Заметки

УДК 62-52:538.215

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА МОМЕНТА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В КРИОГЕННЫХ ПОДВЕСАХ НАВИГАЦИОННЫХ ПРИБОРОВ

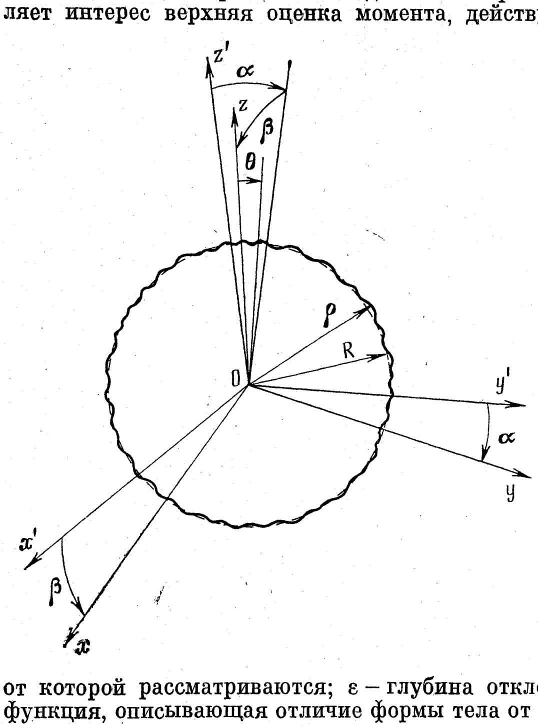
В. А. ГОРШКОВ, А. Б. РЯБОВ

(Москва)

Дается верхняя оценка момента, действующего на мало, но произвольно отличающееся от сферы сверхпроводящее тело в магнитном поле с осевой симметрией вращения.

При создании навигационных приборов с использованием сверхпроводящего подвеса чувствительного элемента необходимо знать моменты, действующие в таком подвесе. В работе [1] в предположении, что известна аналитическая функция, описывающая форму тела, получены соотношения для определения этих моментов.

Однако уравнение поверхности тела известно не всегда, хотя известно, что отличия данной поверхности от идеальной ограничены по модулю. Поэтому представляет интерес верхняя оценка момента, действующего в магнитном поле на сверхпроводящее тело с известной величиной отклонения от идеальной поверхности.



Рассмотрим сверхпроводящее тело формы, близкой к сферической, помещенное в магнитное поле с осевой симметрией вращения. Выберем в пространстве две системы декартовых и две соответствующие системы сферических координат: систему $x'y'z'(\rho'\theta'\varphi')$, связанную с источниками магнитного поля, и систему $xyz(\rho\theta\varphi)$, связанную с телом, причем оси z' и z направим соответственно по осям симметрии поля и вращения тела. Поворот тела по отношению к полю определим малыми углами α и β (см. рисунок).

Как показано в [1], среднее значение момента, действующего на вращающееся тело, равно моменту, действующему на некоторое тело вращения, поверхность которого описана уравнением

$$\rho=R[1+\varepsilon r(\cos\theta)], \tag{1}$$

где R – радиус сферы, отклонения от которой рассматриваются; ε – глубина отклонения (малый параметр); $r(\cos\theta)$ – функция, описывающая отличие формы тела от сферической, причем

$$|r(\cos\theta)|\leq 1. \tag{2}$$

Выражения моментов в резалевой системе координат могут быть записаны в следующем виде:

$$M_x=\alpha M^*,\qquad M_y=-\beta M^*. \tag{3}$$

Здесь

$$M^*=-\frac{R\varepsilon}{8}\int\limits_0^\pi U(\theta)\,\frac{\partial r(\cos\theta)}{\partial\theta}\,d\theta, \tag{4}$$

где вид $U(\theta)$ приведен в [1].

Преобразуем (4), беря интеграл M^*, по частям:

$$(5)\qquad M^* = -\frac{R\varepsilon}{8}\left[U(\theta)r(\cos\theta)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi r(\cos\theta)\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}d\theta\right].$$

Учитывая, что $U(\pi)=U(0)=0$, получим

$$(6)\qquad M^* = \frac{R\varepsilon}{8}\int_0^\pi r(\cos\theta)\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}d\theta.$$

Дадим оценку максимальной величины этого интеграла. Очевидно, что максимум M^* достигается, если подынтегральное выражение остается знакопостоянным на всем интервале изменения θ, а функция $|r(\cos\theta)|$ на этом интервале принимает свое максимальное значение. Таким образом, необходимо, чтобы функция $r_{\text{макс}}(\cos\theta)$ изменялась в соответствии с изменением знака функции $\partial U(\theta)/\partial\theta$:

$$(7)\qquad r(\cos\theta) = |r_{\text{макс}}(\cos\theta)|\,\mathrm{sign}\left[\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}\right].$$

Пусть функция $U'(\theta)$ меняет знак в точках $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Тогда максимум M^* может быть представлен следующим образом:

$$(8)\qquad \overset{*}{M}_{\text{макс}} = \frac{R\varepsilon}{8}\left\{\int_0^{\theta_1}\frac{\partial U}{\partial\theta}d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}d\theta + \ldots - \int_{\theta_n}^{\pi}\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}d\theta\right\}$$

или

$$(9)\qquad \overset{*}{M}_{\text{макс}} = \frac{R\varepsilon}{4}\{U(\theta_1) - U(\theta_2) + \ldots - U(\theta_n)\}.$$

Преобразуем функцию $U(\theta)$ так, чтобы расчет максимального момента свести к вычислению некоторой безразмерной удельной характеристики $\overset{*}{M}_{\text{уд. макс}}$. Для этого введем подставку $x=\cos\theta$ и выразим коэффициенты Фурье a_n через приведенные безразмерные коэффициенты $\tilde{a}_n$:

$$(10)\qquad a_n = \tilde{a}_n\left(\frac{R_k}{R}\right)^n H_k R,$$

где H_k – критическая напряженность магнитного поля для данного сверхпроводника; a_n – коэффициенты Фурье разложения потенциала начального поля источников; R_k – радиус области, свободной от источников магнитного поля.

Преобразуя (9), получим

$$(11)\qquad \overset{*}{M}_{\text{макс}} = H_k{}^2R^3\varepsilon\overset{*}{M}_{\text{уд. макс}}.$$

Здесь

$$(12)\qquad \overset{*}{M}_{\text{уд. макс}} = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}(-1)^{\lambda+1}U(x_\lambda),$$

где Λ – число корней функции $\partial U(x)/\partial x$ на отрезке $[-1,1]$, причем

$$U(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_n\tilde{a}_k\sum_{i=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]}K(n, k\ i, j)(1-x^2)\times$$

$$[2-(n+k-2i-2j)]x^{n+k-2i-2j-3},$$

где $K(n, k, i, j)$ даны в [1].

Выражения (12), (13) показывают, что максимальный удельный возмущающий момент определяется через потенциальную функцию поля, полученную в форме ряда. Быстрота сходимости этого ряда для каждого конкретного источника поля должна исследоваться самостоятельно. Для практически важного случая – круглого витка с током – достаточно взять пять-семь членов ряда [2].

Таким образом, полученные выражения позволяют оценить величину максимально возможного момента, действующего в магнитном поле на несферическое сверхпроводящее тело при самой неблагоприятной форме его поверхности, когда отклонение от сферы носит ступенчатый характер с высотой этого отклонения $2\varepsilon R$ и длиной, равной промежуткам знакопостоянства функции, описывающей распределение силового давления магнитного поля на сверхпроводящей поверхности данного тела.

Рассмотрим пример использования полученных соотношений. Определим максимально возможный момент, действующий на сверхпроводящее тело вращения, близкое к сферическому, отклоненное на малые углы от оси круговой симметрии магнитного поля.

Пусть в разложении потенциала магнитного поля источников присутствуют пять гармоник. Возьмем значения, полученные в [3]: $\tilde{a}_1=-0{,}437$; $\tilde{a}_2=0{,}242$; $\tilde{a}_3=-0{,}013$; $\tilde{a}_4=-0{,}017$; $\tilde{a}_5=-0{,}034$. Решая с учетом этих коэффициентов $\partial U(x)/\partial x=0$, найдем корни этого уравнения: $x_1=-0{,}91$; $x_2=-0{,}02$; $x_3=0{,}44$; $x_4=0{,}75$. В итоге получим

$$\overset{*}{M}_{\text{макс}} = 0{,}561 H_k^2 R^3 \varepsilon. \tag{14}$$

Предположим, что рассматриваемое тело изготовлено из ниобия и что $R=1$ *см*, а отклонения от сферичности составляют 1 *мкм* ($\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-4}$). Тогда в магнитном поле с критической для ниобия напряженностью $H_k=1{,}5\cdot 10^3$ *э* максимально возможная величина момента будет $\overset{*}{M}_{\text{макс. макс}}=0{,}001$ *гсм/град*.

Поступила в редакцию
19 апреля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябов А. Б.* К теории криогенных подвесов навигационных приборов. Автоматика и телемеханика, № 6, стр. 170–175, 1973.
2. *Рябов А. Б.* К расчету сферических сверхпроводящих подвесов. Электричество, № 4, стр. 71–73, 1969.
3. *Рябов Б. А., Рябов А. Б., Петров А. М., Горшков В. А.* К синтезу сверхпроводящих подвесов с максимальной подъемной силой. Изв. вузов, Приборостроение, № 12, т. 15, стр. 75–80, 1972.

THE UPPER ESTIMATES OF THE TORQUE IN CRYOGENIC SUSPENSIONS OF NAVIGATIONAL INSTRUMENTS

V. A. GORSHKOV, A. B. RYABOV

The upper estimate is given for the torque effecting a body which differs little but arbitrarily from a sphere in a magnetic field with a rotation axial symmetry.
