Е. В. Малинникова, Равномерная аппроксимация гармоническими дифференциальными формами на компактных подмножествах риманова многообразия, *Алгебра и анализ*, 1999, том 11, выпуск 4, 115–138

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 4

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ НА КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

© Е. В. Малинникова

Работа посвящена обобщению теорем Рунге и Гартогса–Розенталя о равномерной аппроксимации рациональными дробями. Вместо комплексной плоскости мы рассматриваем риманово многообразие, вместо аналитических функций комплексной переменной — гармонические дифференциальные формы. Роль рациональных дробей играют линейные комбинации „элементарных“ гармонических форм — так называемых форм Кулона и Био–Савара.

Введение

Пусть M — риманово n-мерное многообразие класса C^∞, связное и ориентированное. Мы изучаем равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами на M. Эта работа продолжает работы [1] и [2], в которых M было евклидовым пространством. Отметим, что приближение гармоническими *функциями* на римановых многообразиях изучалось в [3]. Переход к естественной для гармонических форм среде обитания — риманову многообразию — потребовал по-новому осмыслить основные понятия и средства, применявшиеся в [1, 2]. Пришлось отказаться от использования ньютоновского потенциала и фундаментального решения оператора Лапласа. Частичной заменой оператора U (см. [1]) стал оператор Грина на компактном многообразии. Роль формулы Коши–Грина $c_nT = d\delta U^T + \delta dU^T$ перешла к формуле Ходжа–Вейля–Де Рама–Кодаиры, осуществляющей разложение потока с компактным носителем на точную, коточную и гармоническую составляющие (последняя отсутствует в случае $M = \mathbb{R}^n$). Возможная нетривиальность гомологий многообразия M заставляет по-иному определить элементарные формы. Так, если

Ключевые слова: гармоническая дифференциальная форма, теорема Рунге, теорема Ходжа.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-00541) и NSERC (грант OGPO 170258).

r-форма Био–Савара BS^γ (см. [1, с. 124]) порождалась конечным $(n-r-1)$-*циклом* γ, то теперь нам приходится считать, что r-форма $\Phi(c)$, играющая аналогичную роль на M, порождена некоторой конечной $(n-r)$-*цепью* c, причем $\Phi(c)$ оказывается гармонической вне границы bc цепи c; формы $\Phi(c)$, $\Phi(c')$, отвечающие цепям с общей границей $bc = bc'$, вообще говоря, различны. Аналогичных изменений требует и определение форм Кулона.

Доказательства теоремы Рунге, данные в [1, 2], существенно использовали двойственность Александера–Понтрягина пространств компактных сингулярных гомологий $H_r(K)$ и $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — „правильный" компакт. На многообразии мы вынуждены ограничиться изоморфизмом пространств $H_{n-r}(M, M \setminus K)$ (относительных $(n-r)$-мерных компактных сингулярных гомологий пары $(M, M \setminus K)$) и $\overline{H}^r(K)$ (r-мерных когомологий Де Рама компакта K).

Как и в работах [1, 4], наши аппроксимационные теоремы выводятся с помощью теоремы Хана–Банаха из некоторых теорем единственности. Но на этот раз теорема единственности, соответствующая теореме Рунге, есть очень глубокий результат об исчезновении гармонической формы с нулем бесконечного порядка [5]. По этой причине сколько-нибудь явное построение приближающих форм в теореме Рунге (как, например, в работе [2]) становится весьма затруднительным. Такое построение, по-видимому, привело бы к принципиально новому доказательству упомянутой теоремы единственности.

Изменяется по сравнению с работой [1] и доказательство теоремы Гартогса–Розенталя. Теперь большую роль в доказательстве играет свойство (sd_p), определенное для $M = \mathbb{R}^n$ в работе [2]. При обобщении этого свойства в очередной раз приходится учитывать возможную нетривиальность пространств гомологий данного многообразия. Отдельный пункт посвящен доказательству того, что внешний дифференциал потенциала поливекторного заряда представим локально суммируемой формой. Этот факт совершенно очевиден, если $M = \mathbb{R}^n$.

Отсутствие явных формул в теореме разложения вынуждает нас использовать индекс Кронекера пар потоков (вместо интегральных формул). Этот инструмент оказывается очень удобным и позволяет придать смысл некоторым интегралам, которые в классическом смысле не существуют даже в $\mathbb{R}^n$.

Статья состоит из пяти параграфов. Первые два содержат подготовительные сведения. Наша цель здесь — определить элементарные гармонические формы (§1) и установить некоторые изоморфизмы пространств (ко)гомологий, используя удобный для нас язык потоков и дифференциальных форм (§2). Факты, сообщаемые в §1–2, в основном известны.

Основные результаты работы содержатся в §3 (теорема Рунге) и §4 (теорема Гартогса–Розенталя). Теорема Рунге доказывается в трех вариантах: в первом устанавливается принципиальная возможность приблизить форму, гармоническую вблизи компакта, элементарными формами; во втором доказано, что (после вычитания некоторых „периодов“ и „копериодов“) особенности приближающих элементарных форм можно поместить в произвольно малые окрестности некоторых заранее предписанных точек („вывод полюсов“); наконец, в третьем речь идет об аппроксимационных свойствах гармонических форм с чисто точечными особенностями. Доказанные нами варианты теоремы Рунге обобщают теоремы Рунге для гармонических форм в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2, 4]). Но в отличие от работ [1, 2, 4], где элементарные (простейшие, [4]) формы определялись с помощью явных формул, в этой статье их определение основано на неконструктивной „теореме существования“.

В четвертом параграфе обсуждается вопрос о равномерном приближении непрерывных форм гармоническими на данном компактном подмножестве K многообразия M. В частности, сформулировано геометрическое условие для множества K, при котором аппроксимация возможна. Доказанная в п. 4.3 теорема обобщает классическую теорему Гартогса–Розенталя о приближении непрерывных функций аналитическими на компактном множестве нулевой меры Лебега.

Замечания об эффективном построении ядер, участвующих в определении элементарных гармонических форм, собраны в заключительном §5. Там же еще раз обсуждаются особенности определения форм Био–Савара и Кулона на многообразиях.

Я искренне признательна В. П. Хавину за постоянное научное руководство, постановку задач и многочисленные обсуждения данной работы. Эта работа была подготовлена к печати во время моего пребывания на математическом факультете университета в Тронхейме; мне приятно поблагодарить факультет за гостеприимство.

§1. Предварительные сведения

1.1. Гармонические дифференциальные формы. Всюду в дальнейшем M будет обозначать n-мерное ($n \geqslant 3$) связное ориентированное риманово многообразие класса C^∞. Для открытого подмножества O многообразия M и целого числа p, $0 \leqslant p \leqslant n$, обозначим через $\mathcal{E}_p(O)$ пространство бесконечно дифференцируемых на O дифференциальных форм степени p (p-форм), а через $\mathcal{D}_p(O)$ — подпространство в $\mathcal{E}_p(O)$, состоящее из форм с компактными носителями. В пространствах $\mathcal{E}_p(O)$ и $\mathcal{D}_p(O)$ заданы обычные семейства полунорм [6]. Мы полагаем $\mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(M)$ и $\mathcal{E}_p := \mathcal{E}_p(M)$.

Оператор внешнего дифференцирования d сопоставляет p-форме класса C^1 форму степени $p+1$. На римановом многообразии M действует *оператор Ходжа*. Он переводит p-форму φ в $(n-p)$-форму, обозначаемую $*\varphi$, причем $*(*\varphi) = (-1)^{p(n-p)}\varphi$. *Кодифференциал* δp-формы φ класса C^1 определяется следующим образом: $\delta\varphi = (-1)^{np+n+1} * d * \varphi$. Оператор $\Delta := -(\delta d + d\delta)$ называется *оператором Лапласа-Бельтрами* на M. Нетрудно проверить, что оператор Δ коммутирует с операторами $d, *$ и δ. Форма $\varphi \in \mathcal{E}_p(O)$ называется *гармонической* в открытом множестве $O \subset M$, если $d\varphi = 0$ и $\delta\varphi = 0$ в O. Ясно, что если φ гармоническая в O форма, то $\Delta\varphi = 0$ в O.

1.2. Потоки. Мы будем использовать понятия и результаты изложенной в книге Де Рама [6] теории потоков. Пусть O — открытое подмножество многообразия M. *Пространство p-мерных потоков* в O (т. е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_p(O)$) обозначается через $\mathcal{D}'_p(O)$; пространство $\mathcal{E}'_p(O)$ состоит из потоков с компактными носителями в O.

Гладкое отображение многообразий $f: U \to V$ естественным образом индуцирует отображения $f^*: \mathcal{E}_p(V) \to \mathcal{E}_p(U)$ и $f_*: \mathcal{E}'_p(U) \to \mathcal{D}'_p(V)$. Если отображение f собственное, то f_* определено на $\mathcal{D}'_p(U)$.

Каждой $(n-p)$-форме ψ, локально суммируемой в открытом множестве $O \subset M$, соответствует поток $T_\psi \in \mathcal{D}'_p(O)$, действующий следующим образом:

$$T_\psi[\varphi] := \int_M \psi \wedge \varphi = \int_O \psi \wedge \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Множества p-мерных цепей в O и конечных p-мерных цепей в O обозначим через $\mathrm{Ch}_p(O)$ и $\mathrm{Ch}^f_p(O)$ соответственно; $\mathrm{Ch}_p := \mathrm{Ch}_p(M)$ и $\mathrm{Ch}^f_p := \mathrm{Ch}^f_p(M)$. Каждой цепи $c \in \mathrm{Ch}_p(O)$ сопоставим поток из $\mathcal{D}'_p(O)$, обозначаемый $\tilde{c}$,

$$\tilde{c}[\varphi] := \int_c \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Если $c \in \mathrm{Ch}^f_p(O)$, то $\tilde{c} \in \mathcal{E}'_p(O)$.

Борелевское подмножество A многообразия M порождает n-мерный поток I_A, определяемый равенством

$$I_A[\varphi] := \int_M \chi_A \varphi = \int_A \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_n.$$

Пусть $T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а W — открытое подмножество в O; сужение T на W обозначается $T \mid W$, $T \mid W \in \mathcal{D}'_p(W)$.

Произведение потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ на форму $\alpha \in \mathcal{E}_q(O)$, $q \leqslant p$, определяется как поток размерности $p-q$, действующий по правилу

$$(T \wedge \alpha)[\varphi] := T[\alpha \wedge \varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-q}(O).$$

Для каждого потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ естественным образом определены потоки $dT \in \mathcal{D}'_{p-1}(O)$, $*T \in \mathcal{D}'_{n-p}(O)$, $\delta T \in \mathcal{D}'_{p+1}(O)$ и $\Delta T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а именно

$$dT[\varphi] := (-1)^{n+p+1}T[d\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-1}(O);$$

$$*T[\varphi] := (-1)^{p(n-p)}T[*\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{n-p}(O);$$

$$\delta T := (-1)^{np+1} * d * T \quad \text{и} \quad \Delta T := -(\delta d + d\delta)T.$$

Нетрудно проверить, что для потоков, соответствующих дифференциальным формам, справедливы равенства $LT_\psi = T_{L\psi}$, где $L \in \{d, *, \delta, \Delta\}$.

Пусть $c \in \mathrm{Ch}_p$, тогда для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p-1}$

$$d\tilde{c}[\varphi] = (-1)^{n-p+1}\tilde{c}[d\varphi] = (-1)^{n-p+1}\widetilde{bc}[\varphi]$$

(последнее равенство следует из формулы Стокса), т. е. $d\tilde{c} = (-1)^{n-p+1}\widetilde{bc}$. Цепи из Ch_p с нулевой границей будем называть *циклами*; множество всех p-мерных циклов будем обозначать через Z_p; $\mathrm{Z}_p^f := \mathrm{Z}_p \cap \mathrm{Ch}_p^f$ будет обозначать множество всех конечных циклов. Для открытого подмножества O многообразия M положим $\mathrm{Z}_p(O) := \mathrm{Z}_p \cap \mathrm{Ch}_p(O)$ и $\mathrm{Z}_p^f(O) := \mathrm{Z}_p \cap \mathrm{Ch}_p^f(O)$.

Пусть $T \in \mathcal{D}'_p$, $O \subset M$ — открытое подмножество. Будем говорить, что $T \in C^\infty(O)$, если существует форма $\psi \in \mathcal{E}_{n-p}(O)$, для которой $T = T_\psi$ в O. *Сингулярным носителем* потока T, $\operatorname{singspt} T$, будем называть дополнение наибольшего открытого множества $O \subset M$, для которого $T \in C^\infty(O)$. Хорошо известна следующая лемма Вейля о гладкости (см., например, [6]).

Лемма. *Если $T \in \mathcal{D}'_p$ и $\Delta T = 0$ в O, то $T \in C^\infty(O)$.*

1.3. Индекс Кронекера пар потоков. На некоторых парах потоков с суммой размерностей n определена функция $\{\cdot,\cdot\}$, которую мы будем называть индексом Кронекера. Она обладает следующими свойствами (см. [6, §20]):

1) индекс Кронекера линеен по каждому аргументу;
2) если $S \in \mathcal{E}'_p$, $\psi \in \mathcal{E}_p$ (или если $S \in \mathcal{D}'_p$, $\psi \in \mathcal{D}_p$), то индекс Кронекера $\{S, T_\psi\}$ определен и $\{S, T_\psi\} = S[\psi]$;
3) если $\operatorname{spt} S \cap \operatorname{spt} T = \varnothing$, то $\{S, T\} = 0$;
4) если одно из множеств $\operatorname{spt} S$ и $\operatorname{spt} T$ компактно и $\operatorname{singspt} S \cap \operatorname{singspt} T = \varnothing$, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен;
5) если $S \in \mathcal{D}'_{p+1}$, $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$, один из потоков S и T имеет компактный носитель и определен индекс Кронекера $\{S, dT\}$, то определен и индекс Кронекера $\{dS, T\}$, причем $\{dS, T\} = (-1)^{n-p}\{S, dT\}$;
6) если $\operatorname{singspt} T \cap \operatorname{spt} dS = \varnothing$, $\operatorname{singspt} S \cap \operatorname{spt} dT = \varnothing$ и один из потоков S и T имеет компактный носитель, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен.

Отметим также, что из определения индекса Кронекера (см. [6]) следует, что если $f: U \to V$ — диффеоморфизм гладких многообразий и для потоков $T \in \mathcal{E}'_p(U)$, $S \in \mathcal{D}'_{n-p}(U)$ определен индекс Кронекера $\{T, S\}_U$, то определен и индекс Кронекера $\{f_*(T), f_*(S)\}_V$, причем $\{f_*(T), f_*(S)\}_V = \{T, S\}_U$. (Значки U и V указывают, в каком многообразии рассматриваются потоки и вычисляется индекс Кронекера).

Индекс Кронекера конечного цикла и цепи имеет простой геометрический смысл: он равен так называемому индексу пересечения цикла и цепи (см. [6]).

1.4. Разложение Ходжа–Вейля–Кодаиры–Де Рама. Рассмотрим пространство CL^2_p всех гладких p-форм, суммируемых с квадратом, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$CL^2_p := \Big\{\varphi \in \mathcal{E}_p : Q(\varphi) := \int_M \varphi \wedge *\varphi < \infty\Big\}.$$

Определим пространство $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{D}'_p$ следующим образом:

$T \in \mathcal{F}_p$, если для каждого множества форм $\Phi \subset \mathcal{D}_p$, ограниченного в $\mathcal{E}_p$, и такого, что $\sup\{Q(\varphi) : \varphi \in \Phi\} < \infty$, *множество* $\{T[\varphi] : \varphi \in \Phi\}$ *ограничено.*

Очевидно, что $\mathcal{E}'_p \subset \mathcal{F}_p$. Потоки из $\mathcal{F}_p$ можно применять к формам из CL^2_p. Будем говорить, что поток $R \in \mathcal{F}_p$ ортогонален форме $\omega \in CL^2_p$, если $R[\omega] = 0$. Пусть h_p обозначает подпространство в CL^2_p, состоящее из гармонических форм. В книге [6] доказана следующая теорема о разложении.

Теорема (Вейль, Ходж, Кодаира, Де Рам). *Существуют линейные отображения $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$ и $\mathcal{H}_3 : \mathcal{F}_p \to h_p$ такие, что для любого $S \in \mathcal{F}_p$ потоки $\mathcal{H}_1 S$ и $\mathcal{H}_2 S$ ортогональны h_p, поток $\mathcal{H}_1 S$ гомологичен нулю, поток $\mathcal{H}_2 S$ когомологичен нулю и выполнено равенство*

$$S = \mathcal{H}_1 S + \mathcal{H}_2 S + T_{\mathcal{H}_3 S}. \tag{1}$$

Поток $T_{\mathcal{H}_3 S}$ мы также будем обозначать через $\mathcal{H}S$. Из разложения (1) следует, что $\Delta\mathcal{H}_1 S = d\delta S$ и $\Delta\mathcal{H}_2 S = \delta d S$. Тогда по лемме Вейля (п. 1.2)

$$\begin{aligned} &\operatorname{singspt} \mathcal{H}_1 S \subset \operatorname{spt} d\delta S \subset \operatorname{spt} S, \\ &\operatorname{singspt} \mathcal{H}_2 S \subset \operatorname{spt} \delta d S \subset \operatorname{spt} S. \end{aligned} \tag{2}$$

Отображения $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ переводят потоки, соответствующие формам из CL^2_{n-p}, в такие же потоки (см. [6]). Мы обозначаем теми же буквами $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}$ отображения из CL^2_{n-p} в CL^2_{n-p}, для которых $LT_\psi = T_{L\psi}$, где $L \in \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}\}$, а $\psi \in CL^2_{n-p}$. Если $S \in \mathcal{F}_q$ и $\varphi \in CL^2_q$, то $\mathcal{H}S[\varphi] = S[\mathcal{H}\varphi]$, $\mathcal{H}_1 S[\varphi] = S[\mathcal{H}_2\varphi]$ и $\mathcal{H}_2 S[\varphi] = S[\mathcal{H}_1\varphi]$. Последнее равенство можно переписать таким образом:

$$\{\mathcal{H}_2 S, T_\varphi\} = \{S, \mathcal{H}_1 T_\varphi\}. \tag{3}$$

Докажем, что *для потоков* $S \in \mathcal{E}'_q, T \in \mathcal{E}'_{n-q}$ *с непересекающимися носителями выполнено равенство*

$$\{\mathcal{H}_2 S, T\} = \{S, \mathcal{H}_1 T\}. \tag{4}$$

Индексы Кронекера $\{\mathcal{H}_2, T\}$ и $\{S, \mathcal{H}_1 T\}$ определены в силу (2) и свойства 6, п. 1.3. Чтобы доказать равенство (4), выберем последовательность форм $\{\varphi_m\}$ из CL^2_q, для которой последовательность потоков $T_m = T_{\varphi_m}$ сходится к T в $\mathcal{E}'_{n-q}$ и существует такая окрестность U множества $\operatorname{spt} S$, что формы $\mathcal{H}_1\varphi_m$ сходятся в U к форме, соответствующей $\mathcal{H}_1 T$, по норме L^2. Мы также можем считать, что $\operatorname{spt}\varphi_m \cap U = \varnothing$ для любого $m \geqslant 1$. Остается воспользоваться равенством (3), заметив, что $\mathcal{H}_2 S \in C^\infty$ в окрестности $\operatorname{spt} T \cup \bigcup_m \operatorname{spt} T_m$.

1.5. Формы Био-Савара и Кулона. При работе с гармоническими дифференциальными формами в $\mathbb{R}^n$ заметную роль играют так называемые потоки (и формы) Био-Савара и Кулона. Рассмотрим $(n-r)$-мерный поток Био-Савара, отвечающий потоку $T \in \mathcal{E}'_{n-r-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$BS^T := c_n^{-1}\delta U^T,$$

где U^T — ньютоновский потенциал потока T [1, с. 123]. Поток BS^T можно определить как козамкнутое решение X уравнения $dX = T$, ограниченное (или квадратично суммируемое) в окрестности бесконечности. Это уравнение вместе с уравнением $\delta X = 0$ и леммой Вейля обеспечивают гладкость потока $X = BS^T$ вне $\operatorname{spt} T$, так что BS^T оказывается гармонической r-формой в $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} T$.

Чтобы естественным образом обобщить понятие потоков Био-Савара на случай риманова многообразия M, мы рассмотрим уравнение $dX = S$, где $S \in \mathcal{D}'_q$, $0 \leqslant q \leqslant n$. *Если оно разрешимо в* $\mathcal{F}_{q+1}$, *то решение* X *можно выбрать козамкнутым в* M.

Действительно, пусть $d\widetilde{X} = S$, для некоторого потока $\widetilde{X} \in \mathcal{F}_{q+1}$. Положим $X := \mathcal{H}_2\widetilde{X} + \mathcal{H}\widetilde{X} = \widetilde{X} - \mathcal{H}_1\widetilde{X}$. Тогда $\delta X = 0$ (так как $\delta\mathcal{H}_2\widetilde{X} = \delta\mathcal{H}\widetilde{X} = 0$), и $dX = d\widetilde{X} - d\mathcal{H}_1\widetilde{X} = d\widetilde{X} = S$. Определенный таким образом поток X является гармоническим в $M \setminus \operatorname{spt} S$.

Рассмотрим частный случай $S = d\tilde{c}$, где $c \in \mathrm{Ch}^f_{q+1}$ (так что $\tilde{c} \in \mathcal{F}_{q+1}$). Поток $\beta(c) := \tilde{c} - \mathcal{H}_1\tilde{c}$ соответствует вне $\operatorname{spt} d\tilde{c} = \operatorname{spt} bc$ гармонической форме, которую мы будем обозначать через $\Phi(c)$ и называть *формой Био–Савара, отвечающей цепи* c.

В п. 5.2 мы обсуждаем некоторые подробности, связанные с формами $\Phi(c)$ и, в частности, объясняем, чем вызваны различия между определениями форм Био–Савара в $\mathbb{R}^n$ и на римановом многообразии. Сейчас мы отметим лишь, что в случае $M = \mathbb{R}^n$ (в обозначениях работы [1]) $\Phi(c) = (-1)^{n-q}BS^{bc}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} bc$.

Для открытого подмножества O многообразия M определим множество p-форм Био–Савара в O

$$\mathrm{BS}_p(O) := \{\Phi(c) : c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p},\ \operatorname{spt} bc \cap O = \varnothing\}.$$

Аналогично обобщается понятие потоков и форм Кулона. Рассмотрим уравнение $\delta Y = T$, $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$. *Если оно разрешимо в* $\mathcal{F}_{n-q-1}$, *то в качестве решения можно выбрать поток, замкнутый в* M. Пусть $\delta\widetilde{Y} = T$, $\widetilde{Y} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$; положим $Y := \widetilde{Y} - \mathcal{H}_2\widetilde{Y} = \mathcal{H}_1\widetilde{Y} + \mathcal{H}\widetilde{Y}$. Поток Y замкнут в M, $\delta Y = \delta\widetilde{Y} = T$, и, следовательно, вне $\operatorname{spt} T$ поток Y задается некоторой гармонической формой. Пусть $e \in \mathrm{Ch}^f_{q+1}$. Тогда $*\tilde{e} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$. Поток $\gamma(e) := *\tilde{e} - \mathcal{H}_2(*\tilde{e})$ соответствует в $M \setminus \operatorname{spt} be$ гармонической форме, которую мы будем называть *формой Кулона, отвечающей цепи* e, и обозначать символом $\Psi(e)$. Отметим, что $\Psi(e) = *\Phi(e)$.

Множество p-форм Кулона в O определим следующим образом:

$$\mathrm{Coul}_p(O) := \{\Psi(e) : e \in \mathrm{Ch}^f_p,\ \operatorname{spt} be \cap O = \varnothing\}.$$

Формы Био–Савара и Кулона будем называть *элементарными гармоническими формами.*

1.6. Теорема разложения на компактном многообразии. На протяжении этого пункта будем считать, что M — *компактное* многообразие. Тогда $\mathcal{E}_p = \mathcal{D}_p$, и все формы из $\mathcal{E}_p$ суммируемы с квадратом. Пространство $\mathcal{F}_p$ совпадает с $\mathcal{D}'_p$, а пространство h_p конечномерно (см. [6, 7, 8]). Теорема Вейля–Ходжа–Кодаиры–Де Рама в случае компактного многообразия допускает следующее уточнение:

существует линейный оператор $G_p\colon \mathcal{D}'_{n-p} \to \mathcal{D}'_{n-p}$, *перестановочный с операторами* d, δ, $*$ *и* $\mathcal{H}$, *и такой, что* $\mathcal{H}_1 T = d\delta G_p T$, $\mathcal{H}_2 T = \delta d G_p T$ *для любого* $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$.

Оператор G_p называется *оператором Грина.* Он переводит поток, соответствующий гладкой дифференциальной форме, в такой же поток. Мы сохраним обозначение G_p за оператором, действующим из $\mathcal{D}_p$ в $\mathcal{D}_p$, для которого

$$G_p T_\psi = T_{G_p\psi}, \quad \text{при } \psi \in \mathcal{D}_p.$$

Оператор G_p — интегральный оператор с некоторым ядром g_p. Это означает следующее. Вне диагонали многообразия $M \times M$ определена двойная форма $g_p(x, y)$ класса C^∞. Степень формы по каждой переменной равна p. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}_p$

$$(G_p\varphi)(y) = \int\limits_M *_x g(x, y) \wedge \varphi(x).$$

Если $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$, то вне множества $\operatorname{spt} T$ поток G_pT соответствует p-форме $\psi(y) = T_x\left[*_x g(x, y)\right]$ (индекс x здесь обозначает, что поток T применяется по переменной x).

Некоторые известные нам сведения об операторах G_p и $\mathcal{H}$ на конкретных многообразиях собраны в п. 5.1.

§2. Изоморфизм некоторых пространств гомологий и когомологий на римановом многообразии

2.1. Сингулярные относительные гомологии и относительные гомологии Де Рама. Рассмотрим многообразие V класса C^∞ и его открытое подмножество U. Для пары (V, U) определены пространства $H^s_p(V, U)$ относительных (компактных) p-мерных сингулярных гомологий (см., например, [9]). Напомним, что

$$H^s_p(V, U) = Z^s_p(V, U)/B^s_p(V, U),$$

где $Z^s_p(V, U) = \{c \in \mathrm{Ch}^f_p(V) : \operatorname{spt} bc \subset U\}$, а

$$B^s_p(V, U) = \{c \in \mathrm{Ch}^f_p(V) : \exists c_1 \in \mathrm{Ch}^f_p(U),\ c_2 \in \mathrm{Ch}^f_{p+1}(V) \colon c = c_1 + bc_2\}.$$

Пространства $H^s_p(V, U)$ вместе с пространствами сингулярных гомологий множеств V и U образуют точную последовательность пары (V, U):

$$\ldots \to H^s_p(U) \xrightarrow{i_p} H^s_p(V) \xrightarrow{j_p} H^s_p(V, U) \xrightarrow{b_p} H^s_{p-1}(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H^s_{p-1}(V) \to \ldots$$

Гомоморфизм i_q индуцирован вложением $U \hookrightarrow V$; гомоморфизм j_q переводит класс в $H^s_q(V)$, содержащий цикл $c \in Z^f_q(V) \subset Z^f_q(V, U)$, в класс в $H^s_q(V, U)$, содержащий c; b_q — оператор взятия границы.

Наряду с „цепными" пространствами $H^s_q(V, U)$ нам понадобятся их „потоковые" аналоги $H_p(V, U)$, определяемые следующим образом. Положим

$$Z_p(V, U) := \{T \in \mathcal{E}'_p(V) : \operatorname{spt} dT \subset U\},$$
$$B_p(V, U) := \{T \in \mathcal{E}'_p(V) : \exists T_1 \in \mathcal{E}'_p(U),\ T_2 \in \mathcal{E}'_{p+1}(V) \colon T = T_1 + dT_2\}.$$

Другими словами, пространство $Z_p(V,U)$ состоит из потоков с компактными носителями, которые замкнуты вблизи $V \setminus U$. Поток с компактным носителем принадлежит пространству $B_p(V,U)$, если в некоторой окрестности множества $V \setminus U$ он совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю. Очевидно, что $B_p(V,U)$ — линейное подпространство в $Z_p(V,U)$, так что определено фактор пространство

$$H_p(V,U) := Z_p(V,U)/B_p(V,U).$$

Определение относительных компактных гомологий с помощью пространств потоков в намного более общей ситуации содержится в книге Федерера [10, с. 491]. Непосредственно из определения пространств $H_p(V,U)$ следует, что последовательность

$$\ldots \to H_p(U) \xrightarrow{i_p} H_p(V) \xrightarrow{j_p} H_p(V,U) \xrightarrow{b_p} H_{p-1}(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H_{p-1}(V) \to \ldots$$

точна. Здесь оператор b_p соответствует оператору взятия границы потока, $bT = (-1)^{n-p+1}dT$, $T \in \mathcal{E}'_p$. Естественное вложение $\mathrm{Ch}^f_p \to \mathcal{E}'_p$, $c \mapsto \tilde{c}$, индуцирует отображения J_p пространств (относительных) гомологий. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^s_p(U) \arrow[r, "i_p"] \arrow[d, "J_p"] & H^s_p(V) \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "J_p"] & H^s_p(V,U) \arrow[r, "b_p"] \arrow[d, "J_p"] & H^s_{p-1}(U) \arrow[r, "i_{p-1}"] \arrow[d, "J_{p-1}"] & H^s_{p-1}(V) \arrow[d, "J_{p-1}"] \\
H_p(U) \arrow[r, "i_p"] & H_p(V) \arrow[r, "j_p"] & H_p(V,U) \arrow[r, "b_p"] & H_{p-1}(U) \arrow[r, "i_{p-1}"] & H_{p-1}(V)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. По теореме Де Рама отображения

$$J_q\colon H^s_q(U) \to H_q(U) \quad \text{и} \quad J_q\colon H^s_q(V) \to H_q(V)$$

являются изоморфизмами для любого q, $0 \leqslant q \leqslant n$. Следовательно, отображение J_p осуществляет изоморфизм пространства $H^s_p(V,U)$ на пространство $H_p(V,U)$.

2.2. Когомологии Де Рама компактного подмножества. Пусть, как и раньше, V — многообразие класса C^∞. Определим пространства когомологий Де Рама компактного подмножества K многообразия V. Для каждого целого q, $0 \leqslant q \leqslant n = \dim V$, $\overline{Z}^q(K)$ есть пространство $\bigcup_{K \subset O}\{\varphi \in \mathcal{E}_q(O) \colon d\varphi = 0\}$ (объединение берется по всем открытым множествам O, содержащим K), профакторизованное по отношению эквивалентности: $\varphi_1 \sim \varphi_2$, если существует окрестность O множества K, для которой φ_1 и φ_2 определены и равны в O.

Элемент пространства $\overline{Z}^q(K)$, соответствующий форме φ, будем обозначать через $\{\varphi\}$. Далее, пусть $\overline{B}^q(K)$ — подпространство в $\overline{Z}^q(K)$, состоящее из классов эквивалентности, имеющих точного представителя:

$$\overline{B}^q(K) := \{\beta \in \overline{Z}^q(K) : \exists\varphi \in \mathcal{E}_{q-1}(O),\ K \subset O,\ \{d\varphi\} = \beta\}.$$

Тогда

$$\overline{H}^q(K) := \overline{Z}^q(K)/\overline{B}^q(K).$$

Пространство $\overline{H}^q(K)$ есть не что иное, как индуктивный предел пространств $H^q(O)$ по направлению, образованному открытыми множествами, содержащими K.

2.3. Изоморфизм $H_{n-q}(M, M \setminus K) \simeq \overline{H}^q(K)$. Пусть M — риманово многообразие, K — его компактное подмножество. Мы построим изоморфизм между пространствами $H_{n-q}(M, M\setminus K)$ и $\overline{H}^q(K)$. Подобный изоморфизм установлен, например, в [11]. Однако нам понадобится явная формула для отображения $H_{n-q}(M, M\setminus K) \to \overline{H}^q(K)$ на языке потоков и дифференциальных форм. Определим сначала отображение $\mathcal{A}_q\colon \overline{H}^q(K) \to H_{n-q}(M, M\setminus K)$. Мы будем использовать квадратные скобки для обозначения классов эквивалентности в пространствах гомологий и когомологий. Пусть $\{\varphi\} \in \overline{Z}^q(K)$, q-форма φ замкнута в некоторой окрестности U множества K. Рассмотрим поток $I_U \wedge \varphi$ (см. обозначения в п. 1.2). Ясно, что $d(I_U \wedge\varphi) = dI_U \wedge\varphi + I_U \wedge d\varphi$, так что $\operatorname{spt} d(I_U\wedge\varphi) \subset M\setminus K$ и $I_U \wedge \varphi \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$. Положим

$$A_q\{\varphi\} := [I_U \wedge \varphi] \in H_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Определение не зависит от замены φ на эквивалентную и от изменения окрестности W множества K. Если $\varphi \in \overline{B}^q(K)$, φ точна в $U_1 \subset \operatorname{clos} U$, то

$$I_U \wedge \varphi = I_U \wedge d\varphi_1 = d(I_U \wedge \varphi_1) - dI_U \wedge \varphi_1 \in B_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Таким образом, определено отображение

$$\mathcal{A}_q\colon \overline{H}^q(K) \to H_{n-q}(M, M \setminus K), \quad \mathcal{A}_q\big[\{\varphi\}\big] = [I_U \wedge \varphi].$$

Опишем отображение $\mathcal{B}_q\colon H_{n-q}(M, M \setminus K) \to \overline{H}^q(K)$. Для каждого потока $T \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$ рассмотрим поток $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T$. Он гармоничен в некоторой окрестности U множества K (действительно, $\delta(\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H}T) = 0$,

$d(\mathcal{H}_2T+\mathcal{H}T) = dT$, а $\operatorname{spt} dT \subset M\setminus K$). Следовательно, существует гармоническая в U форма ψ, для которой $\mathcal{H}_2T+\mathcal{H}T = T_\psi$ в U. Положим $\mathcal{B}_q[T] = [\{\psi\}]$. Проверим корректность такого определения. Если $T \in B_{n-q}(M, M\setminus K)$, то $T = T_1+dT_2$, где $\operatorname{spt} T_1 \subset M \setminus K$. Тогда верно равенство $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T = T_1 + dT_2 - \mathcal{H}_1T$, и вблизи K поток $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T$ совпадает с гомологичным нулю потоком $dT_2 - \mathcal{H}_1T$. Следовательно, по теореме Де Рама форма ψ гомологична нулю вблизи K и $\{\psi\} \in \overline{B}_q(K)$.

Лемма. *Отображения $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{B}_q$ — взаимно-обратные изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть $[T] \in H_{n-q}(M, M\setminus K)$ и $\mathcal{H}_2T+\mathcal{H}T = T_\psi$ вблизи K. Тогда $\mathcal{A}_q \circ \mathcal{B}_q[T] = [I_U \wedge \varphi]$, где U — некоторая окрестность множества K. Вблизи K верно равенство $I_U \wedge \psi = T_\psi = T - \mathcal{H}_1T$. Следовательно, $[I_U \wedge \psi] = [T]$, так как поток $\mathcal{H}_1T$ гомологичен нулю (ясно, что вблизи K поток, гомологичный нулю, совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю). Итак, отображение $\mathcal{A}_q \circ \mathcal{B}_q$ тождественное.

Обратно, пусть $[\{\varphi\}] \in \overline{H}^q(K)$ и $\mathcal{B}_q \circ \mathcal{A}_q[\{\varphi\}] = [\{\psi\}]$. Тогда поток T_ψ вблизи K совпадает с потоком $I_U \wedge \varphi - \mathcal{H}_1(I_U \wedge \varphi)$, где U — некоторая окрестность множества K. Следовательно, поток $T_\varphi - T_\psi$ совпадает вблизи K с потоком, гомологичным нулю. Из теоремы Де Рама следует, что форма $\psi - \varphi$ совпадает вблизи K с некоторой точной формой и $[\{\varphi\}] = [\{\psi\}]$. •

2.4. Два замечания. Из результатов, изложенных в п. 2.1–2.3, следует, что отображение

$$\mathcal{B}_q \circ J_{n-q}\colon H^s_{n-q}(M, M \setminus K) \to \overline{H}^q(K)$$

есть изоморфизм. В частности, верно следующее утверждение, которое мы будем использовать при доказательстве теоремы Рунге.

Если q-форма φ замкнута в некоторой окрестности множества K, то существует $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-q}(M)$, для которой $\operatorname{spt} bc \subset M \setminus K$, и вблизи K верно равенство $\varphi = \Phi(c) + d\psi$, где $\psi \in \mathcal{D}_{q-1}$.

Действительно, пусть $c = (\mathcal{B}_q \circ J_{n-q})^{-1}[\{\varphi\}]$. Тогда $\operatorname{spt} bc \subset M \setminus K$, и из определения оператора $\mathcal{B}_q$ следует, что $\mathcal{B}_q \circ J_{n-q}[c] = [\{\Phi(c)\}]$. Таким образом, разность $\varphi - \Phi(c)$ точна вблизи K.

Отметим, что в случае, когда $V = \mathbb{R}^n$, а K — правильное компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ (см. [2]), $\overline{H}^q(K) \simeq H^q(\operatorname{int} K) \simeq H^s_q(\operatorname{int} K)$. При этом граничный гомоморфизм

$$b_{n-q}\colon H^s_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \to H^s_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$$

является изоморфизмом (это сразу следует из рассмотрения точной последовательности пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ и тривиальности гомологий пространства $\mathbb{R}^n$).

Таким образом,

$$H^s_q(\operatorname{int} K) \simeq \overline{H}^q(K) \simeq H^s_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \simeq H^s_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K).$$

Мы получили двойственность Александера–Понтрягина.

Роль, которую играет двойственность Александера–Понтрягина в доказательстве теоремы Рунге для гармонических форм в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2]), в случае риманова многообразия выполняет изоморфизм пространств $H^s_{n-q}(M, M \setminus K)$ и $\overline{H}^q(K)$.

§3. Теорема Рунге для гармонических дифференциальных форм

3.1. Приближение элементарными гармоническими формами. Пусть K — компактное подмножество в M, $K \neq M$. Определим следующие множества p-форм ($1 \leqslant p \leqslant n$), заданных на K. Положим $\mathrm{BS}_p(K) := \bigcup_{K \subset O} \mathrm{BS}_p(O) \mid K$ — множество следов на K форм классов $\mathrm{BS}_p(O)$, отвечающих всевозможным открытым $O \supset K$; $\mathrm{Coul}_p(K) := \bigcup_{K \subset O} \mathrm{Coul}_p(O) \mid K$. Элементы пространства $\mathrm{BS}_p(K) + \mathrm{Coul}_p(K)$ будем называть *элементарными гармоническими p-формами с особенностями вне K*.

Теорема. *Любую p-форму, гармоническую вблизи K, можно равномерно на K приблизить элементарными гармоническими p-формами с особенностями вне K.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$ и T ортогонален всем элементарным гармоническим p-формам с особенностями вне K. Тогда, в частности, $T[\Phi(c)] = 0$ для любой цепи $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(M \setminus K)$. Следовательно,

$$0 = \{T, \tilde{c}\} = \{T, \mathcal{H}_1 \tilde{c} + (\mathcal{H}_2 \tilde{c} + \mathcal{H} \tilde{c})\} = \{T, \mathcal{H}_1 \tilde{c}\} = \{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\}.$$

Первое равенство следует из того, что носители T и $\tilde{c}$ не пересекаются, а последнее доказано в п. 1.4 (4). Поток $\mathcal{H}_2 T$ принадлежит классу C^∞ в $M \setminus K$, и тот факт, что $\{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\} = 0$ для любой цепи $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(M \setminus K)$, означает, что $\operatorname{spt}(\mathcal{H}_2 T) \subset K$. Аналогично, используя равенство $T[\Psi(e)] = 0$, выполненное для любой цепи $e \in \mathrm{Ch}^f_p(M \setminus K)$, получим, что

$$0 = \{T, *\tilde{e}\} = \{T, \mathcal{H}_2(*\tilde{e})\} = \{\mathcal{H}_1 T, *\tilde{e}\}$$

и $\operatorname{spt}(\mathcal{H}_1 T) \subset K$. Таким образом, поток $\mathcal{H} T = T - \mathcal{H}_1 T - \mathcal{H}_2 T$ сосредоточен на K, т.е. гармоническая на всем многообразии форма $\mathcal{H}_3 T$ равна нулю в $M \setminus K$. Из теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм на римановых многообразиях [5] следует, что $\mathcal{H}_3 T \equiv 0$.

Убедимся в том, что $T[\varphi]=0$ для любой p-формы φ, гармонической вблизи K (тем самым доказательство будет завершено). Можно считать, что $\varphi\in\mathcal{D}_p$. Напишем разложение (1) для потока T:

$$T[\varphi]=\mathcal{H}_1T[\varphi]+\mathcal{H}_2T[\varphi]+\mathcal{H}T[\varphi]. \tag{5}$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\mathcal{H}T=0$. Докажем, что второе слагаемое равно нулю. Форма $*\varphi$ замкнута вблизи K. Следовательно (см. п. 2.4), существует цепь $e\in \mathrm{Ch}^f_p(M)$, для которой $\operatorname{spt} be\subset M\setminus K$ и форма $*\varphi-\Phi(e)$ точна вблизи K. Другими словами, в некоторой окрестности множества K верно равенство $(-1)^{p(n-p)}\varphi-\Psi(e)=\delta\varphi_1$, где $\varphi_1\in\mathcal{D}_{p+1}$. (Мы воспользовались равенством $*\Phi(e)=\Psi(e)$). Как было доказано выше, $\operatorname{spt}\mathcal{H}_2T\subset K$. Тогда

$$\mathcal{H}_2T[\varphi]=(-1)^{p(n-p)}\mathcal{H}_2T\big[\Psi(e)\big]-(-1)^{p(n-p)}\mathcal{H}_2T[\delta\varphi_1].$$

Из козамкнутости потока $\mathcal{H}_2T$ немедленно следует, что $\mathcal{H}_2T[\delta\varphi_1]=0$. Проверим, что $\mathcal{H}_2T\big[\Phi(e)\big]=0$. Действительно, $\operatorname{spt}\mathcal{H}_1T\subset K$, и поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2T\big[\Phi(e)\big]&=T\big[\Phi(e)\big]-\mathcal{H}_1T\big[\Phi(e)\big]=-\mathcal{H}_1T\big[\Phi(e)\big]\\&=-\left\{\mathcal{H}_1T,\mathcal{H}_1(*\tilde e)+\mathcal{H}(*\tilde e)\right\}=-\left\{\mathcal{H}_1T,\mathcal{H}_1(*\tilde e)\right\}=0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из свойства 5, п. 1.3, так как поток $\mathcal{H}_1T$ замкнут и имеет компактный носитель, а поток $\mathcal{H}_1*\tilde e$ гомологичен нулю.

Аналогично доказывается, что первое слагаемое в правой части равенства (5) равно нулю. Вблизи K форма φ представима в виде $\varphi=\Phi(c)+d\varphi_2$, где $c\in\mathrm{Ch}^f_{n-p}(M)$, $\operatorname{spt} bc\subset M\setminus K$, $\varphi_2\in\mathcal{D}_{p-1}$. Тогда

$$\mathcal{H}_1T[\varphi]=\mathcal{H}_1T\big[\Phi(c)\big]=-\left\{\mathcal{H}_2T,\mathcal{H}_2\tilde c\right\}=0.$$

Итак, каждый поток с носителем в K, ортогональный элементарным гармоническим p-формам с особенностями вне K, обращается в нуль на форме φ. Применяя теорему Хана–Банаха, получаем утверждение теоремы. •

3.2. Вывод полюсов. Теперь мы уточним доказанную в предыдущем пункте теорему Рунге, описав расположение особенностей приближающих форм.

Компактное множество K мы будем называть *правильным*, если для каждого q, $0\leqslant q\leqslant n$, $\dim\overline{H}^{\,q}(K)<\infty$. Примером правильного компактного множества служит гладкое n-мерное подмногообразие с краем. В частности, для любого компактного множества K и любой его окрестности O найдется правильное компактное множество K_1, $K \subset K_1 \subset O$. Из изложенных в §2 результатов следует, что пространства $H_q(M, M \setminus K)$, $0 \leqslant q \leqslant n$, конечномерны, если K — правильное компактное подмножество многообразия M.

Пусть U — открытое подмножество многообразия M. Введем обозначения для пространств p-форм Био-Савара и Кулона с особенностями, гомологичными нулю в U:

$$\mathrm{bs}_p(M \setminus U) := \{\Phi(c) : c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}(U)\},$$
$$\mathrm{coul}_p(M \setminus U) := \{\Psi(e) : e \in \mathrm{Ch}^f_p(U)\}.$$

Теорема. *Пусть K — правильное компактное подмножество многообразия M, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $c_1, \ldots, c_L$ — p-цепи, классы эквивалентности которых образуют базис в $H^s_p(M, M \setminus K)$, $e_1, \ldots, e_N$ — $(n-p)$-цепи, классы которых образуют базис в $H^s_{n-p}(M, M \setminus K)$. Пусть $U \subset M \setminus K$ — открытое множество, пересекающееся с каждой компонентой связности множества $M \setminus K$. Тогда для любой p-формы φ, гармонической вблизи K, существуют числа $a_1, \ldots, a_L$ и $b_1, \ldots, b_N$, такие что форму*

$$\varphi_0 := \varphi - \sum_{j=1}^{L} a_j \Phi(c_j) - \sum_{k=1}^{N} b_k \Psi(e_k) \tag{6}$$

можно приблизить формами из пространства $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + \mathrm{coul}_p(M \setminus U)$ *равномерно на K.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$ и T ортогонален всем формам из $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + \mathrm{coul}_p(M \setminus U)$. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получим равенства $\mathcal{H}_2 T = 0$ в U и $\mathcal{H}_1 T = 0$ в U. Потоки $\mathcal{H}_2 T$ и $\mathcal{H}_1 T$ гармоничны в открытом множестве $M \setminus K$, а U пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$. Следовательно, по теореме единственности [5], $\operatorname{spt} \mathcal{H}_2 T \subset K$ и $\operatorname{spt} \mathcal{H}_1 T \subset K$. Как и в п. 3.1, заключаем, что $\mathcal{H} T = 0$.

Далее, существуют цепи $c = \sum_{j=1}^{L} a_j c_j$ и $e = \sum_{k=1}^{N} b_k e_k$, для которых форма $\varphi - \Phi(c)$ гомологична, а форма $\varphi - \Psi(e)$ когомологична нулю вблизи K (см. п. 2.4). Положим $\varphi_0 := \varphi - \Phi(c) - \Psi(e)$. Тогда в некоторой окрестности множества K выполнены равенства $\varphi_0 = d\varphi_1 - \Psi(e)$ и $\varphi_0 = \delta\varphi_2 - \Phi(c)$, где $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{p-1}$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{p+1}$. Проверим, что $T[\varphi_0] = 0$. Это следует из того, что $\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = 0$ и $\mathcal{H}_2 T[\varphi_0] = 0$. Докажем, например, первое равенство:

$$\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = \mathcal{H}_1 T[d\varphi_1] - \mathcal{H}_1 T[\Psi(e)] = -\mathcal{H}_1 T[\Psi(e)]$$

$$= -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e}) + \mathcal{H}(*\tilde{e})\} = -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e})\} = 0.$$

Теорема доказана. •

Заметим, что пространство $\mathrm{bs}_p(M\setminus U)+\mathrm{coul}_p(M\setminus U)$ в формулировке теоремы можно заменить на пространство $\mathrm{bs}_p(M \setminus U) + h_p$ или $\mathrm{coul}_p(M \setminus U) + h_p$.

3.3. Приближение формы φ_0 гармоническими формами с точечными особенностями. Отказавшись от приближения элементарными (в определенном нами смысле) гармоническими формами, мы можем приблизить форму φ_0, определенную в (6), гармоническими формами с точечными особенностями. В евклидовом пространстве приближение „простейшими" гармоническими формами с точечными особенностями изучалось в работе [4].

Нам понадобится следующий вариант теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм, который все еще является частным случаем доказанного в [5] результата:

Если O — открытое связное подмножество многообразия M, $x \in O$, и гармоническая в O форма φ имеет в точке x нуль бесконечного порядка, то $\varphi \equiv 0$ в O.

Говорят, что форма φ, заданная на многообразии M, имеет в точке x нуль бесконечного порядка, если для любой карты $\pi\colon \mathbb{R}^n \to U \ni x$ все коэффициенты формы $\pi^*\varphi$ и все их частные производные всех порядков обращаются в нуль в точке $\pi^{-1}(x)$. Используя сформулированную теорему единственности, мы докажем следующее утверждение.

Пусть K — правильное компактное подмножество многообразия M, а множество $X \subset M \setminus K$ пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$ (например, X содержит по одной точке каждой компоненты), *тогда в условиях теоремы п. 3.2 форму φ_0 можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими в $M \setminus X$.*

Доказательство. Рассмотрим поток $T \in \mathcal{E}'_p$, $\operatorname{spt} T \subset K$, который обращается в нуль на всех формах, гармонических в $M \setminus X$. Мы докажем, что $T[\varphi_0] = 0$. Во-первых, заметим, что $T[\mathcal{H}\psi] = 0$ для любой формы $\psi \in \mathcal{D}_p$, поскольку форма $\mathcal{H}\psi$ гармонична на M. Следовательно, $\mathcal{H}T \equiv 0$. Далее, если $S \in \mathcal{E}'_{n-p}$ и $\operatorname{spt} S \subset X$, то поток $\mathcal{H}_1 S$ соответствует в $M \setminus X$ гармонической форме. Таким образом, (см. п. 1.4 (3)), $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = \{T, \mathcal{H}_1 S\} = 0$.

Выберем некоторую компоненту связности W множества $M \setminus K$. На множестве W поток $\mathcal{H}_2 T$ задается некоторой гармонической формой ψ. Пусть $x \in X \cap W$. Тот факт, что для любого потока S, сосредоточенного в точке x, выполнено равенство $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = 0$, означает, что форма ψ имеет в точке x нуль бесконечного порядка. Тогда из теоремы единственности следует, что $\psi \equiv 0$ в W. Поступая таким же образом с остальными компонентами связности

$M \setminus K$, получим, что $\operatorname{spt} \mathcal{H}_2 T \subset K$. Теперь мы можем закончить доказательство так же, как в предыдущем пункте. •

§4. Теорема Гартогса–Розенталя для гармонических дифференциальных форм

В этом параграфе мы докажем теорему Гартогса-Розенталя. Будет описан некоторый класс компактных подмножеств многообразия M, на которых любую непрерывную форму можно равномерно приблизить гармоническими. В доказательствах будут использованы идеи и результаты работ [1, §7] и [2, §4.4].

4.1. Свойство (d_p). Пусть $0 \leqslant p < n$. Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ *обладает свойством* (d_p), если для любой локально суммируемой p-формы ψ и любого открытого множества O, содержащего K, из того, что $\psi \in C^\infty(O \setminus K)$ и ψ точна в $O \setminus K$, следует, что $dT_\psi = 0$ в O.

Теорема. *Предположим, что компактное подмножество K многообразия M обладает свойством (d_p). Тогда любую $(p+1)$-форму, замкнутую вблизи K, можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K.*

Доказательство. Пусть O — относительно компактная окрестность множества K. Существует компактное риманово многообразие M_1, для которого O с метрикой из M является римановым подмногообразием.

Рассмотрим $(n-p-1)$-ковекторный заряд μ, ортогональный всем $(p+1)$-формам, гармоническим вблизи K, $\operatorname{spt} \mu \subset K$. Мы докажем, что μ ортогонален всем формам, замкнутым вблизи K. На многообразии M_1 поток, порождаемый μ, имеет вид $\mu = d\delta G\mu + \delta dG\mu + \mathcal{H}\mu$. Ясно, что $\mathcal{H}\mu[\varphi] = \mu[\mathcal{H}\varphi] = 0$ для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(M_1)$ (так как форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична вблизи K). Следовательно, $\mathcal{H}\mu = 0$. Рассмотрим поток $*dG\mu$. Как будет доказано в п. 4.4, он соответствует некоторой p-форме ψ класса L^1. При этом для $y \notin \operatorname{spt} \mu$ имеем (см. п. 1.6)

$$\psi(y) = *d \int\limits_K *_x g_{n-p-1}(x, y) \wedge d\mu(x).$$

Вне множества K форма ψ бесконечно дифференцируема. Проверим, что она точна в $O \setminus K$. По теореме Де Рама для этого достаточно доказать, что $\int_{\mathrm{c}} \psi = 0$

для любого $e \in Z_p^f(O \setminus K)$. Запишем этот интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int\limits_e \psi(y) &= \int\limits_e \int\limits_K *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y) \wedge d\mu(x) \\ &= \int\limits_K \left(\int\limits_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y) \right) \wedge d\mu(x) = \int\limits_K \omega(x) \wedge d\mu(x) \\ &= \mu[\omega]. \end{aligned} \tag{7}$$

Форма ω определена равенством $\omega(x) = \int_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x,y)$ вне $\operatorname{spt} e$. Из равенства $Gd\varphi = dG\varphi$, выполненного для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{n-p-1}(M_1)$, следует, что $*_x d_y g_{n-p-1}(x,y) = (-1)^{p+1} d_x *_x g_{n-p}(x,y)$. Используя это равенство, мы можем переписать $\omega(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (-1)^{p+1} \int\limits_e *_y d_x *_x g_{n-p}(x,y) \\ &= (-1)^{p+1} d * Ge(x), \quad x \in M_1 \setminus \operatorname{spt} e.\end{aligned}$$

Ясно, что $d\omega = 0$ и $\delta\omega = 0$ в $M_1 \setminus \operatorname{spt} e$. В частности, ω гармонична вблизи K, и из равенства (7) следует, что $\int_e \psi(y) = \mu[\omega] = 0$. Итак, форма ψ точна в $O \setminus K$. Тогда в силу свойства (d_p) имеем $d(*dG\mu) = dT_\psi = 0$ в O, т.е. $\delta dG\mu = 0$ в O, и $\mu = d\delta G\mu$ в O. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(O)$ и $d\varphi = 0$ вблизи K. Тогда $\mu[\varphi] = d\delta G\mu[\varphi] = (-1)^{np+p+1}\mu[\delta dG\varphi]$. Форма $\delta dG\varphi$ гармонична вблизи K, так как $d(\delta dG\varphi) = d\varphi$, поэтому $\mu[\varphi] = 0$. Доказательство закончено. •

4.2. Свойство (sd_p). Наряду со свойством (d_p) мы рассмотрим более сильное свойство (sd_p). Будет описана некоторая геометрическая характеристика компактного множества, достаточная для выполнения условия (sd_p).

Пусть $0 \leqslant p < n$, $U \subset M$ — открытое подмножество. Рассмотрим гомологичные нулю (в M) цепи, лежащие в U; положим

$$R_p(U) = \{bc : c \in \mathrm{Ch}_{p+1}^f(M),\ \operatorname{spt} bc \subset U\}.$$

Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ *обладает свойством* (sd_p), если для любой локально суммируемой p-формы ψ и любого открытого множества $G \subset M$ из условий:

1) T_ψ замкнут в $G \setminus K$,

2) $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K)$

следует, что T_ψ замкнут в G, и $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G)$.

Отметим, что если $dT_\psi = 0$ в U и $e \in R_p(U)$, то индекс Кронекера $\{\tilde{e}, T_\psi\}$ определен (см. свойство 6 п. 1.3). Кроме этого, ясно, что $R_p(U) \subset Z_p^f(U)$, и если множество K обладает свойством (sd_p), то оно обладает свойством (d_p).

Напомним, что множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется r-невидимым (в стандартном базисе), если проекция K на любую r-мерную координатную плоскость имеет нулевую r-мерную меру Лебега (см. [1]). Мы будем все время считать, что базис в $\mathbb{R}^n$ фиксирован. Через B^n мы обозначаем единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ и полагаем $B_\delta^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant \delta\}$.

Лемма 1. *Пусть $\pi \colon U \to B^n$ — карта на M, $U \subset M$. Если $k \subset U$ — компактное множество, образ которого $(n-p)$-невидим, то k обладает свойством* (sd_p).

Доказательство. Пусть $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ — p-форма на M, G — открытое подмножество M, для которых выполнены условия 1) и 2). Докажем сначала, что поток T_ψ замкнут в G. Рассмотрим в B^n локально суммируемую форму $(\pi^{-1})^*\psi$ и обозначим через T соответствующий ей поток. Для любого цикла $c \in Z_p^f(\pi(G \cap U) \setminus \pi(k))$ найдется цепь $c_1 \in \mathrm{Ch}_{p+1}^f(B^n)$, такая что $c = bc_1$ (так как любой цикл в B^n гомологичен нулю). Тогда

$$\{\tilde{c}, T\} = \{\widetilde{bc_1}, T\} = \{\pi_*^{-1}(\widetilde{bc_1}), T_\psi\} = \{\widetilde{bg}, T_\psi\} = 0,$$

где $g = \pi_*^{-1} c_1$ (см. п. 1.3). Следовательно, форма $(\pi^{-1})^*\psi$ точна в $\pi(G \cap U) \setminus \pi(k)$. Из $(n-p)$-невидимости множества $\pi(k)$ следует, что поток T замкнут в $\pi(G \cap U)$ (см. [2, §4.4B]). Значит, $dT_\psi = 0$ в $G \cap U$ и поток T_ψ замкнут в G (в $G \setminus k$ он замкнут по условию).

Рассмотрим некоторый цикл $c \in R_p(G)$. Если мы докажем, что существует компактно гомологичный ему в G цикл $e \in R_p(G \setminus k)$, то из замкнутости потока T_ψ в G будет следовать, что $\{\tilde{c}, T_\psi\} = \{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$.

Выберем открытые множества U_1 и G_1, компактно содержащиеся в U и G соответственно, и такие, что $k \subset U_1$, $\operatorname{spt} c \subset G_1$. Рассмотрим достаточно мелкое полиэдральное разбиение F открытого множества $\pi(G \cap U)$ на полиэдры с ребрами, параллельными координатным осям. Диффеоморфизм π^{-1} переводит это разбиение в полиэдральное разбиение F_1 множества $G \cap U$. Если разбиение F было достаточно мелким, то существует разбиение E множества G, совпадающее с F_1 вблизи множества $G_1 \cap U_1$ (см. [12, с. 354–356]). Кроме того, мы можем считать, что все клетки разбиения E, пересекающиеся с $\operatorname{spt} c$, содержатся в G_1. Тогда по теореме Де Рама (см. [6, с. 157]) цикл c компактно гомологичен в G некоторому циклу e_1 разбиения E, причем $\operatorname{spt} e_1 \subset G_1$.

Далее, существуют $\delta > 0$ и отображение $s \colon B_\delta^n \times M \to M$ класса C^∞ такое, что

1) $s(0, x) = x$,

2) $s(\eta, y) = \pi^{-1}(\pi(y) + \eta)$, при $y \in U_1$, и

3) $s(\eta, y) = y$ в некоторой окрестности множества $M \setminus U$.

При этом для любого $\eta \in B^n_\delta$ отображение $s_\eta = s(\eta, \cdot): M \to M$ является диффеоморфизмом. (Конструкция отображения s содержится в книге Де Рама [6, §15]). Из формулы гомотопии (см. [6, 10]) сразу следует, что цикл $s_\eta(e_1)$ компактно гомологичен циклу e_1 в G при достаточно маленьком $|\eta|$ (таком, что $s(B^n_{|\eta|} \times G_1) \subset G$). Кроме того, при достаточно маленьком $|\eta|$ верно включение $s_\eta^{-1}(k) \subset U_1$ и $\pi(s_\eta(e_1) \cap k) = \pi(s_\eta(e_1) \cap U_1) \cap \pi(k) = (\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k)$. Но из $(n-p)$-невидимости множества $\pi(k)$ и из выбора полиэдрального разбиения следует, что $(\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k) = \varnothing$ для почти всех $\eta \in B^n_\delta$. Следовательно, существует $\overline{\eta} \in B^n_\delta$, для которого $s_{\overline{\eta}}(e_1) \cap k = \varnothing$. Положим $e := s_{\overline{\eta}}(e_1)$. Доказательство леммы закончено. •

Лемма 2. *Объединение конечного числа компактных множеств, обладающих свойством* (sd_p), *обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 обладают свойством (sd_p). Пусть $G \subset M$ — открытое множество и $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ — p-форма. Зная, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1 \cup K_2$, $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1 \cup K_2)$, и используя свойство (sd_p) множества K_2, заключаем, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1$, а $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1)$. Остается воспользоваться свойством (sd_p) для множества K_1. •

4.3. Теорема Гартогса–Розенталя. Назовем компактное подмножество K многообразия M r-почти невидимым, если K представимо в виде конечного объединения компактных множеств, содержащихся в носителях карт и имеющих r-невидимый в $\mathbb{R}^n$ образ.

Теорема. *Пусть* $0 < r < n$, $r' = \min\{r+1, n-r+1\}$, K — r'-*почти невидимое компактное подмножество многообразия* M. *Тогда любую* r-*форму, непрерывную на* K, *можно равномерно на* K *приблизить формами, гармоническими вблизи* K.

Доказательство. Пусть задана r-форма, непрерывная на K. Ее можно равномерно на K приблизить формой $\varphi \in \mathcal{D}_r(M)$. Рассмотрим разложение этой формы $\varphi = \mathcal{H}_1\varphi + \mathcal{H}_2\varphi + \mathcal{H}\varphi$. Форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична на всем многообразии. Форма $\mathcal{H}_1\varphi$ замкнута, а множество K по леммам 1 и 2 удовлетворяет условию (sd_{r-1}), поэтому из п. 4.1 следует, что $\mathcal{H}_1\varphi$ можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K. Аналогично из условия (sd_{n-r-1}), выполненного для множества K, следует, что замкнутую форму $*\mathcal{H}_2\varphi$ можно равномерно на K приблизить гармоническими. •

4.4. Об операторе dG. Пусть M — компактное риманово многообразие. В п. 4.1 мы воспользовались следующим утверждением:

Если μ — конечный q-ковекторный заряд на M ($\mu \in \mathcal{D}'_{n-q}$), то существует $(q+1)$-форма $\varphi \in L^1$, для которой $dG\mu = T_\varphi$.

Оператор G является классическим псевдодифференциальным оператором на M порядка -2 (см., например, [8, 13]). Следовательно, dG — псевдодифференциальный оператор порядка -1. Достаточно доказать сформулированное утверждение для заряда μ, сосредоточенного в некоторой координатной области U на M. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^n \to U$ — диффеоморфизм, определим оператор $A\colon \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n)$ равенством $A(T) = \pi^{-1}(dG(\pi T))$. Это псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ порядка -1. Обозначим его ядро через $a(x,y)$. Тогда

$$|a(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n+1}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \ x \neq y$$

(см. [14, с. 49, 326]). Следовательно, ковекторный заряд $\pi^{-1}(\mu)$ переводится оператором A в поток, представимый формой класса $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что $dG\mu = \pi\left(A\left(\pi^{-1}(\mu)\right)\right)$ в U. Таким образом, в U поток $dG\mu$ представим формой класса L^1_{loc}, но вне $\operatorname{spt}\mu$ поток $dG\mu$ соответствует C^∞-форме. Утверждение доказано.

§5. Заключительные замечания

5.1. Операторы G **и** $\mathcal{H}$. Вернемся к теореме разложения на компактном многообразии M (п. 1.6). Оператор $\mathcal{H}$ проектирует p-форму (поток) в пространство гармонических p-форм h_p. Пространство h_p конечномерно; положим $s = \dim h_p$. Рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами Δ, действующий на p-формы (см., например, [7]). Он имеет дискретный спектр $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_s > \lambda_{s+1} \geqslant \lambda_{s+2} \geqslant \ldots$ В пространстве квадратично суммируемых p-форм можно выбрать ортонормальный базис $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, состоящий из собственных форм оператора Δ. Мы считаем, что $\Delta\beta_k = \lambda_k\beta_k$. Таким образом, $\{\beta_k\}_{k=1}^s$ — базис пространства h_p. Ядро $h(x,y)$ оператора $\mathcal{H}$ есть двойная форма на $M \times M$, определенная равенством $h(x,y) = \sum_{k=1}^s \beta_k(x)\beta_k(y)$. Рассмотрим форму $\psi \in L^2_p$ и ее разложение в данном базисе, $\psi = \sum_{k=1}^\infty a_k\beta_k$. Тогда естественно

$$\mathcal{H}\psi = \sum_{k=1}^{s} a_k\beta_k, \qquad G\psi = \sum_{k=s+1}^{\infty} -(a_k)/(\lambda_k)\beta_k.$$

(Форма $G\psi$ определена, когда последний ряд сходится).

Отметим также, что $L^2_p = h_p + h^1_p + h^2_p$, где h^1_p и h^2_p — замыкания в L^2_p пространств точных и коточных форм соответственно. Слагаемые в этом разложении попарно ортогональны и являются инвариантными подпространствами оператора Δ. Если $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональные базисы из собственных форм оператора Δ в h_p^1 и h_p^2, то $\{*\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{*\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональные базисы в h_{n-p}^2 и h_{n-p}^1 соответственно. Кроме того, $\{\delta\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в h_{p-1}^2, а $\{d\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в h_{p+1}^1.

Оператор Грина существует и на некоторых некомпактных многообразиях. Например, в случае $M = \mathbb{R}^n$ роль оператора G выполняет ньютоновский потенциал. Пространство h_p $(0 < p < n)$ тривиально, и разложение Ходжа-Вейля-Кодаиры-Де Рама превращается в формулу Коши-Грина

$$c_n S = d\delta U^S + \delta d U^S$$

(см. [1]). Вопрос о наличии оператора Грина на данном некомпактном многообразии, по-видимому, является достаточно сложным.

О спектральном разложении оператора Лапласа-Бельтрами на p-формах на n-мерной сфере известно следующее. Вычислены собственные числа и их кратности (см., например, [15]). Некоторое описание собственных форм содержится в работе [16]. В качестве другого примера рассмотрим n-мерный тор. Введем на торе обычную систему координат. Оператор Лапласа-Бельтрами действует на формы покоэффициентно. Пространство h_p состоит из форм с постоянными коэффициентами, $\dim h_p = C_n^p$. Собственные числа оператора $-\Delta$ — квадраты длин векторов в $\mathbb{Z}^n$. Оператор Грина так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$, порождается сверткой с некоторым ядром $g(x)$. Функция $g(x)$ определяется своим рядом Фурье $\sum_{|m|>0} |m|^{-2} e^{2\pi i m\cdot x}$. О вопросах сходимости и свойствах ядра $g(x)$ см. [17, VII, §3].

5.2. О формах Био-Савара. Напомним, что каждой цепи $c \in \mathrm{Ch}_{n-q}^f$ мы сопоставили поток $\beta(c) = \tilde{c} - \mathcal{H}_1\tilde{c}$ (см. п. 1.5), который вне $\operatorname{spt} bc$ соответствует гармонической q-форме $\Phi(c)$. Таким образом, форма Био-Савара степени q определяется $(n-q)$-цепью, а ее „особенности“ заключены в границе этой цепи. Множество „особенностей“ определяет форму Био-Савара, вообще говоря, неоднозначно. Нетрудно видеть, что равенство $\beta(c) = \beta(c_1)$ равносильно равенству $c - c_1 = be$, $e \in \mathrm{Ch}_{n-q+1}^f$. Из совпадения границ bc и bc_1 следует лишь, что $\beta(c) = \beta(c_1) + \varphi$, где $\varphi \in h_q$. В случае, когда пространство h_q тривиально, как, например, в случае $M = \mathbb{R}^n$, форма Био-Савара полностью определяется множеством своих особенностей. Если при этом на многообразии определен оператор Грина, то $\Phi(c) = \mathcal{H}_2\tilde{c} = \delta d G(c) = (-1)^{q+1}\delta G(bc)$. Таким образом, в этом случае q-форма Био-Савара сопоставляется $(n-q-1)$-циклу. В обозначениях работы [1] для $M = \mathbb{R}^n$ мы получаем

$$\Phi(c) = (-1)^{q+1}\, \mathrm{BS}^{bc}, \quad \text{где } c \in \mathrm{Ch}_{n-q}^f.$$

Докажем, что определенные нами формы сохраняют следующее свойство форм Био–Савара в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, с. 125]).

Если $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-q}$, $e \in Z^f_q$ *и* $\operatorname{spt} e \cap \operatorname{spt} bc = \varnothing$, *то*

$$\int\limits_e \Phi(c) = \{\tilde{e}, \tilde{c}\}.$$

Доказательство. Индекс Кронекера $\{\tilde{e}, \tilde{c}\}$ определен, так как $be = 0$ и $\operatorname{spt} e \cap \operatorname{spt} bc = \varnothing$ (см. свойство 6 п. 1.3)). Поток $\mathcal{H}_2\tilde{c} + \mathcal{H}\tilde{c}$ принадлежит классу C^∞ в окрестности $\operatorname{spt} e$, так что определен индекс Кронекера пары потоков $\tilde{e}$ и $\mathcal{H}_2\tilde{c} + \mathcal{H}\tilde{c}$, $\{\tilde{e}, \mathcal{H}_2\tilde{c} + \mathcal{H}\tilde{c}\} = \int_e \Phi(c)$. Следовательно,

$$\{\tilde{e}, \tilde{c}\} - \int\limits_e \Phi(c) = \{\tilde{e}, \tilde{c} - \mathcal{H}_2\tilde{c} - \mathcal{H}\tilde{c}\} = \{\tilde{e}, \mathcal{H}_1\tilde{c}\}.$$

Поток $\mathcal{H}_1\tilde{c}$ гомологичен нулю, а поток $\tilde{e}$ имеет компактный носитель и замкнут. Таким образом, индекс Кронекера этой пары потоков равен нулю и требуемое равенство доказано. •

Зная ядра g_p и h операторов G и $\mathcal{H}$, мы без труда получим следующие формулы для форм Био–Савара и Кулона. Если $c \in \mathrm{Ch}^f_{n-p}$, $e \in \mathrm{Ch}^f_p$, то

$$\Phi(c)(y) = \int\limits_{bc} \delta_x *_x g_p(x, y) + \int\limits_c *_x h(x, y), \quad y \notin \operatorname{spt} bc;$$

$$\Psi(e)(y) = \int\limits_{be} *_x d_x *_x g_p(x, y) + \int\limits_e h(x, y), \quad y \notin \operatorname{spt} be.$$

Список литературы

[1] Преса Саге А., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 6, 104–152.

[2] Малинникова Е. В., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами. Конструктивный подход*, Алгебра и анализ **9** (1997), № 6, 156–196.

[3] Bagby T., Blanchet P., *Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds*, J. Anal. Math. **62** (1994), 47–76.

[4] Дагер С. Р., Преса С. А., *Об одном аналоге теоремы Рунге для гармонических дифференциальных форм*, Зап. науч. семин. ПОМИ **232** (1996), 109–117.

[5] Aronszajn N., Krzywicki A., Szarski J., *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds*, Ark. Mat. **4** (1962), 417–453.

[6] Рам Ж. де, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956.

[7] Warner F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Grad. Texts in Math., vol. 94, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.

[8] Уэллс Р., *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976.

[9] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.

[10] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.

[11] Хьюзмоллер Д., *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970.

[12] Манкрс Дж., *Элементарная дифференциальная топология*, Милнор Дж, Сташев Дж., Характеристические классы, Мир, М., 1979, сс. 270–358.

[13] Трев Ф., *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.* Т. 2. *Интегральные операторы Фурье*, Мир, М., 1984.

[14] Тейлор М., *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985.

[15] Iwasaki I., Katase K., *On the spectra of Laplace operator on* $\Lambda^*(S^n)$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), no. 4, 141–145.

[16] Paquet L., *Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles*, Bull. Sci. Math. (2) **105** (1981), no. 1, 85–112.

[17] Стейн И., Вейс Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

С.-Петербургский государственный университет
математико-механический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

Поступило 16 ноября 1998 г.