И. П. Мащенко, Ф. С. Чуриков, Решение одного интегрального уравнения, встречающегося в теории пластичности,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 411–423

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

И. П. Мащенко, Ф. С. Чуриков

Многие задачи плоской деформации, а также задачи плоского напряженного состояния с условием пластичности Кулона, сводятся к решению линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [1], имеющего вид:

$$\int_a^x \varphi(t)\, J_0\left[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}\right] dt = f(x), \qquad (1)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $f(x)$ — известная функция, a, b, c — постоянные.

Докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором замкнутом интервале D, то на этом интервале справедлива формула обращения уравнения* (1)

$$\varphi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\int_a^t f(x)\, J_0\left[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}\right] dx - c\int_a^t f(x)\, J_0\left[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}\right] dx, \qquad (2)$$

при условии, что $f(a) = 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что линейной заменой переменных t и x уравнение (1) можно привести к виду

$$\int_0^x \varphi(t)\, J_0\left[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}\right] dt = f(x). \qquad (3)$$

Это уравнение мы и будем рассматривать при доказательстве теоремы. Умножим его на функцию $J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]$ и проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до z, где $z \in D$

$$\int_0^z J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]\,dx \cdot \int_0^x \varphi(t) J_0[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}]\,dt = \int_0^z J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]\,f(x)\,dx.$$

Меняя в левой части последнего равенства порядок интегрирования, получим

$$\int_0^z \varphi(t)\,dt \int_t^z J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] \cdot J_0[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}]\,dx = \int_0^z J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]\,dx. \tag{4}$$

Для вычисления интеграла

$$J = \int_t^z J_0[\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]\,J_0[\sqrt{4c(x+b)(t-x)}]\,dx, \tag{5}$$

воспользуемся формулами (см. [2, стр. 974])

$$J_0(x)\,J_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} F\left(-k, -k, 1; \frac{y^2}{x^2}\right)}{(k!)^2},$$

$$F\left(-k, -k, 1; \frac{t-x}{z-x}\right) = \sum_{i=0}^{k} (C_k^i)^2 \left(\frac{t-x}{z-x}\right)^i. \tag{6}$$

После их применения интеграл (5) запишется в следующем виде:

$$J = \int_t^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \sum_{i=1}^{k} (C_k^i)^2 c^k (x+b)^k (z-x)^{k-i} (t-x)^i\,dx. \tag{7}$$

Можно показать, что ряд, стоящий под знаком интеграла, равномерно сходится, а поэтому поменяем порядок суммирования и интегрирования. После вычисления полученного гипергеометрического интеграла получим

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k (z-t)^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{c}\,(z-t)}{\sqrt{c}}. \qquad (8)$$

Используя формулы (5) и (8), уравнение (4) преобразуем к виду

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^z \varphi(t) \operatorname{sh} \sqrt{c}\,(z-t)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^z f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]\,\mathrm{d}x. \qquad (9)$$

После двухкратного дифференцирования последнего равенства находим

$$\varphi(z) + \sqrt{c} \int_0^z \varphi(t) \operatorname{sh} \sqrt{c}\,(z-t)\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \int_0^z f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z+x)}]\,\mathrm{d}x. \qquad (10)$$

Вычитая из уравнения (10) уравнение (9), умноженное на c, и заменяя переменную z на t, получим

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_0^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}]\,\mathrm{d}x - \\ - c \int_0^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}]\,\mathrm{d}t.$$

Это равенство является формулой обращения уравнения (3). Формулу обращения (2) получаем линейной заменой переменных t и x. Теорема доказана.

Краснодарский филиал ВНИИ Монтажспецстроя

Поступило 25.VII.1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Чуриков Ф. С., Мащенко И. П., Решение задачи о прокатке полосы, Тр. Краснодарского политехнического института, № 42, Краснодар, 1972, 43—62.

[2] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1973.