



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Martikainen, On probability of deviation of the sample mean from its median, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 130–136

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 26, 2025, 09:49:34



О ВЕРОЯТНОСТИ ОТКЛОНЕНИЯ ВЫБОРОЧНОГО
СРЕДНЕГО ОТ ЕГО МЕДИАНЫ

1. Всюду далее $\{X_n\}$ - последовательность независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $F(x)$, $\bar{X}_n = \sum_{k=1}^n X_k/n$, $m\bar{X}_n$ - некоторая медиана случайной величины \bar{X}_n , $\bar{X}_n = \bar{X}_n - m\bar{X}_n$, $\varepsilon > 0$. Нашей целью является получение одного асимптотического соотношения для $P(\bar{X}_n > \varepsilon)$ (предельные переходы, за исключением особо указанных, производятся при $n \rightarrow \infty$). Предназначается это соотношение прежде всего для изучения скоростей сходимости в одностороннем законе больших чисел. В п.3 рассматривается степенная скорость сходимости, в п.4 - экспоненциальная.

Скорость убывания вероятности $P(|\bar{X}_n| > \varepsilon)$ изучалась в работах [2] - [4] и многих других. Скорость убывания вероятности $P(\bar{X}_n > \varepsilon)$ изучена в меньшей степени (см. [6], [7] и библиографию в [7]), причем, главным образом, при некоторых дополнительных условиях на левый хвост распределения X_1 , позволяющих применить соответствующим образом модифицированную двустороннюю технику (среди немногих исключений работы [5] и [7]).

Поэтому в основу данной работы ставится принцип: не накладывать априорных условий на левый хвост распределения X_1 . На правый хвост в п.2 накладываются весьма жесткие ограничения. Их можно ослабить, но в этом нет необходимости (в рамках этой заметки), поскольку, как это будет видно в п.3 и 4, мы можем раздельно изучать распределения, целиком сосредоточенные на одной из хвостов полуосей; для случая $X_1 \leq 0$ применять результаты п.2, для случая $X_1 \geq 0$ применять известные, в сущности двусторонние, результаты. Это позволяет в п.3 и 4 получать необходимые и достаточные условия для степенной и экспоненциальной скоростей сходимости без априорных предположений о распределении X_1 .

2. Пусть a и δ - две положительные постоянные, $v_n \equiv v_n(a) \equiv v_n(a, \delta)$ наименьшее решение неравенств

$$v_n \geq \delta, \int_{-v_n}^{-\delta n} |x| dF(x) \leq a.$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $X_1 \leq 0$ п.н., $EX_1 = -\infty$, $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда для любых $b > 0, 0 < \varepsilon < a < \tau, \delta > 0$

$$\exp(-n\tau/v_n(a))(1+o(1)) \leq P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq \exp(-n(\varepsilon-b+o(1))/v_n(b)).$$

Для доказательства предлагается проследить шаг за шагом доказательство теоремы I из [8].

СЛЕДСТВИЕ I. В предположениях теоремы I для любого $\varepsilon > 0$ и всех $n > n(\varepsilon)$

$$P(\bar{X}_n \geq 4\varepsilon) \leq \exp(-n\varepsilon/v_n(\varepsilon/2)) \leq P(\bar{X}_n \geq \varepsilon/4)(1+o(1)).$$

Предположим, что $\psi(n)$ - положительная неубывающая функция, $\psi(n) \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X_1 \leq 0$ п.н., $EX_1 = -\infty$. Для того, чтобы

$$P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq e^{-\psi(n)}(1+o(1)) \quad (\forall \varepsilon > 0), \quad (1)$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-n}^{-n/\psi(n)} |x| dF(x) = o(1), \quad (2)$$

$$nP(X_1 < -n) = o(1). \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях теоремы 2 из соотношения (1) следует

$$P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) = o(e^{-\sigma\psi(n)})$$

для любых $\sigma > 0, \varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Если имеет место соотношение (1), то выполняется (3). Ясно, что из (3) вытекает (7) для любых $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, что позволяет заменить в (1) функцию $\psi(n)$ на $\psi(n) + C$, где C - произвольная постоянная. Следствие 2 доказано.

Если выполнены условия теоремы 2 с заменой $EX_1 = -\infty$ на $EX_1 > -\infty$, то необходимую информацию о поведении $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon)$ можно получить из одного результата В.В.Петрова [1]. Обозначим

$$R(h) = Ee^{hX_1}, m(h) = EX_1 e^{hX_1}/R(h), \sigma^2(h) = \frac{dm(h)}{dh}. \text{ Пусть } X_1$$

- невырожденная случайная величина. Тогда уравнение $m(h) = \varepsilon$ имеет единственное положительное решение h_ε , если

$0 < \varepsilon < \text{ess sup } X_1$. Согласно [1], равномерно по ε из любого замкнутого промежутка, целиком лежащего в области $0 < \varepsilon < \text{ess sup } X_1$,

$$P(\bar{X}_n - E\bar{X}_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{\beta\sqrt{n}} e^{-\alpha n} (1 + o(1)), \quad (4)$$

где *) $\alpha = \varepsilon h_\varepsilon - \log R(h_\varepsilon)$, $\beta = \sqrt{2\pi} \sigma(h_\varepsilon)$ в случае, когда X_1 имеет перерешетчатое распределение, и $\beta = \sqrt{2\pi} \sigma(h_\varepsilon) \cdot (1 - e^{-Nh_\varepsilon})/H$ в случае, когда X_1 имеет решетчатое распределение с максимальным шагом H . В последнем случае $1 + o(1)$ в (4) можно заменить на $1 + O(1/n)$.

Если $\limsup \psi(n)/n > 0$, то выполнение (2) невозможно. Отсюда получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X_1 \leq 0$ п.н. Если $\limsup \psi(n)/n > 0$ и выполняется соотношение (I) для любого $\varepsilon > 0$, то $E X_1 > -\infty$ и, следовательно, имеет место (4) в области $0 < \varepsilon < \text{ess sup } X_1 - E X_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

ЛЕММА I. Если $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 0$.

Это утверждение доказано фактически в [8] (см. доказательство лемм 3, 3' и следствия I).

Из следствия I и леммы I вытекает, что условия

$$\exp(-n\varepsilon/v_n(\varepsilon/2)) \leq e^{-\psi(n)} (1 + o(1)) \quad (\forall \varepsilon > 0), \quad (5)$$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} 0 \quad (6)$$

являются необходимыми и достаточными для выполнения (I). Ясно, что (5) эквивалентно условию $v_n(\varepsilon/2) \leq n\varepsilon/(\psi(n) + o(1))$, которое, в силу определения $v_n(\varepsilon/2)$, эквивалентно условию

$$\int_{-\delta n}^{-n\varepsilon/(\psi(n) + o(1))} |x| dF(x) \leq \varepsilon/2 \quad (\forall \varepsilon > 0). \quad (7)$$

Из (6) с помощью критерия вырожденной сходимости получаем (3), так что

$$\int_{-n}^{-\sigma n} |x| dF(x) \leq nP(X_1 < -\sigma n) \rightarrow 0$$

для любого $\sigma \in (0, 1)$. Следовательно,

$$\int_{-n}^{-n\varepsilon/\psi(n)} |x| dF(x) - \int_{-n}^{-n\varepsilon/(\psi(n) + o(1))} |x| dF(x) = o(1) \quad (8)$$

*) Если $E|X_1| < \infty$, то $E\bar{X}_n - m\bar{X}_n = o(1)$.

для любых положительных ε и ε_1 . Поэтому (7) эквивалентно условию (2). Эквивалентность (3) и (6) хорошо известна. Теорема 2 доказана.

3. Обозначим \mathcal{H}_γ класс функций f , заданных на положительной полуоси и удовлетворяющих условиям: $f(x) > 0$ для любого x , $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; если $\{X_n\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин, таких, что $nP(X_1 > n) = o(f(n))$, то $P(\bar{X}_n > \varepsilon) = o(f(n))$ для любого $\varepsilon > 0$.

Баум и Кац показали, [2], что $x^t \in \mathcal{H}_\gamma$ при $t \leq 0$. Позднее Хейди и Рохатги [3] показали, что $x^t L(x) \in \mathcal{H}_\gamma$ при $t \leq 0$, какова бы ни была невозрастающая положительная медленно меняющаяся на бесконечности функция $L(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in \mathcal{H}_\gamma$. Для того чтобы

$$P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) = o(f(n)) \quad (9)$$

для любого $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3), (10), (11), где

$$nP(X_1 > n) = o(f(n)) \quad (10)$$

и

$$\int_{-\infty}^0 |x| dF(x) < \infty \quad \text{или} \quad \int_{-n}^{-n/\ln(1/f(n))} |x| dF(x) = o(1). \quad (11)$$

Ранее, Н.Н.Амосовой [6] было показано, что (9) имеет место при $f(n) = n^t L(n)$ в предположении, что $E|X_1| < \infty$; на функцию $L(n)$ накладывались те же условия, что и в [3] (см. выше), $t \leq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f \in \mathcal{H}_\gamma$. Если $nP(X_1 > n) = o(f(n))$, $nP(X_1 \leq -n/\ln(1/f(n))) = o(1)$, то имеет место соотношение

(9) для любого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4 вытекает из неравенства

$$\int_{-n}^{-n/\ln(1/f(n))} |x| dF(x) \leq nP(X_1 \leq -n/\ln(1/f(n))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $X_n^+(c) = X_n I(X_n \geq -c)$, $X_n^+ = X_n^+(0)$, $X_n^- = X_n^+ - X_n$, $\varepsilon > 0$. Достаточность. Пусть вначале $EX_1^- = \infty$. По теореме 2 и следствию 2

$$P\left(-\sum_{k=1}^n X_k^- + n\left(\sum_{k=1}^n X_k^-\right) > \varepsilon n/2\right) = o(f(n)). \quad (12)$$

В силу условия (I0), определения класса \mathcal{H}_γ и неравенств симметризации имеем

$$P\left(\sum_{k=1}^n X_k^+ - m\left(\sum_{k=1}^n X_k^+\right) \geq \varepsilon n/2\right) = o(f(n)).$$

Отсюда

$$P(\bar{X}_n + m\left(\sum_{k=1}^n X_k^-/n\right) - m\left(\sum_{k=1}^n X_k^+/n\right) \geq \varepsilon n) = o(f(n)). \quad (I3)$$

В силу условий (3), (I0) и критерия вырожденной сходимости

$$m\left(\sum_{k=1}^n X_k^-/n\right) = -\int_0^0 x dF(x) + o(1), \quad (I4)$$

$$m\left(\sum_{k=1}^n X_k^+/n\right) = \int_0^{n^-} x dF(x) + o(1), \quad (I5)$$

$$m\bar{X}_n - \int_{-n}^n x dF(x) = o(1). \quad (I6)$$

Подставляя эти соотношения в (I3), получаем (9).

Пусть теперь $EX_1^- < \infty$. В силу критерия вырожденной сходимости вновь имеем (I6). Поэтому

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) &\leq P\left(\sum_{k=1}^n X_k^+(c)/n - \int_{-n}^n x dF(x) \geq \varepsilon/2\right) \\ &\leq P\left(\sum_{k=1}^n X_k^+(c)/n - \int_{-n}^n x dF(x) \geq \varepsilon/4\right), \end{aligned}$$

если c достаточно велико. Применяя определение \mathcal{H}_γ к последовательности, полученной симметризацией $\{X_n^+(c)\}$, получаем (9).

Необходимость. Критерий вырожденной сходимости дает соотношение (I6). Отсюда $m\bar{X}_n = o(n)$ и $m\bar{X}_n - m\bar{X}_{n-1} = o(1)$, так что

$$P(\bar{X}_n - m\left(\sum_{k=1}^{n-1} X_k/n\right) \geq \varepsilon) = o(f(n))$$

для любого $\varepsilon > 0$. Применяя неравенство Бонферрони аналогично [7], получаем (I0). В силу определения \mathcal{H}_γ и с помощью неравенств симметризации получаем

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k^+ - m\left(\sum_{k=1}^n X_k^+\right)\right| \geq \varepsilon n/2\right) = o(f(n)). \quad (I7)$$

По лемме I получаем (6). В сочетании с (I7) и критерием вырожденной сходимости получаем соотношения (I4)-(I6), что позволяет от (9) и (I7) и перейти к (I2). Привлекая теорему 2, получаем (II). Теорема 3 доказана.

4. Экспоненциальная скорость убывания вероятностей больших отклонений рассматриваемого вида изучалась в [4] и [5]. В частности, В.В.Петров и И.В.Широкова получили следующий результат. Пусть X_n независимы и одинаково распределены. Тогда равносильны условия

(A) существуют $\rho \in (0, 1), \varepsilon > 0$ и $C > 0$, такие, что

$$P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq C\rho^n$$

(B) $E e^{tX_1} < \infty$ для некоторого $t > 0$.

Следующий результат примыкает к результатам работ [4] и [5].

ТЕОРЕМА 4. Следующие условия равносильны:

(C) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\rho \in (0, 1)$ и $C > 0$, такие, что $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq C\rho^n$,

(D) существуют $\rho \in (0, 1), \varepsilon > 0$ и $C > 0$, такие, что $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq C\rho^n$,

(E) $E|X_1| < \infty, E e^{tX_1} < \infty$ для некоторого $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Если выполнено (C), то имеет место (D). Доказательство импликации (D) \Rightarrow (E) аналогично доказательству необходимости в теореме 3 (см. также п.5). Покажем, что (E) \Rightarrow (C). Используя критерий вырожденной сходимости, получаем

$$P(\bar{X}_n \geq 2\varepsilon) \leq P(\bar{X}_n - E\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq e^{-\varepsilon nh} (E e^{h(X_1 - EX_1)})^n = (\rho(h))^n$$

для любого $h > 0$ и всех д.б. n , причем, если $P(X_1 - EX_1) < 1$, то $\rho(h)$ имеет единственный минимум на положительной полуоси - пусть в точке h_ε . Тогда $\rho(h_\varepsilon) < \rho(0) = 1$

5. Этот параграф содержит замечание, касающееся в целом возможности замены в результатах п.2 и 3 фрагмента " $\forall \varepsilon > 0$ " на " $\exists \varepsilon > 0$ ".

Ниже запись " $A: B \Rightarrow C; D \Rightarrow E; \dots$ " означает, что в утверждении A фрагмент B можно заменить на C, фрагмент D - на E и т.д.; если произвести все указанные замены, то полученное утверждение будет верным. Его доказательство производится по той же схеме, что и исходное, и здесь опускается.

СЛЕДСТВИЕ I: $P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ для $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: P(\bar{X}_n \geq \varepsilon) \leq \delta$ для любого $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ для

некоторого $\varepsilon > 0$

ТЕОРЕМА 2: $(\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0); o(1) \Rightarrow = O(1)$ (в условиях (2) и (3)).

СЛЕДСТВИЕ 2: для любых $\sigma > 0, \varepsilon > 0 \Rightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\sigma > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3: для любого $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 3: для любого $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$;

$nP(X_1 > n) = o(f(n)) \Rightarrow nP(X_1 > n) = O(f(n)); o(1) \Rightarrow O(1)$ (в условии (II)).

СЛЕДСТВИЕ 4: $o \Rightarrow 0; o \Rightarrow 0$; для любого $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что замены, сделанные в формулировке следствия 3, усиливают ее.

Литература

1. Петров В.В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. - Теория вероятн. и ее примен., 1965, т.10, № 2, с.310-322.
2. Baum L.E., Katz M., Convergence rates in the law of large numbers. - Trans.Amer.Math.Soc., 1965, v. 120, N 1, p.108-123.
3. Heide C.C., Rohatgi V.K., A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers. - Proc.Camb.Phil.Soc., 1967, v. 63, N 1, p. 73-82.
4. Baum L.E., Katz M., Read R.R., Exponential convergence rates for the law of large numbers. - Trans.Amer.Math.Soc., 1962, v. 102, N 2, p. 187-199.
5. Петров В.В., Широкова И.Н. Об экспоненциальной скорости сходимости в законе больших чисел. - Вестн.Ленингр. ун-та, 1973, № 7, с. 155-157.
6. Амосова Н.Н. К вопросу о скорости сходимости в одностороннем законе больших чисел. - Изв.вузов, 1978, № 10, с.3-6.
7. Мартикайнен А.И. Односторонние варианты закона больших чисел: усиленный закон и скорости сходимости. - В кн.: "XVI Всесоюзная шк.-колл. по теории вероятн. и матем. статист.", Бакуриани, 26.02-5.03.1982, Материалы". Тбилиси, "Мецниереба", 1982, с.48-54.
8. Мартикайнен А.И. Односторонние варианты сильных предельных теорем. - Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 1, с. 45-61.