А. Бёттхер, О нётеровости и редукции двумерных операторов Винера–Хопфа с кусочно-непрерывным символом, *Докл. АН СССР*, 1983, том 273, номер 6, 1298–1300

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

А. БЁТТХЕР

О НЁТЕРОВОСТИ И РЕДУКЦИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА–ХОПФА С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМ СИМВОЛОМ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 X 1982)

В настоящей заметке рассматриваются нётеровость и редукция для двумерных дискретного и континуального операторов Винера–Хопфа (ОВХ) в пространствах последовательностей или функций, суммируемых в степени p, $1 < p < \infty$. Из обширной библиографии, посвященной теории ОВХ, отметим прежде всего монографии [1–3]. В двумерном случае нётеровость ОВХ с непрерывным символом изучена И.Б. Симоненко [4, 5], а редукция – А.В. Козаком [6] (см. также [7, 8]).

В случае кусочно-непрерывных символов критерии нётеровости для континуального ОВХ в пространстве $L^p(\mathbf{R}^2_{++})$ и для дискретного ОВХ в пространстве $l^2(\mathbf{Z}^2_{++})$ получены Р.В. Дудучава [9, 10]. Ниже мы анонсируем критерий нётеровости дискретного ОВХ в пространстве $l^p(\mathbf{Z}^2_{++})$ (теорема 1) и критерии применимости метода редукции "по квадратам" для дискретного (теорема 2) и континуального (теорема 4) ОВХ в пространствах $l^p(\mathbf{Z}^2_{++})$ и $L^p(\mathbf{R}^2_{++})$ соответственно. Попутно в теореме 3 решен до настоящего времени бывший открытым вопрос о применимости метода редукции к одномерному континуальному ОВХ с кусочно-непрерывным символом в пространстве $L^p(\mathbf{R}_+)$.

Касаясь метода доказательства указанных выше теорем, заметим прежде всего, что продвижение в этом направлении связано с отказом от методов C^*-алгебр, восходящих к работам Р. Дугласа [11] (см., например, [10]). Мы систематически применяем локальный принцип Н.Я. Крупника [12] и билокальную теорию В.С. Пилиди [13]. При изучении метода редукции существенным является использование новых результатов Б. Зильберманна, построившего локальный метод для редукции одномерных сверток с разрывными символами [14].

1. Д и с к р е т н ы е с в е р т к и. Н ё т е р о в о с т ь. Пусть $PC_0(\mathbf{T})$ – алгебра кусочно-постоянных функций на единичной окружности $\mathbf{T}$. Если $a \in PC_0(\mathbf{T})$ и $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ – последовательность ее коэффициентов Фурье, то оператор $T_1(a)$, действующий в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbf{Z}_+)$ по правилу

$$(1) \qquad (T_1(a)\varphi)_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}\varphi_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

является ограниченным. Обозначим через $PC_p(\mathbf{T})$ замыкание алгебры $PC_0(\mathbf{T})$ по норме $\|a\| := \|T_1(a)\|_{l^p \to l^p}$. Отметим, что $PC_p(\mathbf{T})$ содержит все функции ограниченной вариации и $PC_p(\mathbf{T}) = PC_q(\mathbf{T}) \subset PC_r(\mathbf{T}) \subset PC_2(\mathbf{T}) \subset L^\infty(\mathbf{T})$, где $1 < p < r < 2$, $1/p + 1/q = 1$ (см. [15]). Для $a \in PC_p(\mathbf{T})$ определенный соотношением (1) оператор $T_1(a)$ ограничен в l^p. Мы назовем его о д н о м е р н ы м д и с к р е т н ы м О В Х с с и м в о л о м a.

Через $PC_p(\mathbf{T}^2)$ обозначим проективное тензорное произведение $PC_p(\mathbf{T}) \hat{\otimes} \hat{\otimes} PC_p(\mathbf{T})$. Если $a \in PC_p(\mathbf{T}^2)$ и $\{a_{nm}\}_{n,m \in \mathbf{Z}}$ – последовательность ее коэффициентов Фурье, то двумерный дискретный ОВХ $T_2(a)$ с символом a, определенный формулой

$$(T_2(a)\varphi)_{i,j} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{i-k,j-l}\varphi_{kl}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

ограничен в банаховом пространстве $l^p \hat{\otimes} l^p \cong l^p(\mathbf{Z}^2_{++})$.

Для $\mu \in [0,1]$ при $p = 2$ полагаем $s_2(\mu) = \mu$ и при $p \neq 2$

$$s_p(\mu) = \frac{\sin(\vartheta\mu)\exp(i\vartheta\mu)}{\sin\vartheta\exp(i\vartheta)}, \quad \vartheta = \pi\left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Если $a \in PC_p(\mathbf{T}^2)$, то функции $a^1_{\zeta,\mu}$ и $a^2_{\zeta,\mu}$, определенные для $(\zeta,\mu) \in \mathbf{T} \times [0,1]$ соотношениями

$$\hat{a}^1_{\xi,\mu}(t) = (1 - s_p(\mu))a(t,\zeta - 0) + s_p(\mu)a(t,\zeta + 0).$$

$$a^2_{\zeta,\mu}(t) = (1 - s_p(\mu))a(\zeta - 0,t) + s_p(\mu)a(\zeta + 0,t), \quad t \in \mathbf{T},$$

принадлежат $PC_p(\mathbf{T})$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $a \in PC_p(\mathbf{T}^2)$. Для того чтобы оператор $T_2(a)$ был нётеровым в $l^p \hat{\otimes} l^p$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $(\zeta,\mu) \in \mathbf{T} \times [0,1]$ были обратимыми в l^p операторы $T_1(a^1_{\zeta,\mu})$ и $T_1(a^2_{\zeta,\mu})$. В этом случае* $\operatorname{Ind} T_2(a) = 0$.

В случае $p = 2$ аналогичная теорема получена в [10].

2. Д и с к р е т н ы е с в е р т к и. Р е д у к ц и я. Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве X и $\{R_\tau\}_{\tau \in \Omega}$ (где $\Omega = \mathbf{Z}_+$ или $\Omega = \mathbf{R}_+$) – последовательность ограниченных проекторов в X. Если для всякого $f \in X$ уравнения $R_\tau A\varphi_\tau = R_\tau f$ при достаточно большом $\tau \in \Omega$ имеют единственное решение $\varphi_\tau \in P_\tau X$ и φ_τ в норме пространства X стремится к решению $\varphi \in X$ уравнения $A\varphi = f$, то будем говорить, что к о п е р а т о р у A п р и м е н и м м е т о д р е д у к ц и и по системе проекторов $\{R_\tau\}$, и записывать в этом случае $A \in \Pi\{X; R_\tau\}$.

В l^p определим проекторы P_n, $n \in \mathbf{Z}_+$, следующим образом:

$$P_n: \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \mapsto \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0, 0, \ldots\}.$$

Для $a \in PC_p(\mathbf{T}^2)$ полагаем $a_1(\xi,\eta) = a(1/\xi,\eta)$, $a_2(\xi,\eta) = a(\xi, 1/\eta)$, $a_{12}(\xi,\eta) = a(1/\xi, 1/\eta)$, $(\xi,\eta) \in \mathbf{T}^2$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $a \in PC_p(\mathbf{T}^2)$. Для того чтобы $T_2(a) \in \Pi\{l^p \hat{\otimes} l^p; P_n \otimes P_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы каждый из четырех операторов $T_2(a)$, $T_2(a_1)$, $T_2(a_2)$, $T_2(a_{12})$ был обратимым в $l^p \hat{\otimes} l^p$.*

Хотя настоящая теорема по формулировке не отличается от случая непрерывного символа (см. [6]), ее доказательство носит принципиально иной характер. Мы не знаем, является ли оператор $T_2(a)$ в нашем случае оператором локального типа в смысле работы [6], и поэтому вынуждены были применить при ее доказательстве билокальную технику с использованием локального принципа из [14].

В случае $p = 2$ теорема 2 получена автором совместно с Б. Зильберманном.

3. К о н т и н у а л ь н ы е с в е р т к и. Р е д у к ц и я. Вначале рассмотрим одномерный случай. Пусть теперь $PC_0(\mathbf{R})$ – алгебра кусочно-постоянных функций на $\mathbf{R}$. Через F обозначим преобразование Фурье и через P_+ – проектор, действующий в $L^p(\mathbf{R})$ по правилу $(P_+\varphi)(x) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{sgn} x)\varphi(x)$. Полагаем $L^p = L^p(\mathbf{R}_+)$. Если $a \in PC_0(\mathbf{R})$, то оператор $W_1(a)$, определенный в $L^p \cap L^2$ соотношением

$$(2) \qquad W_1(a)\varphi = P_+ F^{-1} a(\cdot) F\varphi,$$

продолжается до ограниченного оператора в L^p (см. [9]). Обозначив через $PC_p(\mathbf{R})$ замыкание алгебры $PC_0(\mathbf{R})$ по норме $\|a\| := \|W_1(a)\|_{L^p \to L^p}$, имеем $PC_p(\mathbf{R}) = PC_q(\mathbf{R}) \subset PC_r(\mathbf{R}) \subset PC_2(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$, где $1 < p < r < 2$, $1/p + 1/q = 1$, и $PC_p(\mathbf{R})$ содержит все функции ограниченной вариации (см. [9]). Для $a \in PC_p(\mathbf{R})$ оператор (2) продолжается до ограниченного оператора в L^p, так называемого к о н т и н у а л ь н о г о ОВХ $W_1(a)$ с символом a.

Проекторы P_τ $(\tau > 0)$ определяем в L^p так: $(P_\tau\varphi)(x) = \varphi(x)$, $0 < x < \tau$; $(P_\tau\varphi)(x) = 0$, $x > \tau$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $a \in PC_p(\mathbf{R})$. *Для того чтобы* $W_1(a) \in \Pi\{L^p;\ P_\tau\}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $W_1(a)$ *был обратимым во всех пространствах* L^r, *где* $r \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$.

Заметим, что эта теорема является качественно новым результатом по сравнению с случаем $p = 2$, изученным И.Ц. Гохбергом и И.А. Фельдманом в книге [1]. Полезно также сравнить эту теорему с ее дискретным аналогом [14] : при $a \in PC_p(\mathbf{T})$ $T_1(a) \in \Pi\{l^p;\ P_n\}$ тогда и только тогда, когда $T_1(a)$ обратим в l^p и l^q, $1/p + 1/q = 1$. Дело в том, что в последнем случае из обратимости оператора $T_1(a)$ в l^p и l^q следует автоматически его обратимость в пространствах l^r, $r \in [p, q]$. По поводу доказательства теоремы 3 заметим, что с помощью методов работы [14] проблема сводится к изучению подходящих локальных представителей, каковыми являются ОВХ с кусочно-непрерывными символами, имеющими лишь одну точку разрыва. В дискретном случае такие операторы изучены И.Э. Вербицким и Н.Я. Крупником в [15], но в континуальной ситуации локальный представитель требует особого исследования.

Переходим к двумерному случаю. Пусть $PC_p(\mathbf{R}^2)$ – проективное тензорное произведение $PC_p(\mathbf{R}) \hat{\otimes} PC_p(\mathbf{R})$. Для $a \in PC_p(\mathbf{R}^2)$ двумерный континуальный ОВХ $W_2(a)$ с символом a в $L^p \hat{\otimes} L^p \cong L^p(\mathbf{R}^2_{++})$ получается продолжением оператора

$$\varphi \mapsto (P_+ \otimes P_+)(F^{-1} \otimes F^{-1})a(\cdot,\cdot)(F \oplus F)\varphi,$$

где $\varphi \in L^p(\mathbf{R}^2_{++}) \cap L^2(\mathbf{R}^2_{++})$, на все пространство $L^p(\mathbf{R}^2_{++})$. Заметим, что $a \in PC_p(\mathbf{R}^2)$ влечет за собой ограниченность оператора $W_2(a)$ во всех пространствах $L^{r_1} \hat{\otimes} L^{r_2}$, где $r_1, r_2 \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$ (см. [9]).

Т е о р е м а 4. *Пусть* $a \in PC_p(\mathbf{R}^2)$. *Для того чтобы* $W_2(a) \in \Pi\{L^p \hat{\otimes} L^p;\ P_\tau \otimes P_\tau\}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $W_2(a)$ *был нётеровым во всех пространствах* $L^{r_1} \hat{\otimes} L^{r_2}$, *где* $r_1, r_2 \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$, *и чтобы каждый из четырех операторов* $W_2(a)$, $W_2(a_1)$, $W_2(a_2)$, $W_2(a_{12})$ *был обратимым в* $L^p \hat{\otimes} L^p$. *Здесь* $a_1(\xi, \eta) = a(-\xi, \eta)$, $a_2(\xi, \eta) = a(\xi, -\eta)$, $a_{12}(\xi, \eta) = a(-\xi, -\eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$.

Опять указываем на качественное отличие случая кусочно-непрерывного символа от случая непрерывного символа. По сравнению с теоремой А.В. Козака [6] в теореме 4 появляется новое требование нётеровости оператора $W_2(a)$ во всех пространствах $L^{r_1} \hat{\otimes} L^{r_2}$, $r_1, r_2 \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$. Заметим, что теория нётеровости для континуальных ОВХ в пространствах $L^{r_1} \hat{\otimes} L^{r_2}$ при любых $1 < r_1$, $r_2 < \infty$ разработана в [9].

В заключение выражаю искреннюю благодарность В.Б. Дыбину за руководство работой и Б. Зильберманну за полезные советы.

Высшая техническая школа
Карл-Маркс-Штадт, ГДР
Ростовский–на–Дону государственный университет
им. М.А. Суслова

Поступило
13 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с. 2. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с. 3. *Prößdorf S., Silbermann B.* Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singularer Gleichungen. Leipzig: Teubner, 1977. 225 S. 4. *Симоненко И.Б.* – Матем. сб., 1967, т. 74(116), № 2, с. 298–313. 5. *Симоненко И.Б.* – Матем. исслед., 1968, вып. 3, № 1, с. 108–122. 6. *Козак А.В.* – ДАН, 1973, т. 212, № 6, с. 1287–1289. 7. *Козак А.В., Симоненко И.Б.* – Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 2, с. 119–127. 8. *Козак А.В., Симоненко И.Б.* – Матем. исслед., 1980, вып. 54, с. 56–66. 9. *Дудучава Р.В.* – ДАН, 1975, т. 221, № 2, с. 279–282. 10. *Дудучава Р.В.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, № 5, с. 1125–1137. 11. *Douglas R.G.* Banach algebra techniques in operator theory. N.Y.: Acad. Press, 1972. 216 p. 12. *Крупник Н.Я.* – Матем. исслед., 1980, вып. 54, с. 84–97. 13. *Пилиди В.С.* – ДАН, 1971, т. 201, № 4, с. 787–789. 14. *Silbermann B.* – Math. Nachr., 1981, b. 104, S. 137–146. 15. *Вербицкий И.Э., Крупник Н.Я.* – Матем. исслед., 1977, вып. 45, с. 17–28.