Л. Д. Фаддеев, Что такое современная математическая физика?, *Труды МИАН*, 1999, том 226, 7–10

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 226, с. 7–10

УДК 501

Что такое современная математическая физика?

©1999 г. Л. Д. Фаддеев

Поступило в апреле 1999 г.

Когда кто-нибудь интересуется направлением моей научной работы, я называю себя специалистом по математической физике. Поскольку я занимаюсь наукой уже более 40 лет, у меня сложилось определенное понимание этого сочетания слов "математическая физика". Циники или пуристы могут твердить, что это и не математика, и не физика, добавляя замечания различной степени ехидности. Естественно, эти замечания нуждаются в ответе, и в этой небольшой статье я хочу кратко изложить свое понимание вопроса, внеся тем самым некоторый вклад в дискуссию.

Положение дел усложняется тем, что термин "математическая физика" (ниже мы будем часто использовать сокращение МФ) используется в очень разных смыслах и может иметь совершенно различное содержание. Это содержание меняется со временем и зависит от места.

Я не слишком внимательно изучал историю науки, но, насколько я понимаю, в начале нашего (еще XX) века термин МФ был практически эквивалентен понятию теоретической физики. Не только Анри Пуанкаре, но и Альберта Эйнштейна называли математическими физиками. Открывающиеся вновь физические кафедры теоретического направления в Англии или Германии получали название кафедр математической физики. Из документов в архиве Нобелевского комитета следует, что МФ имела полное право участвовать в тексте номинаций и обсуждении кандидатов на Нобелевскую премию по физике [1]. Грубо говоря, к понятию МФ подходили теоретические работы, использующие математические формулы.

Однако в процессе небывалого расцвета теоретической физики в 20–30-е годы произошло существенное разделение терминов теоретическая и математическая физика. Для многих МФ стала сводиться к важному, но вспомогательному курсу "Методы математической физики" с набором полезных математических приемов. Классическим примером является курс Ф. Морса и Г. Фешбаха [2], рассчитанный на широкий круг физиков и инженеров.

В свою очередь возникла МФ в математическом понимании как теория уравнений в частных производных и вариационного исчисления. Монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [3] или С.Л. Соболева [4] представляют собой выдающиеся примеры такого толкования МФ. Теоремы существования и единственности, основанные на вариационных принципах, априорных оценках и теоремах вложения функциональных пространств, составляют основное содержание этого направления. Как ученик О.А. Ладыженской, я был погружен в эту среду начиная с 3-го курса физического факультета Ленинградского университета. Моя соученица Н.Н. Уральцева заведует в Университете кафедрой математической физики именно в таком понимании.

Источником задач для МФ в указанном смысле являются главным образом геометрия и такие разделы классической механики сплошных сред, как гидродинамика и теория упругости. Близкой по духу, хотя и не по применяемым методам, является часть МФ, порожденная проблемами квантовой теории, которая активно и самостоятельно развивается начиная с 60-х годов. Здесь основным аппаратом является функциональный анализ, включая спектральную теорию операторов в гильбертовом пространстве и математическую теорию рассеяния, теорию групп Ли и их представлений. Главным предметом исследования является оператор Шрёдингера. Кафедра математической физики физического факультета С.-Петербургского университета, основанная в свое время В.И. Смирновым при поддержке В.А. Фока, работает и учит в основном в этом направлении. Оно же объединяет большинство членов Международной ассоциации математической физики, созданной в 70-е годы благодаря усилиям международной группы ученых, в том числе Н.Н. Боголюбова, В.С. Владимирова, М. Флато, Э. Либа, имевших более широкие взгляды. Однако здесь мы опять видим теоремы, строго подтверждающие результаты, в основном уже известные или понятные физикам.

Мое понимание роли МФ и тем самым содержания этого термина отлично от приведенных выше. Я считаю задачей МФ использование математической интуиции для вывода действительно новых результатов в фундаментальной физике. В этом смысле МФ является конкурентом теоретической физики. Их задачи в раскрытии законов строения материи не отличаются. Однако методы и даже само отношение к важности того или иного направления могут различаться коренным образом.

Здесь уместно сказать, в каком смысле я использую термин “фундаментальная физика”. Прилагательное “фундаментальный” в применении к классификации науки имеет массу толкований. В широком смысле оно используется для характеристики исследований по получению новых закономерностей в окружающей среде. В узком смысле оно остается лишь за поисками основных законов, к которым эти закономерности должны сводиться.

Так, все химические закономерности в принципе выводимы из уравнения Шрёдингера для системы электронов и ядер. Другими словами, фундаментальные основы химии в узком смысле уже открыты. Это, конечно, не лишает химию права называться фундаментальной наукой в широком смысле толкования этого термина.

То же можно сказать о механике и современной физике конденсированного состояния. Хотя большинство физических исследований сосредоточено в наше время в этой последней области, ясно, что все ее успехи, включая теорию сверхтекучести и сверхпроводимости, теорию конденсации Бозе–Эйнштейна и квантового эффекта Холла, имеют фундаментальную основу в нерелятивистской квантовой теории многих частиц.

Незавершенной фундаментальной проблемой в узком смысле остается физика элементарных частиц. Это ставит данный раздел физики в особое положение. И именно здесь современная МФ имеет наибольшие шансы для прорыва.

Дело в том, что вплоть до нашего времени вся физика развивалась по традиционному кругу — эксперимент–теоретическое толкование–новый эксперимент. Это относится и к физике элементарных частиц, основанной на прогрессе ускорительной техники. Огромная стоимость и ограниченные возможности последней скоро станут непреодолимым препятствием для дальнейшего развития. И здесь математическая интуиция может стать адекватной заменой. Об этом неоднократно говорили знаменитые физики-теоретики, имеющие математические наклонности, П. Дирак и С.Н. Янг [5, 6].

Я считаю, что драматическая история утверждения калибровочных полей в качестве основного средства описания взаимодействия в квантовой теории поля является хорошей иллюстрацией влияния математической интуиции на развитие фундаментальной физики. Калибровочные поля, или поля Янга–Миллса, были введены в 1953 г. в короткой работе С.Н. Янга и Р. Миллса [7], посвященной обобщению электромагнитного поля и соответствующего принципа калибровочной инвариантности. Геометрический смысл этого принципа для электромагнитного поля был выяснен еще в конце 20-х годов благодаря работам В.А. Фока и Г. Вейля [8, 9]. Ими была установлена аналогия между калибровочной (или градиентной в терминологии В. Фока) инвариантностью электродинамики и принципом эквивалентности в теории тяготения Эйнштейна. Калибровочная группа в электродинамике коммутативна, она соответствует умножению комплексного поля заряженной частицы на фазовый множитель. В середине 30-х годов, после открытия изотопического спина, О. Клейн сделал попытку ввести соответствующую некоммутативную калибровочную группу [10] и сопутствующее ей векторное поле. Предложение О. Клейна было отвергнуто более ортодоксальными физиками-теоретиками во главе с В. Паули. Для этого были вполне достойные причины, основанные на опыте и физической интуиции. Действительно, кванты калибровочного векторного поля в рамках теории возмущений соответствуют безмассовым частицам и порождают дальнодействующее взаимодействие соответствующих зарядов. В природе существует только одно такое поле и соответствующие частицы и взаимодействие, а именно электромагнитное поле, фотоны и кулоновское взаимодействие. Таким образом, красивая математическая схема противоречит опыту и должна была быть отброшена и забыта.

Работа Янга–Миллса в 1953 г. была более продвинута, чем предложение Клейна, но указанные возражения относились к ней в полной мере. Поэтому она не вышла немедленно на первый план, но сама идея зарядового пространства с некоммутативной группой симметрии приобретала все большую популярность в связи с появлением постоянно увеличивающегося числа новых элементарных частиц и поисками универсальной схемы их классификации. Однако именно на этом этапе решающую роль в продвижении полей Янга–Миллса сыграла математическая интуиция.

В начале 60-х годов Р. Фейнман занимался переносом своей схемы квантования электродинамики на теорию тяготения Эйнштейна. Чисто техническое затруднение — большое количество тензорных индексов — замедляло его работу. По совету М. Гелл-Манна он использовал более простой случай полей Янга–Миллса для отработки техники квантования и заметил ее существенное отличие от случая электродинамики с коммутативной калибровочной группой. Бессмысленность поля Янга–Миллса не стала препятствием для его использования в качестве математической схемы.

Работа Фейнмана [11] стала одним из отправных пунктов для моей работы по квантовой теории поля, которую я начал в середине 60-х годов вместе с Виктором Поповым. Другим не менее важным пунктом была монография А. Лихнеровича [12], посвященная теории связностей в векторных расслоениях. Из книги Лихнеровича ясно следовало, что поле Янга–Миллса имеет четкий геометрический смысл: оно определяет связность в расслоении, базой которого является пространство-время, а слоем — линейное пространство представлений зарядовой группы. Таким образом поле Янга–Миллса естественно встало в ряд полей, имеющих геометрическое происхождение, между электромагнитным полем, которое является его частным случаем с одномерным зарядом, и полем тяготения Эйнштейна, которое имеет дело с расслоениями, ассоциированными с касательным расслоением к риманову многообразию пространства-времени.

Мне стало ясно, что такая возможность не должна быть упущена, и несмотря на нерешенную проблему массы квантов поля Янга–Миллса, следует активно им занимается.

Корректные правила квантования поля Янга–Миллса, полученные В. Поповым и мной в 1966–1967 гг. [13, 14], не привлекли внимания физиков. В дальнейшем их продвижении в физику важную роль сыграли работы Г. 'т Хоофта [15], посвященные теории полей Янга–Миллса, взаимодействующих с полем Хиггса, и открытие размерной трансмутации (термин

С. Колемана [16]). Проблема массы была решена в первом случае при помощи спонтанного нарушения симметрии и во втором случае на основе асимптотической свободы. Описание этого развития дано многими его участниками, и я ограничусь двумя ссылками исторического характера на работы Г. 'т Хоофта [17] и Д. Гросса [18]. Результатом этого развития стала Стандартная Модель взаимодействия элементарных частиц, которая с середины 70-х годов и до сих пор остается фундаментальной основой физики высоких энергий. Для нашего изложения важно, что работа [13], основанная на математической интуиции, предшествовала работам в традициях теоретической физики.

Стандартная Модель не завершила создания фундаментальных основ физики высоких энергий. Гравитационное взаимодействие (имеющее, как отмечено выше, иное геометрическое толкование) в нее не входит. Объединение квантовых принципов, релятивизма и гравитации не осуществлено до сих пор. Есть все основания считать, что здесь современная математическая физика и ее интуиция сыграют ведущую роль. Действительно, новое поколение физиков-теоретиков получило несравнимо более высокое математическое образование и не подвержено давлению авторитетов, отстаивающих чистоту физического мышления и/или терминологии. Далее многие профессионалы-математики, захваченные красотой физических задач и применяемых методов, перешли на позиции математической физики. Объединение этих двух групп представляет огромную интеллектуальную силу. В следующем веке мы узнаем, способна ли эта сила заменить традиционную экспериментальную основу развития физики и соответствующую ей интуицию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nagel B.* The discussion concerning the Nobel Prize for Max Planck // Science technology and society in the time of Alfred Nobel. N.Y.: Pergamon Press, 1982.
2. *Morse F., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. N.Y.: McGraw Hill, 1953.
3. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer-Verl., 1931.
4. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд. ЛГУ, 1950.
5. *Dirac P.* Quantized singularities in the electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. London A. 1931. V. 133. P. 60–72.
6. *Yang C.N.* Selected papers 1945–1980 with commentary. San Francisco: Freeman, 1983.
7. *Yang C.N., Mills R.* Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191–195.
8. *Fock V.* L'equation d'onde de Dirac et la geometrie de Riemann // J. phys. et rad. 1929. V. 70. P. 392–405.
9. *Weyl H.* Electron and gravitation // Ztschr. Phys. 1929. Bd. 56. S. 330–352.
10. *Klein O.* On the theory of charged fields: Submitted to the Conf.: New Theories in Physics. Warsaw (Pol.), 1938 // Surv. High Energy Phys. 1986. V. 5. P. 269.
11. *Feynman R.P.* Quantum theory of gravitation // Acta phys. Polon. 1963. V. 24. P. 697–722.
12. *Lichnerowicz A.* Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Roma: Ed. Cremonese, 1955.
13. *Faddeev L., Popov V.* Feynman diagrams for the Yang–Mills field // Phys. Lett. B. 1967. V. 25. P. 29–30.
14. *Попов В., Фаддеев Л.* Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей: Препринт ИТФ-67-36. Киев, 1967.
15. *'t Hooft G.* Renormalizable Lagrangians for massive Yang–Mills fields // Nucl. Phys. B. 1971. V. 35. P. 167–188.
16. *Coleman S.* Secret symmetries: An introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields: Lecture given at 1973 Intern. Summer School in Phys. Ettore Majorana. Erice (Sicily), 1973 // Erice Subnucl. Phys. 1973.
17. *'t Hooft G.* When was asymptotic freedom discovered? Rehabilitation of quantum field theory: Preprint, 1998. hep-th/9808154.
18. *Gross D.* Twenty years of asymptotic freedom: Preprint, 1998. hep-th/9809080.