

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кетов, Трехпетлевая перенормировка модели Весса–
Зумино–Виттена,
ТМФ, 1989, том 80, номер 1, 56–64

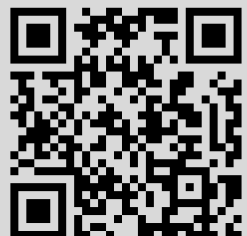
<https://www.mathnet.ru/tmf5117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

21 апреля 2025 г., 04:28:03



ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА МОДЕЛИ ВЕССА — ЗУМИНО — ВИТТЕНА

Кетов С. В.

Ковариантный метод фонового поля и размерная регуляризация т Хоофта — Вельтмана использованы для вычисления трехпетлевого $1/\epsilon$ -контрчлена в двумерной модели Весса — Зумино — Виттена. Вычислена трехпетлевая β -функция ренормгруппы, которая согласуется с пертурбативными результатами конформной теории поля для рассматриваемой модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важное значение двумерной модели Весса — Зумино — Виттена (ВЗВ) в квантовой теории поля впервые было подчеркнуто Виттеном в контексте неабелевой бозонизации [1]. С использованием алгебры токов Виттен аргументировал конформную инвариантность модели в критической точке, что позволило далее эффективно применить методы конформной теории поля для изучения свойств этой теории [2, 3] и ее суперсимметричного обобщения [4].

Вне критической точки конформная инвариантность квантовой ВЗВ-модели отсутствует, поэтому основные значения получают пертурбативные методы вычислений. Однопетлевая перенормировка модели рассматривалась, например, в работе [5], двухпетлевым вычислениям посвящены работы [6, 7]. В данной работе мы продолжаем эту программу, но уже в трехпетлевом приближении.

В разделе 2 введены основные определения и обозначения, сформулирован метод вычислений. В разделе 3 представлены результаты вычисления трехпетлевого $1/\epsilon$ -контрчлена. Трехпетлевая β -функция ВЗВ-модели обсуждается в разделе 4. Основные результаты резюмированы в разделе 5.

2. МОДЕЛЬ ВЕССА — ЗУМИНО — ВИТТЕНА И КОВАРИАНТНЫЙ МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ σ -МОДЕЛЕЙ

Пусть поле $U(x)$ принимает значения в компактной и полупростой группе G :

$$(1) \quad U(x) = \exp[i\Phi(x)], \quad \Phi(x) = \Phi^i(x) T^i,$$

где T^i суть генераторы G со структурными константами f_{ijk} . Мы используем следующие соглашения:

$$(2) \quad [T^i, T^j] = 2if_{ijk} T^k, \quad \text{tr } T^i T^j = 2\delta^{ij}.$$

Тогда действие ВЗВ-модели записывается в виде

$$(3) \quad I[U] = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \operatorname{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^{-1} + n\Gamma[U],$$

где $\Gamma[U]$ известен как член ВЗВ [1, 5, 7], λ^2 — константа связи. Из-за многозначности Γ условия непротиворечивости квантовой теории приводят к квантованию константы связи перед ВЗВ-членом, в результате чего n оказывается целым (либо полужелым) числом [5].

Теория (3) может быть переформулирована как двумерная нелинейная σ -модель с кручением [5, 8]:

$$(4) \quad I[\Phi] = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \left\{ g_{\alpha\beta}(\Phi) \partial^\alpha \Phi^a \partial_\mu \Phi^b + \frac{2n}{3} h_{ab}(\Phi) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^a \partial_\nu \Phi^b \right\}.$$

Явный вид метрики $g_{ab}(\Phi)$ и потенциала кручения $h_{ab}(\Phi)$ нам здесь не понадобится. Для практических вычислений согласно ковариантному методу фонового поля, развитому, например, в [5], достаточно знать лишь выражения для тензора кривизны R_{abcd} , построенного по метрике (без кручения) [5]

$$(5) \quad R_{abcd} = f_{ijm} f_{hlm} V_a^i V_b^j V_c^k V_d^l,$$

для кручения S_{abc} , определяемого (как 3-форма) внешней производной 2-формы h [5],

$$(6) \quad S_{abc} = \eta f_{ijk} V_a^i V_b^j V_c^k, \quad \eta \equiv n\lambda^2/2\pi,$$

и для тензора кривизны \hat{R}_{abcd} , построенного по связности с учетом кручения S [5],

$$(7) \quad \hat{R}_{abcd} = (1 - \eta^2) f_{ijm} f_{hlm} V_a^i V_b^j V_c^k V_d^l.$$

В (5)–(7) мы использовали $V_a^i(\Phi)$ для обозначения «фильбайна», ассоциированного с метрикой $g_{ab}(\Phi)$.

Согласно аргументам Виттена [1] теория (3)–(4) должна быть конформно-инвариантной и, следовательно, конечной в критической точке $\eta^2 = +1$ (тогда $\lambda^2 = 2\pi/n$) для параллелизованного группового многообразия $\hat{R}_{abcd} = 0$.

Согласно ковариантному методу фонового поля (детали которого мы здесь не рассматриваем, см., например, [5, 7]) следует рассмотреть фоново-квантовое разложение действия $I[\Phi + \pi(\xi)]$ с точностью до членов 6-го порядка по квантовому полю $\xi^i(x)$, определяемому как вектор касательной к геодезической, соединяющей Φ и $\Phi + \pi$. n -й член этого разложения имеет следующую структуру:

$$(8) \quad I_n = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \left\{ \Pi_{(a_1 \dots a_n)(b_1 b_2)}^{(n,2)} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_n} \partial^\mu \Phi^{b_1} \partial_\mu \Phi^{b_2} + \Pi_{(a_1 \dots a_{n-1})b_1 b_2}^{(n,1)} \xi^{a_1} \dots \right. \\ \dots \xi^{a_{n-1}} \hat{D}_\mu \xi^{b_1} \partial^\mu \Phi^{b_2} + \Pi_{(a_1 \dots a_{n-2})(b_1 b_2)}^{(n,0)} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_{n-2}} \hat{D}_\mu \xi^{b_1} \hat{D}^\mu \xi^{b_2} + \\ \left. + E_{(a_1 \dots a_n)[b_1 b_2]}^{(n,2)} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_n} \partial_\mu \Phi^{b_1} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi^{b_2} + E_{(a_1 \dots a_{n-1})b_1 b_2}^{(n,1)} \xi^{a_1} \dots \right. \\ \left. \dots \xi^{a_{n-1}} \hat{D}_\mu \xi^{b_1} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi^{b_2} + E_{(a_1 \dots a_{n-2})[b_1 b_2]}^{(n,0)} \xi^{a_1} \dots \xi^{a_{n-2}} \hat{D}_\mu \xi^{b_1} \varepsilon^{\mu\nu} \hat{D}_\nu \xi^{b_2} \right\},$$

где мы использовали ковариантную производную \bar{D}_μ , построенную по связности $\Gamma_{bc}^a \equiv \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} - S_{bc}^a$ с учетом кручения.

Простой алгоритм вычисления коэффициентных Π - и E -тензоров приведен в [5, 7]. Например, I_2 имеет следующий вид :

$$I_2 = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \{ (\bar{D}_\mu \xi)^2 + \hat{R}_{abcd} \xi^b \xi^c (\delta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \Phi^a \partial_\nu \Phi^d \}.$$

В рассматриваемом нами случае (5)–(6) с учетом тождества Якоби для структурных констант

$$(9) \quad f_{[ij]f_{kl}m}^m = 0$$

удобно работать только с индексами касательного пространства, что мы и будем делать в дальнейшем. В частности, формулы (5)–(7), (9) приобретают чрезвычайно простой вид

$$(10) \quad S_{abc} = \eta f_{abc}, \quad R_{abcd} = f_{ab}^h f_{cdh}, \\ \hat{R}_{abcd} = (1 - \eta^2) f_{ab}^h f_{cdh}, \quad S_{[ab}^f S_{c]df} = 0.$$

Результатом наших вычислений явились следующие формулы для коэффициентных тензоров в (8):

$$E^{(3,1)} = \Pi^{(3,2)} = E^{(4,2)} = \Pi^{(4,1)} = E^{(4,1)} = E^{(4,0)} = E^{(5,1)} = 0, \\ E_{(abf)(cd)}^{(3,2)} = 2/3 \eta (\eta^2 - 1) f_{gh}^a f_{g[cf]d]h}^f, \\ \Pi_{abcd}^{(3,1)} = 4/3 (1 - \eta^2) f_{ab}^h f_{cdh}, \\ E_{abc}^{(3,0)} = 2/3 \eta f_{abc}, \quad \Pi_{abcd}^{(4,0)} = 1/3 f_{ab}^h f_{cdh}, \\ \Pi_{(abdf)(ceg)}^{(4,2)} = 1/3 (1 - \eta^2) f_{m(cfg)p}^a f_{nmf_{np}}^d, \\ \Pi_{(fhd)bc)a}^{(5,1)} = 4/15 (1 - \eta^2) f_{(f}^p a f_h^k p f_b^h k f_c)^{dn}, \\ E_{abcdf}^{(5,0)} = -2/15 \eta f_{da}^m f_{bk}^m f_{cf}^h.$$

Все операции (анти)симметризации определены с единичным весом, по подчеркнутым индексам эти операции не производятся. Как будет показано ниже, явные формулы для других Π - и E -тензоров при вычислении трехпетлевой β -функции ВЗВ-модели не понадобятся.

Пусть Q – собственное значение квадратичного оператора Казимира в присоединенном представлении $f_{abc} f_{abc} = Q \delta_{ad}$. Тогда согласно (10) тензор Риччи имеет вид $R_{ab} = -Q \delta_{ab}$, $\hat{R}_{ab} = -Q (1 - \eta^2) \delta_{ab}$.

С использованием тождества Якоби, свойств компактности и полупростоты для (полностью антисимметричных) структурных констант нетрудно получить следующие тождества, которые оказываются полезными при приведении фоновой зависимости расходимостей трехпетлевых диаграмм к стандартному виду:

$$f_{ajm} f_{gk}^m f_c^{ka} = 1/2 Q f_{fgc}, \\ \delta^{fh} f_{(b}^{ap} f_c^{p} k f_f^{kn} f_n)^{da} = -3/4 Q f_{a(bf)c}^n d^{-1} / \delta f_{kap} f_{(b}^{hp} f_c)^{nh} f_d^n, \\ (f_b^{hk} f_b^{rl}) (f_{ah}^c f_{jr}^c) (f_{jk}^t f_{it}^t) = 0.$$

Для квантовых вычислений в рамках размерной (ультрафиолетовой) регуляризации необходимо предписание для обращения с $\epsilon^{\mu\nu}$ -символом, который имеет существенно двумерное происхождение. Инфракрасная регуляризация производится, как обычно, с помощью вспомогательного массового члена для ξ -полей.

Двумерная природа $\epsilon^{\mu\nu}$ делает естественным выбор размерной регуляризации согласно предписанию 'т Хоофта – Вельтмана (ХВ) [9], в котором $\epsilon^{\mu\nu}$ рассматривается как существенно двумерный объект.

Определим $\hat{\delta}$ -символ разности между двумерным символом $\bar{\delta}^{\mu\nu}$ и d -мерным символом $\delta^{\mu\nu}$: $\hat{\delta}^{\mu\nu} \equiv \bar{\delta}^{\mu\nu} - \delta^{\mu\nu}$, тогда $\hat{\delta}^{\mu\nu} = ((2-d)/d)\delta^{\mu\nu}$, $\hat{\delta}^{\mu\mu} = 2-d \equiv 2\epsilon$. Согласно ХВ-предписанию

$$(11) \quad \epsilon^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\sigma} = \bar{\delta}^{\mu\sigma}\bar{\delta}^{\nu\rho} - \bar{\delta}^{\mu\rho}\bar{\delta}^{\nu\sigma} = \frac{1}{(1-\epsilon)^2} [\delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho} - \delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma}].$$

Тождество (11) играет важную роль при вычислении расходимостей трехпетлевых диаграмм (см. раздел 3).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕХПЕТЛЕВОГО $1/\epsilon$ -КОНТРЧЛЕНА

Разложение действия согласно ковариантному методу фонового поля определяет вершины взаимодействия и пропагатор для квантовых ξ -полей

$$\langle \xi^i(x) \xi^j(y) \rangle = i\lambda^2 \delta^{ij} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\exp[-ip(x-y)]}{p^2 - m^2 + i0}.$$

Благодаря перенормируемости теории l -петлевой ковариантный контрчлен имеет структуру, сходную со структурой исходного действия

$$(12) \quad \Delta I^{(l)} = \frac{(\lambda^2)^{(l-1)}}{2} \int d^d x T_{ab}^{(l)} (\delta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \Phi^a \partial_\nu \Phi^b,$$

где

$$(13) \quad T_{ab}^{(l)} = \sum_{n=1}^l \frac{1}{(2\epsilon)^n} T_{ab}^{(n,l)}(g, S).$$

Известно, что β -функция ренормгруппы связана лишь с «аномальными размерностями» $T_{ab}^{(1,l)}$ [10, 11]. Например, с точностью до трех петель имеем [7]

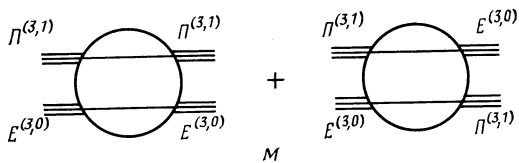
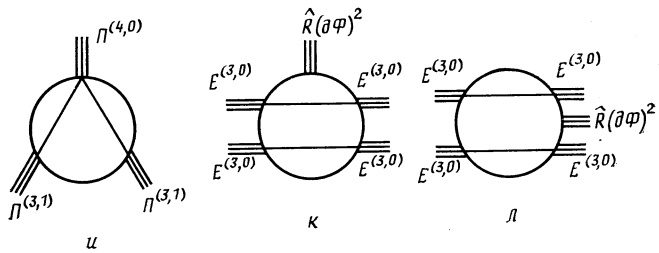
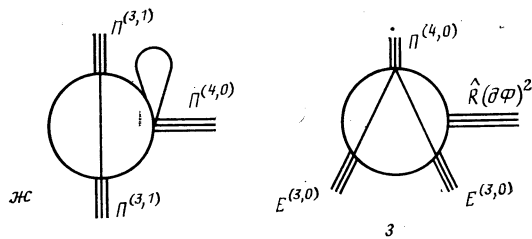
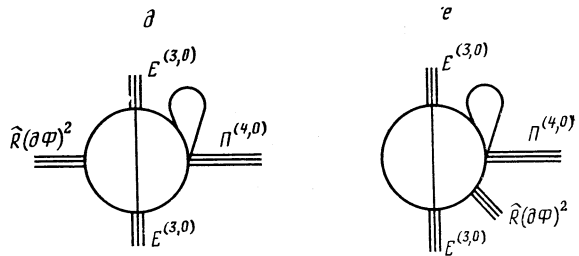
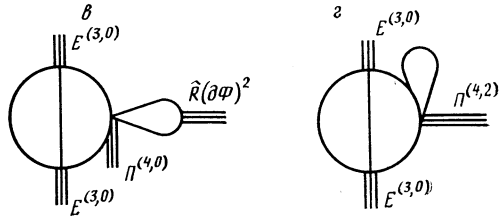
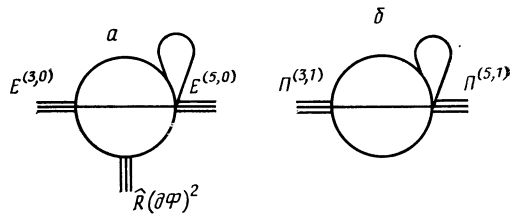
$$(14) \quad \beta_{ab} = T_{ab}^{(1,1)} + 2\lambda^2 T_{ab}^{(1,2)} + 3\lambda^4 T_{ab}^{(1,3)},$$

причем «высшие» контрчлены ($n > 2$) могут быть вычислены из известной β -функции с помощью уравнений ренормгруппы [10–13]. Поскольку нашей целью здесь является вычисление трехпетлевой β -функции, мы ограничимся вычислением $T_{ab}^{(1,3)}$.

Пусть μ – масштабный параметр ренормгруппы. Тогда β_{ab} определяется из соотношения

$$\beta_{ab} = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{\lambda^2(\mu)} g_{ab} \right] = -\frac{\delta_{ab}}{\lambda^4(\mu)} \mu \frac{d}{d\mu} \lambda^2(\mu) \equiv -\frac{\delta_{ab}}{\lambda^4} \beta_\lambda,$$

$$\beta_\lambda = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda^2(\mu).$$



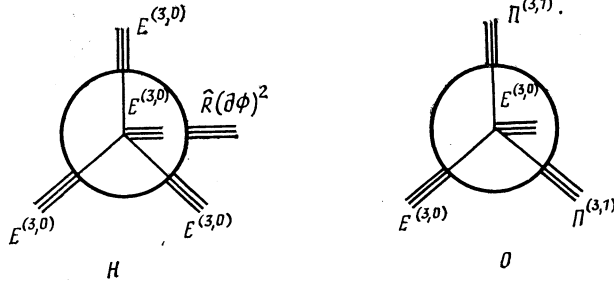


Рис. 1

Мы считаем известными результаты вычисления β_{ab} с точностью до двух петель [6, 7] (см. раздел 4).

Трехпетлевые диаграммы, дающие вклады в $T_{ab}^{(1,3)}$, представлены на рис. 1.

Прямое вычисление расходимостей трехпетлевых диаграмм, указанных на рис. 1а – рис. 1о, приводит к следующим вкладам в $\Delta I^{(3)}$ (для $1/2 T_{ab}^{(3)}$):

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \text{а:} & \quad \frac{3\lambda^4 Q^3}{2(1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{б:} & \quad \frac{-5\lambda^4 Q^3}{6d} I_1^3 (1-\eta^2)^2 \delta_{ab}, \\
 \text{в:} & \quad \frac{-\lambda^4 Q^3}{12(1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{г:} & \quad \frac{5\lambda^4 Q^3}{12(1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{д+е:} & \quad \frac{-\lambda^4 Q^3}{6(1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{ж:} & \quad \frac{-\lambda^4 Q^3}{2d} I_1^3 (1-\eta^2)^2 \delta_{ab}, \\
 \text{з:} & \quad \frac{-\lambda^4 Q^3}{3d(1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{и:} & \quad \frac{\lambda^4 Q^3}{72d} I_1^3 \left(15 + \frac{1}{9} \right) (1-\eta^2)^2 \delta_{ab} + \frac{7\lambda^4 Q^3}{36(d-1)} I_E^{(1)} (1-\eta^2)^2 \delta_{ab}, \\
 \text{к:} & \quad \frac{-8\lambda^4 Q^3}{81(1-\varepsilon)^4} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^4 \delta_{ab}, \\
 \text{л:} & \quad \frac{-\lambda^4 Q^3}{12(1-\varepsilon)^4} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^4 \delta_{ab}, \\
 \text{м:} & \quad \frac{-43\lambda^4 Q^3}{(18)^2 d (1-\varepsilon)^2} I_1^3 (1-\eta^2)^2 \eta^2 \delta_{ab} + \\
 & \quad + \frac{\lambda^4 Q^3}{48(1-\varepsilon)^2} \left[\frac{-3}{(d-1)} I_E^{(1)} + \frac{1}{d} I_1^3 \right] (1-\eta^2) \eta^2 \delta_{ab}, \\
 \text{н:} & \quad \frac{-8\lambda^4 Q^3}{81(1-\varepsilon)^4} I_1^3 (1-\eta^2) \eta^4 \delta_{ab};
 \end{aligned}$$

$$o: \frac{\lambda^4 Q^3}{162d(1-\varepsilon)^2} \left[7I_E^{(2)} + \frac{2}{3} I_1^3 \right] (1-\eta^2)^2 \eta^2 \delta_{ab},$$

где I_1 , $I_E^{(1)}$ и $I_E^{(2)}$ определяют стандартные расходящиеся интегралы:

$$(16) \quad I_1 = i \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^{d/2} (m^2)^\varepsilon}$$

$$I_E^{(1)} = i^3 \int \frac{d^d p d^d q d^d s}{(2\pi)^{3d}} \frac{p \cdot (p+s) q \cdot (q+s)}{p^2 (p+s)^2 q^2 (q+s)^2 (s^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{4}{(4\pi)^{3d/2} (m^2)^{3\varepsilon}} \frac{\Gamma(3\varepsilon) \Gamma^2(\varepsilon) \Gamma^3(1-\varepsilon) \Gamma(1-3\varepsilon)}{\Gamma^2(1-2\varepsilon)},$$

$$(17) \quad I_E^{(2)} = i^3 \int \frac{d^d p d^d q d^d s}{(2\pi)^{3d}} \frac{q \cdot (p+s) p \cdot (q+s)}{p^2 q^2 (p+s)^2 (q+s)^2 (s^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{d}{(4\pi)^{3d/2} (m^2)^{3\varepsilon}} \frac{\Gamma(3\varepsilon) \Gamma^2(\varepsilon) \Gamma^3(1-\varepsilon) \Gamma(1-3\varepsilon)}{(d-1) \Gamma^2(1-2\varepsilon)}.$$

Структура трехпетлевых интегралов I_E соответствует диаграммам на рис. 2.

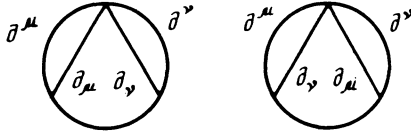


Рис. 2

Чтобы окончательно выделить $T_{ab}^{(1,3)}$ из контрчленов (15), необходимо прежде вычесть подрасходимости из I_1^3 , $I_E^{(1)}$ и $I_E^{(2)}$.

Вычитание подрасходимостей из I_1^3 не представляет затруднений, поскольку

$$I_1 + \text{subtractions} = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

следовательно,

$$(18) \quad I_1^3 + \text{subtractions} = \frac{1}{(4\pi)^3 \varepsilon^3}.$$

Вычитание подрасходимостей из $I_E^{(1)}$ дает следующий результат:

$$(19) \quad I_E^{(1)} + \text{subtractions} = \frac{1}{3(4\pi)^3 \varepsilon^3},$$

который нетрудно проверить с учетом того факта, что с помощью интегрирования по частям первая диаграмма на рис. 2 сводится к $1/3 I_1^3$.

Наконец, из (16) и (17) следует, что процедура вычитаний для $I_E^{(2)}$ приводит к следующему результату:

$$(20) \quad I_E^{(2)} + \text{subtractions} = \frac{1}{6(4\pi)^3} \left[\frac{1}{\varepsilon^3} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \right].$$

4. ТРЕХПЕТЛЕВАЯ β -ФУНКЦИЯ ВЗВ-МОДЕЛИ

Двухпетлевая β -функция ВЗВ-модели, вычисленная в [6, 7, 14], имеет вид

$$\beta_{ab} = \frac{Q}{2\pi} (1-\eta^2) \delta_{ab} + \frac{\lambda^2 Q^2}{2(2\pi)^2} (1-\eta^2) (1-3\eta^2) \delta_{ab},$$

что приводит к

$$(21) \quad \beta_\lambda = -\frac{\lambda^4 Q}{2\pi} (1-\eta^2) - \frac{\lambda^6 Q^2}{2(2\pi)^2} (1-\eta^2) (1-3\eta^2).$$

ВЗВ-член не перенормируется вовсе, что следовало ожидать вследствие его топологической природы.

Результат (21) следует сравнить с соответствующими результатами [3], вычисленными для ВЗВ-модели в критической точке при $\eta^2=1$. Заметим, в частности, что при $\eta^2=1$ пертурбативная β -функция равна нулю, как и должно быть.

В критической точке ВЗВ-модель является конформно-инвариантной квантовой теорией, что позволило авторам работы [3] использовать методы конформной теории поля для вычисления аномальных размерностей ряда составных операторов, не обращаясь к теории возмущений и используя лишь симметрии теории. В частности, в работе [3] вычислена аномальная размерность оператора $\partial_\mu U \partial^\mu U^{-1}$, что эквивалентно вычислению производной β_λ -функции в критической точке. Эта производная оказалась равной

$$(22) \quad \left. \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\eta^2=1} = \frac{2Q}{Q+n} = \frac{2Q}{n} \left[\frac{1}{1+Q/n} \right].$$

Разлагая (22) в ряд, получаем

$$(23) \quad \left. \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\eta^2=1} = \frac{2Q}{n} - \frac{2Q^2}{n^2} + \frac{2Q^3}{n^3} + o\left(\frac{Q^4}{n^4}\right),$$

что в точности согласуется с (21) в двухпетлевом приближении! На это соответствие указано в работах [6, 7, 14].

Здесь нас интересует проверка этого соответствия в трехпетлевом приближении. В результате сложения всех вкладов в (15) с учетом вычитания подрасходимостей согласно (18)–(20) и поправочному коэффициенту 2ϵ при переходе от контрчлена к β -функции в (12)–(14) имеем для трехпетлевого вклада в β -функцию

$$(24) \quad \beta_{ab}^{(3\text{-loop})} = \delta_{ab} \frac{\lambda^4 Q^3}{(4\pi)^3} (1-\eta^2) [q_0 + (1-\eta^2) q_2 + (1-\eta^4) q_4],$$

где вычисленные нами константы q_0 , q_2 и q_4 оказались следующими:

$$(25a) \quad q_0 = 8,$$

$$(25b) \quad q_2 = -\frac{22}{3}, \quad q_4 = -\frac{135}{81} = -\frac{5}{3}.$$

Из (24) и (25a) немедленно следует, что трехпетлевая β -функция (24) согласуется с непertурбативным результатом (22), что является чрезвычайно нетривиальным контролем наших вычислений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты и выводы нашей работы.

1. Ковариантный метод фонового поля для двумерных нелинейных σ -моделей с кручением использован для анализа перенормировки модели ВЗВ в трехпетлевом приближении.

2. Указан набор трехпетлевых диаграмм в σ -модельной теории возмущений, которые дают вклад в β -функцию, и вычислены соответствующие контрчлены.

3. Вычислена трехпетлевая β -функция модели ВЗВ с использованием размерной регуляризации и предписания ХВ для обращения с ε -символами.

4. Доказано соответствие пертурбативных и непертурбативных результатов для производной β -функции в критической точке при использовании регуляризации ХВ.

Наконец, отметим без доказательства, что двух- и трехпетлевые вклады в β -функцию **суперсимметричной** двумерной модели ВЗВ оказываются в результате соответствующих вычислений равными нулю. Доказательство этого утверждения мы надеемся представить в последующей публикации.

Автор признателен А. А. Дериглазову за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Witten E. // Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455–472.
- [2] Di Vecchia P. The Wess – Zumino action in two dimensions and Non-Abelian bosonization: Preprint NBI-HE-84-02. Copenhagen: The Niels Bohr Institute, Denmark, 1984.
- [3] Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. // Nucl. Phys. 1984. V. B247. № 1. P. 83–103.
- [4] Di Vecchia P., Knizhnik V. G., Petersen J. L., Rossi P. // Nucl. Phys. 1985. V. B253. № 3–4. P. 701–726.
- [5] Braaten E., Curtright Th. L., Zachos C. K. // Nucl. Phys. 1985. V. B260. № 4. P. 630–688.
- [6] Bos M. Dimensional regularization in the Wess – Zumino – Witten model: MIT Preprint CTP 1439. Cambridge, Ma., USA, 1986.
- [7] Ketov S. V. // Nucl. Phys. 1987. V. B294. № 4. P. 813–844.
- [8] Polyakov A. M., Wiegmann P. B. // Phys. Lett. 1983. V. 131B. № 1. P. 121–125; 1984. V. 141B. № 2–3. P. 223–227.
- [9] 't Hooft G., Veltman M. // Nucl. Phys. 1972. V. B44. № 1. P. 189–204.
- [10] Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z., Mukhi S. // Ann. Phys. (NY). 1981. V. 134. P. 85–109.
- [11] Friedan D. // Ann. Phys. (NY). 1985. V. 163. P. 318–419.
- [12] Grisaru M. T., van de Ven A., Zanon D. // Nucl. Phys. 1986. V. B277. № 3–4. P. 409–428.
- [13] 't Hooft G. // Nucl. Phys. 1973. V. B61. № 2. P. 455–468.
- [14] Metsaev R. R., Tseytlin A. A. Two-loop β -function of the σ -model with the anti-symmetric tensor coupling and α' -terms in the string effective action: check of the equivalence of string equations of motion and σ -model conformal invariance conditions: FIAN Preprint № 48. M.: FIAN, 1987.

Институт сильноточной электроники
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25.I.1988 г.

THREE-LOOP RENORMALIZATION OF THE WESS – ZUMINO – WITTEN MODEL

Ketov S. V.

The covariant background field method and the 't Hooft – Veltman prescription for dimensional regularization are used to calculate the three-loop $1/\varepsilon$ -counterterm in the two-dimensional Wess – Zumino – Witten model. The perturbative result for the three-loop β -function is found to be in agreement with the non-perturbative one obtained for this model by means of the conformal field theory technique.