Доклады Академии наук СССР
1977. Том 237, № 1

УДК 517.946.51 **МАТЕМАТИКА**

С. А. ТЕРСЕНОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВЫРОЖДЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 VIII 1977)

В работе (1) для одного класса уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе, впервые была предложена и исследована новая постановка первой краевой задачи, когда некоторая часть границы необходимо освобождается от краевых условий. В ряде работ (см., например, (2, 7)) исследовались дифференциальные свойства решений таких уравнений вплоть до многообразий на границе, освобождаемых от краевых условий.

В настоящей заметке для одного вырождающегося уравнения устанавливается, что предельные значения решений на многообразиях вырождения, освобождаемых от краевых условий, удовлетворяют вполне определенному дифференциальному уравнению. В силу того, что исследуемое свойство локальное, то при достаточной гладкости освобождаемой границы можно считать, что она совпадает с частью гиперплоскости $y=0$.

Рассмотрим в цилиндрической области $Q=\Omega\times(0, T)$ уравнение

$$L(u)\equiv Au_{yy}+au_y+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i y}+M(u)=0, \tag{1}$$

которое строго эллиптично при $y>0$ $(0<y<T)$ и вырождается на Ω — основании цилиндра Q $(y=0)$; $\Omega\in R_n$ — ограниченная область, $x\in R_n$, $\partial\Omega=S\in C^{(2+\alpha)}$. Оператор

$$M(u)\equiv\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}+cu$$

строго эллиптический по переменным $x_1,\dots,x_n$ в $\bar{Q}$. Коэффициенты a_{ij}, a_i, $c\in C^{(2+\alpha)}(\bar{Q})$, $c\leqslant 0$ в $\bar{Q}$, A, a, $b_i\in C^{(\alpha)}(\bar{Q}-\Omega)\cap C(\bar{Q})$. Обозначим через $M_0(u)$ строго эллиптический оператор в Ω, коэффициенты которого совпадают со значениями коэффициентов оператора $M(u)$ при $y=0$. Пусть

$$F(x,y)=\int_y^T A^{-1}(x,\tau)\exp\left(\int_y^\tau A^{-1}(x,\tau_1)a(x,\tau_1)d\tau_1\right)d\tau,$$

$$\omega(y)=\int_y^T \min_{x\in\Omega}F(x,\tau)d\tau,\qquad A_0(y)=\max_{x\in\Omega}A(x,y),$$

$$K(y)=\int_y A_0^{-1/2}(\tau)d\tau.$$

Функция $\omega(y)$ имеет почти всюду вторую производную.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1)

$$\lim_{y\to 0} \omega(y)=\infty, \tag{2}$$

$$A(x, y)\omega''(y)+a(x, y)\omega'(y)\leqslant C_1\omega(y)\,|\log\omega(y)|^{\beta}, \tag{3}$$

где $0<\beta<1$, C_1 — постоянная.

2) $A_0(y)$ при $y>0$ имеет почти всюду первую производную и $K(y)\to\infty$ при $y\to 0$. Кроме того, существует такая ограниченная функция $B(x, y)$ и постоянная $0<\beta_1<1$, что при малых y функция $a(x, y)$ представима в виде

$$a(x, y)={}^1/_2A(x, y)A_0^{-1}(y)A_0'(y)+B(x, y)\sqrt{A_0(y)}K(y)\,|\log K(y)|^{\beta_1}. \tag{4}$$

Из выполнения условий (2), (3) и (4) следует, что область Ω — основание Q, освобождается от краевых условий в случае первой краевой задачи для уравнения (1). Для этого достаточно (см. [1]), чтобы существовала функция ψ, обладающая свойствами: $\psi\geqslant 0$, $L(\psi)\leqslant 0$ в Q и $\psi\to\infty$ равномерно при $y\to 0$. Такой функцией является

$$\psi=|\log\omega(y)|^{\beta_2}+N-(x_k+q)^p,\quad 0<\beta_2\leqslant 1-\beta_1,\quad k\leqslant n,$$

при соответствующем выборе постоянных N, p, q.

Рассмотрим теперь ограниченное в $\bar{Q}$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) и введем обозначения

$$\overline{\lim_{y\to 0}}\, u|_{S_T}=f_1(x),\quad \underline{\lim_{y\to 0}}\, u|_{S_T}=f_2(x),\quad S_T=S\times(0, T).$$

Имеет место

Теорема. *Пусть* $\varphi_i(x)\in C^{(2+\alpha)}(S)$, $i=1, 2$, $\varphi_1(x)\geqslant f_1(x)$, $\varphi_2(x)\leqslant f_2(x)$, *а* $v_i(x)$ — *решения уравнения* $M_0(v_i)=0$, *удовлетворяющие краевым условиям*: $v_i=\varphi_i$ *на* S.

Тогда

$$\overline{\lim_{y\to 0}}\, u(x, y)\leqslant v_1(x),\quad \underline{\lim_{y\to 0}}\, u(x, y)\geqslant v_2(x),\quad x\in\Omega. \tag{5}$$

Следствие. *Если* $f_1=f_2=f(x)\in C^{(2+\alpha)}(S)$, *то*

$$\lim_{y\to 0} u(x, y)=v(x),\quad x\in\Omega,$$

где $v(x)$ — *решение уравнения* $M_0(v)=0$ *при краевых условиях*: $v=f(x)$ *на* S.

Приведем доказательство первого из неравенств (5). Остальные доказываются аналогичным путем. В силу строгой эллиптичности оператора $M(u)$ в $\bar{Q}$ всегда можно подобрать такую функцию $\varphi(x)$, что $M(\varphi)\leqslant -\delta$, $\varphi>0$, $\delta>0$ в Q. Тогда, если y_0 достаточно мал, то при $y<y_0$ функция

$$\psi_1(x, y)=\varphi(x)\,|\log K(y)|^{-\beta_3},\quad \beta_3>0,$$

в области $Q_0=\Omega\times(0, y_0)$ будет удовлетворять условию; $L(\psi_1)\leqslant 0$ в Q_0. Далее, уже обычным способом, рассматривая функцию

$$\psi_2(x, y)=\varepsilon+\varepsilon_1\psi+M_3\psi_1+v_1(x)-u(x, y),$$

где $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$ — произвольные числа, выбором постоянной $M_3>0$ можно добиться того, чтобы $L(\psi_2)<0$ в Q_0, а $\psi_2>0$ на боковой поверхности Q_0 и на Ω_0 — верхнем основании Q_0 ($y=y_0$). В силу принципа максимума $\psi_2>0$ в Q_0. Отсюда, в силу произвольности ε и ε_1, следует утверждение теоремы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. В. Келдыш*, ДАН, т. 77, № 2, 181 (1951). [2] *P. Henrici*, Proc. Am. Math. Soc., v. 8, № 1 (1957). [3] *Ю. П. Кривенков*, ДАН, т. 123, № 2, 239 (1958). [4] *В. Н. Врагов*, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 1, 15 (1971). [5] *В. Н. Врагов*, там же, т. 10, № 1, 32 (1974). [6] *В. А. Брюханов*, там же, т. 9, № 1, 166 (1973). [7] *С. А. Терсенов*, ДАН, т. 228, № 6, 1294 (1976).