеперечисленными матрицами смежности имеется еще четыре графа (см. рис. 1):

$$\Gamma_{6,2}, \Gamma_{6,4} \in G(6, 2, 3) \quad \text{и} \quad \Gamma_{8,2}, \Gamma_{8,4} \in G(8, 2, 4).$$

Доказательство. По теореме Бирхгофа (см. [1]) справедливо равенство

$$A = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2,$$

где \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 — подстановочные матрицы.

Тогда возможны следующие случаи.

1. Обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые;

2. Хотя бы одна из подстановок g_1, g_2 имеет цикловую структуру $[(n/2)^2]$.

Ясно, что последний случай возможен лишь при четном n . Сразу отметим, что указанное свойство матриц смежности графов из $G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$

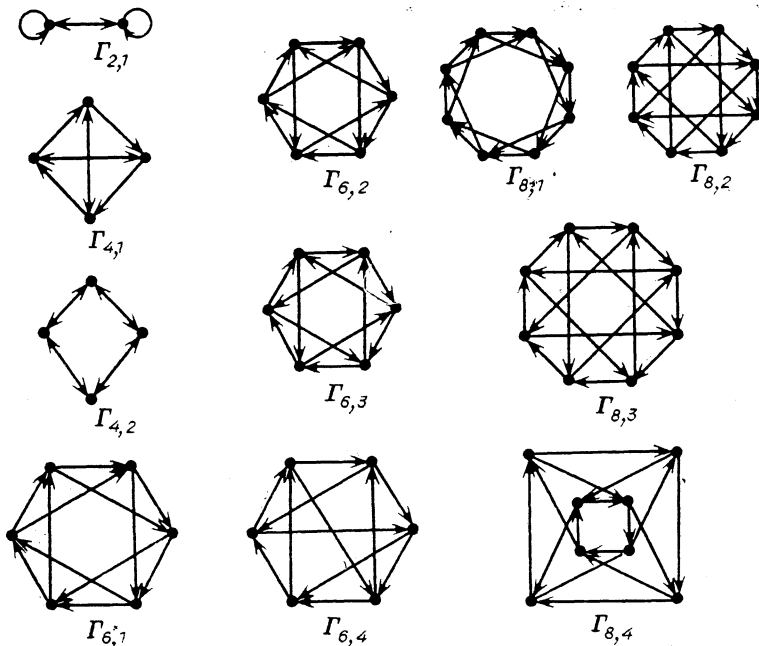


Рис. 1

позволило полностью перебрать все неизоморфные графы из классов $G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ при $n = 2, 4, 6, 8$. Алгоритм перебора, реализованный на ЭВМ, состоял в проверке на противоречивость подстановок из S_n с подстановками g и g^2 и возведении соответствующих матриц в степень с проверкой на появление ненулевого элемента на главной диагонали (см. рис. 1).

Всюду в дальнейшем при четном n полагаем $n \geq 10$.

Остановимся подробнее на каждом из двух возможных случаев.

1. Пусть обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые. Без ограничения общности можем считать, что

$$g_1 = g \text{ и } g_2 = (0 \ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n-1}).$$

Так как обхват p графа Γ равен $\lfloor n/2 \rfloor$, то

$$\Delta_{\max}(g_2) \leq \begin{cases} n/2 + 1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Поскольку в Γ нет параллельных дуг, то

$$\Delta_{\min}(g_2) \geq 2.$$

Лемма 2. Пусть n нечетное, обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и $\Delta_{\max}(g_2) = (n+1)/2 = \Delta_{\max}$. Тогда

$$g_2 = g^{(n+1)/2}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$. Следовательно, $g_2(0) = (n+1)/2$ (см. рис. 2). Нетрудно убедиться, что если $g_2((n+1)/2) \neq 1$, то в Γ существует контур длины, строго меньшей $(n+1)/2$. Поэтому $g_2((n+1)/2) = 1$ и $\Delta_{i_2} = \Delta_{\max}$. Аналогично доказы-

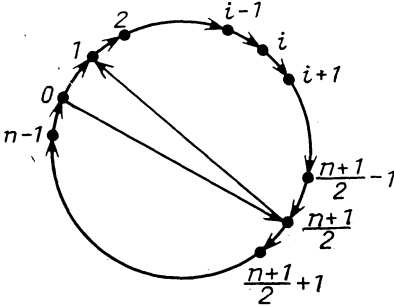


Рис. 2

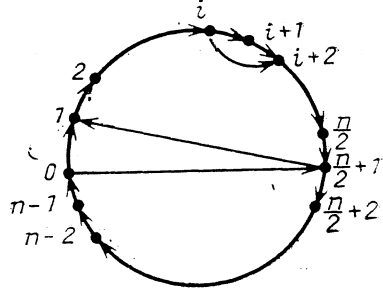


Рис. 3

вается, что $\Delta_{i_j} = \Delta_{\max}$ при всех $j = 0, \dots, n-1$. Значит,

$$g_2 = g^{(n+1)/2},$$

и лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть n четное, обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и $\Delta_{\max}(g_2) = (n/2) + 1 = \Delta_{\max}$. Тогда

$$g_2 = g^{n/2+1}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$. Следовательно, $g_2(0) = (n/2) + 1$ (см. рис. 3). Ясно, что если $g_2((n/2) + 1) \neq 1, 2$, то в Γ существует контур длины, строго меньшей $n/2$. Докажем методом «от противного», что

$$g_2((n/2) + 1) = 2. \tag{1}$$

Предположим противное, т. е.

$$g_2((n/2) + 1) = 1. \tag{2}$$

Далее будем называть дуги графа Γ , соответствующие переходам подстановки g_2 , g_2 -дугами. Рассмотрим (см. рис. 3) подмножество вершин графа Γ

$$T_0 = \{(n/2) + 2, (n/2) + 3, \dots, n-2, n-1, 0\}.$$

Ясно, что в Γ нет g_2 -дуг, соединяющих между собой вершины из T_0 (иначе в Γ был бы контур длины, меньшей $n/2$). Следовательно, g_2 -дуги, исходящие из вершин T_0 , могут входить только в вершины множества

$$T_1 = \{1, 2, \dots, (n/2) - 1, n/2\}.$$

Итак, из вершин T_0 исходит $(n/2) - 2$ g_2 -дуг, кроме дуги $(0, (n/2) + 1)$, а в вершины T_1 входит $(n/2) - 1$ g_2 -дуг, кроме дуги $((n/2) + 1, 1)$. Отсюда и из неравенства $n \geq 10$ получаем, что в Γ существует g_2 -дуга, соединяющая между собой вершины T_1 , вида (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n/2$. Ясно, что если $i > j$ либо $j > i + 2$, то в Γ существует контур длины, меньшей $n/2$. Поэтому в Γ существует дуга $(i, i + 2)$, где $1 \leq i \leq (n/2) - 2$ (см. рис. 3).

Рассмотрим множество g_2 -дуг, исходящих из вершин множества

$$T_{0,0} = \{(n/2) + 2, (n/2) + 3, \dots, (n/2) + i + 1\}, \quad T_{0,0} \subset T_0.$$

Так как $n \geq 10$ и обхват p графа Γ равен $n/2$, g_2 -дуга, исходящая из вершины $(n/2) + 2$, может входить только в вершины 2 либо 3 множества T_1 . Из аналогичных соображений получаем, что для любой вершины $(n/2) + j$, $2 \leq j \leq i + 1$, g_2 -дуга, исходящая из $(n/2) + j$, может входить только в вершины 2, ..., $j + 1$. С учетом того, что в вершину $(i + 2)$ уже входят две дуги, g_2 -дуги, исходящие из вершин $T_{0,0}$, могут входить только в вершины множества

$$T_{1,0} = \{2, 3, \dots, i + 1\}, \quad T_{1,0} \subset T_1.$$

Ясно, что $|T_{0,0}| = |T_{1,0}| = i$. Рассмотрим множество g_2 -дуг, исходящих из вершин множества

$$T_{0,1} = \{(n/2) + i + 2, \dots, n - 1\}, \quad T_{0,1} \subset T_0.$$

Так как в вершины множества $T_{1,0}$ входят только g_2 -дуги, исходящие из вершин $T_{0,0}$, а в вершину $(i + 2)$ уже входят две дуги, получаем, что g_2 -дуги, исходящие из вершин $T_{0,1}$, могут входить только в вершины множества

$$T_{1,1} = \{i + 3, \dots, n/2\}, \quad T_{1,1} \subset T_1.$$

Так как $|T_{0,1}| = |T_{1,1}| = (n/2) - i - 2$, $n \geq 10$, и обхват p графа Γ равен $n/2$, то для любой вершины $(n/2) + j$, где $i + 2 \leq j \leq (n/2) - 1$, g_2 -дуга, исходящая из $(n/2) + j$, может входить только в вершину $j + 1$ (см. рис. 4).

Рассуждая аналогично о g_2 -дугах, исходящих из вершин множества $T_{1,1}$, получаем, что для любой вершины j , где $1 \leq j \leq i - 1$, g_2 -дуга, исходящая из j , может входить только в вершину $(n/2) + j + 1$ (см. рис. 4).

Ясно, что g_2 -дуга, входящая в вершину $(n/2) + i + 1$, исходит из вершины $i + 1$ либо $i + 2$ (в противном случае, т. е. когда g_2 -дуга исходит из вершины j , где $i + 3 \leq j \leq n/2$, в Γ существует контур длины, меньшей $n/2$).

Пусть в Γ существует дуга $(i + 2, (n/2) + i + 1)$ либо $(i + 1, (n/2) + i + 1)$.

Тогда, с учетом неравенства $n \geq 10$, g_2 -дуга, исходящая из вершины $(n/2) + i + 1$, не может входить в вершины i и $i + 1$ (иначе бы в Γ был контур длины 2 или 3). Следовательно, g_2 -дуга, исходящая из вершины $(n/2) + i + 1$, должна входить в вершину j , где $2 \leq j \leq i - 1$. Поскольку в Γ есть дуга $(i - 1, (n/2) + i)$, получаем, что в Γ есть контур длины, строго меньшей $n/2$.

Получили противоречие с предположением (2). Поэтому, справедливо (1), и

$$\Delta_{i_1} = \Delta_{i_2} = \Delta_{\max} = (n/2) + 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\Delta_{i_j} = \Delta_{\max} = (n/2) + 1$$

для всех $j = 0, \dots, n - 1$.

Следовательно,

$$g_2 = g^{n/2+1},$$

и лемма 3 доказана.

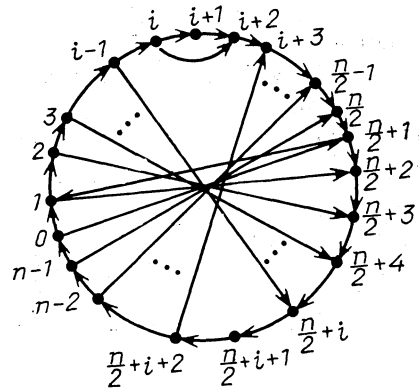


Рис. 4

Лемма 4. Пусть обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и

$$\Delta_{\max}(g_2) < \begin{cases} n/2 + 1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Тогда

$$g_2 = g^2.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$. Докажем, что

$$\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 2. \quad (3)$$

Пусть t — такое наименьшее число, что

$$g_2^t(0) = i_t \in \{0, 1, 2, \dots, i_1\} \quad (4)$$

(см. рис. 5). Так как $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, то

$$0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{t-2} < i_{t-1}.$$

Из полноцикловости g_2 следует, что $i_t \neq 0, i_1$. Рассмотрим контур Q_1 вида

$$(0, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i_{t-1}+1, i_{t-1}+2, \dots, n-1, 0)$$

и оценим сверху его длину l . Ясно, что

$$2 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta_{i_j}, \quad j = 2, \dots, t.$$

Поэтому

$$l \leq 1 + 2^{-1}(n - \Delta_{i_1} - (\Delta_{i_t} - i_t)) - x + \Delta_{i_t} - i_t, \quad (5)$$

где x — целое, неотрицательное число. Ясно, что выражение, стоящее

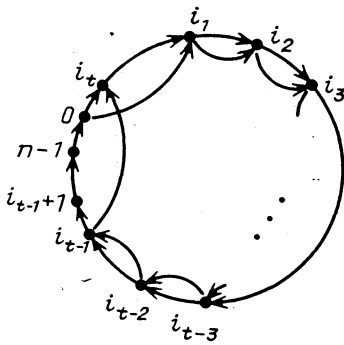


Рис. 5

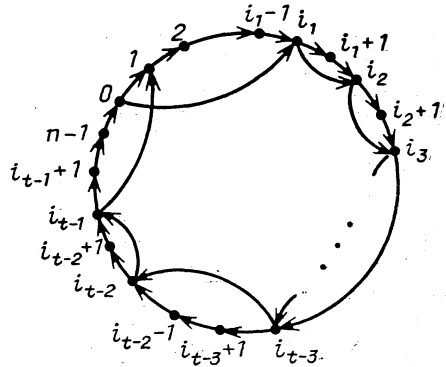


Рис. 6

в правой части (5), достигает своего максимума при

$$x = 0, \quad \Delta_{i_t} = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}, \quad i_t = 1. \quad (6)$$

В этом случае

$$l \leq [1 + 2^{-1}(n - 2\Delta_{\max} + 1) + \Delta_{\max} - 1] =]n/2[.$$

Непосредственно проверяется, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{i_j} = 2 \quad \text{при всех } j = 2, \dots, t-1,$$

если число $n - 2\Delta_{\max} + 1$ четное;

$$\Delta_{i_m} = 3, \quad 2 \leq m \leq t-1, \quad \text{и } \Delta_{i_j} = 2 \quad \text{при } j = 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, t-1, \quad (7)$$

если число $n - 2\Delta_{\max} + 1$ нечетное.

Поскольку $\Gamma \in G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$, то
 $l = \lfloor n/2 \rfloor$,

и в графе Γ выполнены условия (6) и (7) (см. рис. 6).

Ясно, что контур Q_2 вида $(1, 2, \dots, i_1-1, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 1)$ имеет, как и контур Q_1 , длину, равную $\lfloor n/2 \rfloor$. Поскольку $\Delta_1 = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, повторяя рассуждения, начиная с соотношения, аналогичного (4) для вершины i_{t-1} (вместо вершины 0), с учетом условия, аналогичного (7), получаем, что $g_2(1) - 1 \in \{2, 3\}$.

Если $g_2(1) < i_1$, то в Γ существует контур длины, меньшей, чем длина контура Q_2 . Это противоречит условию $\Gamma \in G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$. Следовательно, $\Delta_{\max} \in \{2, 3\}$.

Пусть $\Delta_{\max} = 3$. Тогда $i_1 = 3$, $g_2(1) = 4$, $g_2(2) = 5$ и $g_2(3) = 6$. Поэтому с учетом выполнения условия (7) получаем, что $g_2(6) = 1$ и $\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 3$, $n = 8$ (см. рис. 7). Это противоречит условию $n \geq 10$. Значит $\Delta_{\min} = \Delta_{\max} = 2$.

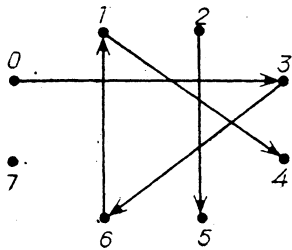


Рис. 7

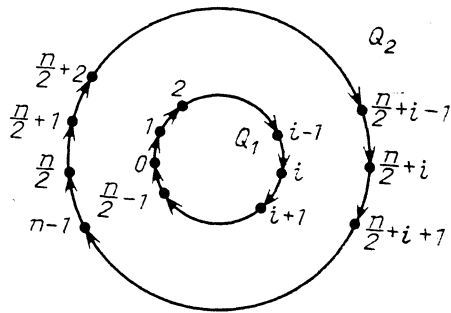


Рис. 8

2. Пусть хотя бы одна из подстановок g_1, g_2 имеет цикловую структуру $[(n/2)^2]$. Без ограничения общности можно считать, что

$$g_1 = (0 \ 1 \ 2 \ \dots \ (n/2) - 1) (n/2 \ (n/2) + 1 \ \dots \ n - 1)$$

(см. рис. 8). Так как обхват p графа Γ равен $n/2$, то g_2 -дуги могут соединять между собой только вершины с разных контуров. Обозначим внутренний контур $(0, 1, 2, \dots, (n/2) - 1, 0)$ через Q_1 , а внешний контур $(n/2, (n/2) + 1, \dots, n - 1, n/2)$ через Q_2 . Тогда возможны следующие случаи (см. рис. 9).

В графах, соответствующих рис. 9, б, г, е и з есть контуры длины 3 или 4. Тогда $n = 6$ или 8, что противоречит условию ($n \geq 10$ при четном n). Графы, соответствующие рис. 9, д и ж, изоморфны.

Итак, осталось рассмотреть графы, соответствующие рис. 9, а, в и д.

2.1. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9, а. В этом случае g_2 — полноцикловая подстановка вида

$$g_2 = (0 \ n/2 \ 1 \ (n/2) + 1 \ 2 \ (n/2) + 3 \ \dots \ (n/2) - 1 \ n - 1)$$

и

$$g_1 = (g_2)^2.$$

Следовательно, перенумеровав вершины графа, получаем, что

$$g_2 = g, \quad g_1 = g^2.$$

2.2. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9 в. В зависимости от четности $n/2$ здесь возможны следующие варианты.

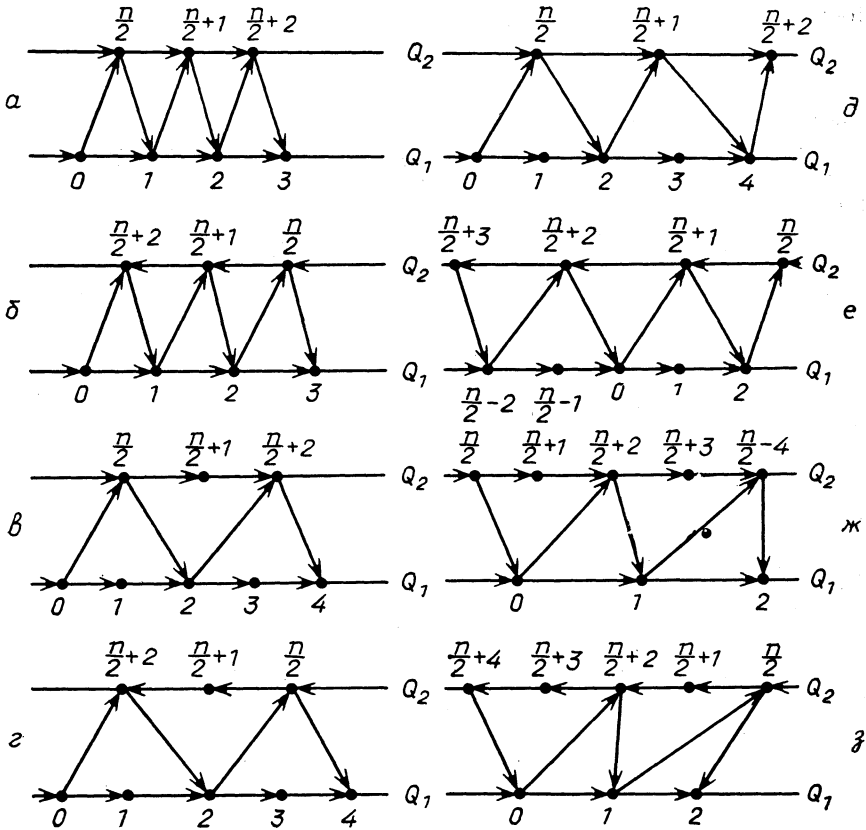


Рис. 9

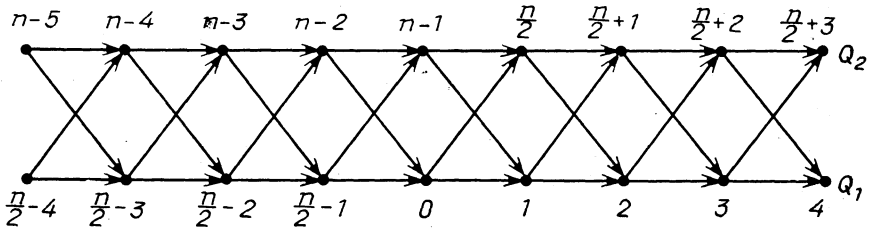


Рис. 10

2.2.1. $n/2$ нечетное. В этом случае g_2 — полноцикловая подстановка (см. рис. 10) вида

$$g_2 = (0 \ n/2 \ 2 \ (n/2) + 2 \ 4 \ (n/2) + 4 \ \dots \ (n/2) - 3 \ n - 3 \ (n/2) - 1 \ n - 1 \\ 1 \ (n/2) + 1 \ 3 \ (n/2) + 3 \ \dots \ n - 4 \ (n/2) - 2 \ n - 2).$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае

$$g_1 = (g_2)^{n/2+1}.$$

2.2.2 $n/2$ четное. В этом случае (см. рис. 10)

$$g_2 = (0 \ n/2 \ 2 \ (n/2) + 2 \ 4 \ (n/2) + 4 \ \dots \ n - 4 \ (n/2) - 2 \ n - 2) \cdot \\ \cdot (1 \ (n/2) + 1 \ 3 \ (n/2) + 3 \ 5 \ (n/2) + 5 \ \dots \ n - 3 \ (n/2) - 1 \ n - 1).$$

Тогда матрицу смежности $A = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$ графа Γ можно представить в виде

суммы двух подстановочных матриц $\tilde{g}^3 + \tilde{g}_4$, соответствующих полноцикловым подстановкам

$$g_3 = (0 \ n/2 \ (n/2) + 1 \ (n/2) + 2 \ \dots \ n-3 \ n-2 \ n-1 \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (n/2) - 2 \ (n/2) - 1),$$

$$g_4 = (0 \ 1 \ (n/2) + 1 \ 3 \ (n/2) + 3 \ \dots \ n-3 \ (n/2) - 1 \ n-1 \ n/2 \ 2 \ (n/2) + 2 \ 4 \ \dots \ n-4 \ (n/2) - 2 \ n-2).$$

Непосредственно повторяется, что

$$g_4 = (g_3)^{n/2+1}.$$

2.3. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9 д).

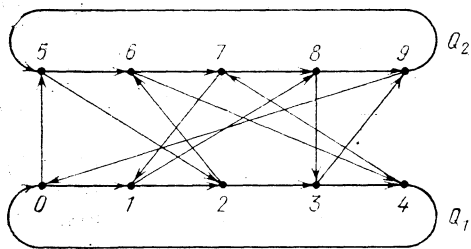


Рис. 11

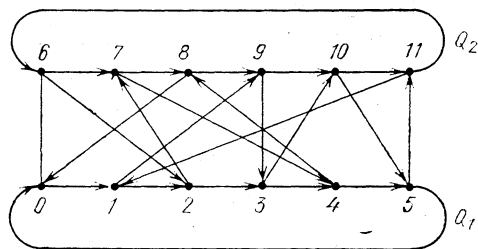


Рис. 12

2.3.1. Пусть $n/2$ — нечетное число. Тогда g_2 — полноцикловая подстановка вида

$$g_2 = (0 \ n/2 \ 2 \ (n/2) + 1 \ 4 \ (n/2) + 2 \ 6 \ \dots \ (n/2) - 1 \ (3n-2)/4 \ 1 \ ((3n-2)/4) + 1 \ 3 \ ((3n-2)/4) + 2 \ 5 \ \dots \ (n/2) - 2 \ n-1)$$

(пример при $n = 10$ см. на рис. 11). В этом случае контур

$$Q_3 = (0, 1, [(3n+2)/4], [(3n+2)/4] + 1, [(3n+2)/4] + 2, \dots, n-2, n-1, 0)$$

имеет длину $((n-2)/4) + 2$. Вместе с тем

$$((n-2)/4) + 2 < n/2$$

при $n \geq 10$. Противоречие.

2.3.2. Пусть $n/2$ — четное число. В этом случае

$$g_2 = (0 \ n/2 \ 2 \ (n/2) + 1 \ 4 \ (n/2) + 2 \ 6 \ (n/2) + 3 \ \dots \ (n/2) - 2 \ (3n/4) - 1) \cdot (1 \ 3n/4 \ 3 \ (3n/4) + 1 \ 5 \ (3n/4) + 2 \ 7 \ (3n/4) + 3 \ \dots \ (n/2) - 1 \ n-1)$$

(пример при $n = 12$ см. на рис. 12), а контур

$$Q_3 = (1, 3n/4, (3n/4) + 1, (3n/4) + 2, (3n/4) + 3, \dots, n-2, n-1, 1)$$

имеет длину $(n/4) + 1$. Так как

$$(n/4) + 1 < n/2$$

при $n \geq 10$, данный случай невозможен.

С учетом всех рассмотренных случаев теорема 1 доказана.

Замечание 5. Все графы из класса $G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$, за исключением графа $\Gamma_{8,4}$, гамильтоновы.

Рассмотрим подкласс $P(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor) \subseteq G(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ примитивных дихотомических графов. Напомним, что примитивным называется орграф Γ , для любой пары вершин которого i и j существует путь из i в j длины ρ . Наименьшее такое ρ обозначается $\gamma(\Gamma)$ и называется экспонентом графа Γ (еще одно название этого параметра — индекс примитивности). Ясно, что матрица A смежности примитивного графа Γ (которая называется также при-

митивной) обладает тем свойством, что в некоторой степени ρ становится строго положительной. Наименьшее такое ρ называется экспонентом матрицы и обозначается $\gamma(A)$. Очевидно, что $\gamma(A) = \gamma(\Gamma)$.

Лемма 6. Пусть A — матрица размера $n \times n$ и

$$A = \tilde{g} + \tilde{g}^t,$$

где $1 < t < n$. Матрица A примитивна тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(t-1, n) = 1.$$

Если A примитивна, то

$$\gamma(A) = n - 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что скелет матрицы A^r при $r \geq 1$ совпадает со скелетом матрицы B , где

$$B = \sum_{s=0}^r (\tilde{g})^{r+s(t-1)} \quad (8)$$

(числа в показателе степени складываются и умножаются по модулю n).

С другой стороны, $B > 0$ тогда и только тогда, когда среди показателей степеней в правой части (8) содержатся все числа из множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Это эквивалентно выполнению двух условий

$$\text{НОД}(t-1, n) = 1, \quad r \geq n-1.$$

Теорема 7. Если $\Gamma \in P(n, 2, \lfloor n/2 \rfloor)$ и $n \neq 6$, то

$$\gamma(A) = n - 1,$$

и для матрицы смежности A графа Γ существует подстановка g^* со свойством

$$(\tilde{g}^*)^{-1} A \tilde{g}^* = \tilde{g} + (\tilde{g})^t,$$

где $t = 2$, если n четное ($n \neq 6$), и $t \in \{2, (n+1)/2\}$, если n нечетное, $n \geq 3$. Если $n = 6$, то (см. рис. 1)

$$\{\Gamma_{6,1}, \Gamma_{6,2}, \Gamma_{6,4}\} = P(6, 2, 3), \quad \gamma(\Gamma_{6,1}) = 5, \quad \gamma(\Gamma_{6,2}) = \gamma(\Gamma_{6,4}) = 4.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 и леммы 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1982.
2. Behzad M. Minimal 2-regular digraphs with given girth//J. Math. Soc. Japan.— 1973.— № 5.— P. 1—6.

Статья поступила 25.09.89