

УДК 519.17

ББК 22.176

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ ДВУХ АГЕНТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

ЯДЗИН ЧЕН

Университет Циндао

Школа математики и статистики

266071, Китай, Циндао, Нигсия роад, 308

ВЛАДИМИР В. МАЗАЛОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики-процессов управления

199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

ХУНВЕЙ ГАО

Университет Циндао

Школа математики и статистики

266071, Китай, Циндао, Нигсия роад, 308

e-mail: vlmazalov@yandex.ru

Рассматривается модель динамики мнений, в которой доверие агентов друг к другу является неизвестным и моделируется с помощью случайных величин с некоторыми вероятностными распределениями. Кроме того существует игрок, чья

цель – поддерживать мнение агентов на определенном уровне. Вначале оптимальное управление находится в явном виде при условии известных значений коэффициентов доверия, а затем это управление применяется на каждом шаге при получении значений случайных величин. Проведены компьютерные эксперименты.

Ключевые слова: модель динамики мнений, линейная динамика, управление, неопределенность в уровне доверия, адаптивное управление.

Поступила в редакцию: 03.12.24 *После доработки:* 09.02.25 *Принята к публикации:* 06.03.25

1. Введение

С ростом социальных сетей усилился интерес к динамике формирования и развития персональных мнений. Большое количество математических моделей было разработано и проанализировано для раскрытия основных моментов динамики мнений в этих сетях. Понимание формирования общественного мнения не только важно, но и вызывает вопросы о возможности манипулирования этим процессом. Исследование динамики мнений – это междисциплинарное направление, связывающее социальные науки, математику, информатику и другие релевантные дисциплины.

С момента введения French и John [7] ориентированных графов и силы влияния агентов друг на друга для изучения динамики групповых мнений в 1956 году было сделан значительный прогресс в этой области. В 1974 году De Groot [4] представил математическую модель для исследования процесса консенсуса в динамике мнений в коллективе, которая теперь считается одной из классических моделей в теории динамики мнений. Модель De Groot, основанная на линейной комбинации индивидуальных мнений, предполагает, что коллектив в конечном итоге достигнет консенсуса через итерационный процесс.

Friedkin и Johnsen [8] расширили эту модель, внося в нее предубеждения индивидуумов при формировании мнений. Они предложили модель, где обновление мнения является взвешенным средним собственного упорства и мнения соседей в социальной сети.

Ограниченная модель доверия – еще один ключевой подход в области динамики мнений, учитывающий психологические факторы в

правилах эволюции мнения. В этих моделях агенты обмениваются мнениями и обновляют их только с теми агентами, чьи взгляды находятся в определенном диапазоне доверия. Модели Deffuan - Weisbuch (DW) [5] и Hegselmann - Krause (HK) [12] являются двумя представительными моделями ограниченного доверия. Обе модели основаны на идее повторяющегося усреднения в рамках ограниченного доверия, с различными механизмами развития: в модели DW из группы случайным образом выбираются два индивида, которые, исходя из ограниченного доверия, решают, обмениваться ли мнениями, и если они это делают, их мнения изменяются в соответствии с заданным выражением динамики мнений на следующем шаге. В модели HK каждый индивид стремится к среднему мнению всех индивидуумов в пределах их доверия.

За последние десять лет были обсуждены различные модели, такие как модель De Groot-Friedkin [14], модель непрерывного мнения и дискретного действия (CODA) [18], модель информированного агента [10] и модель марковского агента [2], с подробными обзорами представленными в [3,6,11].

Модели управления общественным мнением в социальных сетях также вызвали значительный интерес. Hegselmann [13] предложил различать нестратегических агентов и стратегических игроков, причем последние имели целевые предпочтения мнений для первых. Фундаментальные стратегические вопросы, включая дизайн управления и выбор цели, были исследованы в [13], предлагая оптимальные стратегии для управления мнением. Varma и др. [21] представили модель, в которой маркетологи влияют на мнения противоборствующих групп (конформистов и контрарианцев), сосредоточившись на распределении бюджета для согласования мнений с желаемыми результатами. Veetaseveera и др. [22] представили игровую модель динамики мнений, учитывающую влияние как агентов, так и конкурирующих маркетологов, дополненную анализом равновесия. Jiang и др. [15] предложили похожую модель, в которой контроль внешних игроков влияет на мнения агентов, при этом каждый игрок стремится минимизировать издержки контроля, достигая при этом консенсуса. Gentil et al. [9] включили аффинные входные данные управления для игроков в стандартную модель динамики мнений с противоречи-

выми целевыми назначениями. В литературе элементы управления игроков рассматриваются как внешние влияния на мнения агентов, аналогичные маркетологам, стремящимся повлиять на мнения клиентов с помощью рекламы в СМИ или кампаний [16,18-20,23]. Целью управления является согласование окончательных мнений с идеалом при минимизации затрат.

Традиционные методы управления динамикой мнений предполагают, что параметры модели фиксированы и известны агентам и игрокам. Эти методы, хотя и упрощают проектирование системы, не обладают гибкостью и точностью, особенно в сложных, изменяющихся средах. В реальных ситуациях параметры модели могут быть не известны игрокам, а также могут меняться случайным образом.

В данной статье рассматривается модель ДеГроота управления динамикой мнений в случае, когда сила влияния агентов друг на друга не известна игроку и оценивается в результате процесса проведения переговоров. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением модели для двух агентов и одного игрока.

Статья структурирована следующим образом: в разделе 2 приводится классическая модель динамики мнений, в разделе 3 находится аналитическое решение в модели динамики мнений двух агентов постоянным управлением с полной информацией и затем приводится алгоритм нахождения адаптивного управления в модели с неполной информацией. Затем в разделе 4 приводятся результаты компьютерных экспериментов построения адаптивного управления для различных сценариев со случайно изменяющимися во времени параметрами модели. В Заключении даны перспективы дальнейших исследований.

2. Модель динамики мнений и консенсус

Рассмотрим модель динамики мнений De Groot для n агентов. Центральную роль в ней играет матрица доверия агентов друг к другу $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n$, где a_{ij} степень доверия агента i к агенту j . Предполагается, что матрица A стохастическая, т.е. $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$ и $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i$.

Обозначим $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ набор мнений всех агентов в момент t . Тогда на следующем этапе переговоров $t+1$ мнения агентов

изменяться с учетом доверия их друг к другу:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), t = 0, 1, \dots \quad \mathbf{x}(0) = x_0.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0), t = 0, 1, \dots$$

и предел этой последовательности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\infty) = (x, x, \dots, x)$$

дает консенсус в переговорах.

Нас будет интересовать здесь задача управления мнениями агентов в условиях неопределенности, когда значения части значений и даже всех значений матрицы доверия неизвестны игроку. В этом случае оптимальное управление должно быть адаптивным и основываться на результатах наблюдений в процессе управления динамикой мнений.

Ограничимся рассмотрением здесь модели динамики мнений для двух агентов. Матрица доверия для агентов 1 и 2 выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

где величины $p, 1-p$ степень доверия агента 1 самому себе и агенту 2, а $q, 1-q$ соответственно степень доверия агента 2 агенту 1 и самому себе; $p, q \in [0, 1]$.

Начальные мнения двух агентов обозначены через $\mathbf{x}(0) = (x_1^0, x_2^0)^\top$. Каждый агент обновляет свое мнение в соответствии с приведенными ниже уравнениями:

$$x_1(t+1) = px_1(t) + (1-p)x_2(t),$$

$$x_2(t+1) = qx_1(t) + (1-q)x_2(t),$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top$.

Собственные значения матрицы \mathbf{A} равны 1 и $p - q$ с $|p - q| < 1$, а соответствующие собственные векторы имеют вид $\eta_1 = (1, 1)^\top$ и $\eta_2 = (p - 1, q)^\top$. Мы рассмотрим нетривиальный случай $|p - q| < 1$.

Матрицу \mathbf{A} можно диагонализировать следующим образом:

$$\mathbf{A} = T\Lambda T^{-1},$$

где

$$T = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & p - 1 \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{q - p + 1} \begin{pmatrix} q & 1 - p \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p - q \end{pmatrix}.$$

Эта диагонализация дает:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0) = T\Lambda^t T^{-1} \mathbf{x}(0) \\ &= \frac{1}{q - p + 1} \begin{pmatrix} qx_1^0 + (1 - p)x_2^0 + (p - 1)(p - q)^t (x_2^0 - x_1^0) \\ qx_1^0 + (1 - p)x_2^0 + q(p - q)^t (x_2^0 - x_1^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При $|p - q| < 1$ и $t \rightarrow \infty$, $(p - q)^t \rightarrow 0$, что приводит $\mathbf{x}(t)$ к вектору стационарного состояния:

$$\mathbf{x}(\infty) = \frac{1}{q - p + 1} \begin{pmatrix} qx_1^0 + (1 - p)x_2^0 \\ qx_1^0 + (1 - p)x_2^0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Вектор стационарного состояния $\mathbf{x}(\infty)$ показывает предельное состояние системы. В терминах теории переговоров это состояние дает консенсус мнений агентов.

3. Модель управляемой динамики мнений

В этом разделе мы исследуем сценарий, в котором есть внешний участник (игрок), который может влиять на мнение агента 1, с целью поддерживать мнение агентов на уровне s . Вначале, предположим, что значения p и q известны игроку.

3.1. Модель динамики мнений с фиксированными p и q

В этом разделе представлена модель динамики мнений с фиксированными значениями p и q . Матрица влияния между двумя агентами определена следующим образом:

$$\mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} p + u & 1 - p - u \\ q & 1 - q \end{pmatrix},$$

где $u = \{u(t) : u(t) \in [-p, 1 - p]\}$ – управляющее воздействие игрока на первого агента, и соответствующее динамическое уравнение состояния агентов имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t + 1) &= px_1(t) + (1 - p)x_2(t) + u(t)(x_1(t) - x_2(t)), \\ x_2(t + 1) &= qx_1(t) + (1 - q)x_2(t), \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Этот механизм управления отличается от традиционного внешнего управления. Здесь предполагается, что внешний игрок влияет на степень доверия агента 1 к агенту 2 для достижения своих целей.

Предположим, что целевая функция игрока имеет вид

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [(x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \gamma u^2(t)(x_1(t) - x_2(t))^2]. \tag{3.2}$$

Здесь t обозначает время, $0 < \delta \leq 1$ – дисконтирующий фактор, $\gamma > 0$ представляет собой затраты игрока, а s – целевое значение, к которому игрок хочет привести мнение агентов.

Для решения задачи оптимального управления (3.1)-(3.2) можно использовать теорию динамического программирования. Уравнение Беллмана для оптимального выигрыша

$$V(x_1, x_2) = \min_{u(t)} J(u)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} V(x_1(t), x_2(t)) &= (x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \\ &\quad \inf_{u(t)} [\gamma u(t)^2 (x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta V(x_1(t + 1), x_2(t + 1))], \end{aligned}$$

где $x_1(t + 1)$ и $x_2(t + 1)$ удовлетворяют (3.1).

Здесь мы поступим следующим образом. Предположим, что управление $u(t)$ постоянно. В этом случае значение оптимального управления и минимальное значение выигрыша можно найти в аналитическом виде.

Зафиксируем значение управления u . Находя собственные значения и собственные векторы матрицы A_u , мы можем выразить мнения агентов в момент t :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_u^t \mathbf{x}(0) = \frac{1}{q - p - u + 1} \cdot \begin{pmatrix} qx_1^0 + (1 - p - u)x_2^0 + (p + u - 1)(p - q + u)^t(x_2^0 - x_1^0) \\ qx_1^0 + (1 - p - u)x_2^0 + q(p - q + u)^t(x_2^0 - x_1^0) \end{pmatrix},$$

или

$$x_1(t) = am + an(p + u - 1)b^t, \quad x_2(t) = am + anqb^t, \quad (3.3)$$

где

$$a = \frac{1}{q - p - u + 1}, \quad m = qx_1^0 + (1 - p - u)x_2^0, \\ b = p - q + u, \quad n = x_2^0 - x_1^0.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A}_u равны 1 и $p + u - q$ при условии $|p + u - q| < 1$. Следовательно, мнения агентов сходятся к состоянию консенсуса x^* :

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{qx_1^0 + (1 - p - u)x_2^0}{q - p - u + 1}, \quad i = 1, 2,$$

причем

$$x_1(t) - x_2(t) = (p - q + u)^t(x_1^0 - x_2^0).$$

Терминальное состояние мнений двух агентов очевидно зависит от постоянного управления игрока u , ограниченного $-p < u < 1 - p$, и является взвешенным средним значением x_1^0 и x_2^0 . Для определения оптимального управления нужно минимизировать (3.2).

Для получения оптимального управления подставим $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из (3.3) в (3.2) и продифференцируем по u . Используя свойство геометрической прогрессии:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{1}{1 - \delta}, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} b^t = \frac{b}{1 - \delta b}, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} b^{2t} = \frac{b^2}{1 - \delta b^2},$$

после упрощения, получим:

$$\begin{aligned}
J(u, p, q, x_1^0, x_2^0) &= \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [(x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2] \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [x_1^2(t) + x_2^2(t) - 2s(x_1(t) + x_2(t)) + 2s^2 + \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2] \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [2a^2 m^2 + 2a^2 b^t m n (p + u - 1 + q) + a^2 b^{2t} n^2 [(p + u - 1)^2 + q^2] \\
&\quad - 2s [2am + ab^t n (p + u - 1 + q)] + 2s^2 + \gamma u^2 (-b^t n)^2] \\
&= \frac{2(am - s)^2}{1 - \delta} + \frac{2an(am - s)(p + u - 1 + q)}{1 - \delta b} \\
&\quad + \frac{n^2 [a^2 (p + u - 1)^2 + a^2 q^2 + \gamma u^2]}{1 - \delta b^2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из условия $\frac{dJ(u)}{du} = 0$, мы можем найти оптимальное управление u^* для фиксированных значений (p, q, x_1^0, x_2^0) .

3.2. Модель динамики мнений с неопределенностью

Для анализа влияния неопределенности значений доверия агентов друг к другу p и q на оптимальное управление и результат консенсуса рассмотрим три различных сценария: во-первых, когда p является случайной переменной с известным распределением вероятностей, и q – фиксированной константой; во-вторых, когда p и q являются независимыми случайными величинами; и в-третьих, когда эти случайные величины коррелированы.

Рассмотрим динамику (3.1), предполагая p и q случайными величинами с известным распределением вероятностей $F(p, q)$, $(p, q) \in [0, 1]^2$. Тогда на каждом шаге t процесса будут получаться различные значения случайных наблюдений $p_t, q_t, t = 0, 1, 2, \dots$. В данном случае целевая функция игрока имеет вид

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \mathbb{E}_{p_t, q_t} [(x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \gamma u^2(t) (x_1(t) - x_2(t))^2],$$

где $\mathbb{E}_{p, q}$ обозначает математическое ожидание по случайным переменным p и q .

Тогда уравнение оптимальности для оптимального ожидаемого выигрыша (функция Беллмана) можно записать в виде

$$V(x_1(t), x_2(t)) = (x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \inf_u \{ \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} V(x_1(t+1), x_2(t+1)) \}, \quad t = 0, 1, \dots$$

В предыдущем разделе мы нашли выигрыш игрока при оптимальном (постоянном) управлении в аналитическом виде. Заметим, что выигрыш игрока $J(u) = J(u, p, q, x_1, x_2)$ зависит от входных данных (x_1, x_2, p, q) .

Для нахождения оптимального управления на шаге t вместо задачи

$$\inf_u \{ \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} V(x_1(t+1), x_2(t+1)) \},$$

будем использовать аппроксимацию

$$\inf_u \{ \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} J(u, p, q, x_1(t), x_2(t)) \},$$

где

$$\mathbb{E}_{p,q} J = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2(am - s)^2}{1 - \delta} + \frac{2an(am - s)(p + u - 1 + q)}{1 - \delta b} + \frac{n^2 [a^2(p + u - 1)^2 + a^2q^2 + \gamma u^2]}{1 - \delta b^2} \right) dF(p, q),$$

и

$$a = \frac{1}{q - p - u + 1}, \quad m = qx_1(t) + (1 - p - u)x_2(t), \\ b = p - q + u, \quad n = x_2(t) - x_1(t).$$

Заметим, что целевая функция $J(u, p, q, x_1, x_2)$ является выпуклой функцией относительно управления u , что позволяет использовать методы выпуклой оптимизации для нахождения глобального оптимального решения на интервале $[-p, 1 - p]$.

Таким образом, процесс адаптивного управления системой (3.1) можно описать следующим образом. Вначале задаются значения начальных мнений агентов $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, целевое значение игрока s и дисконтирующий фактор δ .

Генерируются случайные значения параметров p_0 и q_0 . В соответствии с динамикой (3.1) ожидаемые значения мнений на следующем шаге будут равны

$$\begin{aligned} x_1(1) &= p_0 x_1(0) + (1 - p_0) x_2(0) + u(0)(x_1(0) - x_2(0)), \\ x_2(1) &= q_0 x_1(0) + (1 - q_0) x_2(0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Находится значение адаптивного управления $u(0)$ как решение оптимизационной задачи

$$\gamma u^2(x_1(0) - x_2(0))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} J(u, p, q, x_1(0), x_2(0)) \rightarrow \inf_u,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p,q} J &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2(am - s)^2}{1 - \delta} + \frac{2an(am - s)(p + u - 1 + q)}{1 - \delta b} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 [a^2(p + u - 1)^2 + a^2 q^2 + \gamma u^2]}{1 - \delta b^2} \right) dF(p, q). \end{aligned}$$

Найденное $u(0)$ подставляем в (3.5), система переходит в состояние $x_1(1), x_2(1)$.

Аналогично, на шаге t система находится в состоянии $(x_1(t), x_2(t))$, генерируются случайные величины p_t и q_t . Ожидаемые значения мнений на следующем шаге будут равны

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= p_t x_1(t) + (1 - p_t) x_2(t) + u(t)(x_1(t) - x_2(t)), \\ x_2(t+1) &= q_t x_1(t) + (1 - q_t) x_2(t). \end{aligned}$$

Находится значение адаптивного управления $u(t)$ как решение оптимизационной задачи

$$\gamma u^2(x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} J(u, p, q, x_1(t), x_2(t)) \rightarrow \inf_u,$$

и система переходит в состояние $x_1(t+1), x_2(t+1)$.

Процесс адаптивного управления в задаче с неполной информацией описан с помощью следующего алгоритма (см. Алгоритм 1).

Соответствующие примеры численных симуляций и результаты будут представлены в следующем разделе.

Algorithm 1 Алгоритм адаптивного управления в модели динамики мнений

1: **Input:** начальные данные $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, цель игрока s , дисконт фактор δ , параметр перед управлением γ , и временной горизонт T . Задается число экспериментов N .

2: **Define:**

3: Динамика:

$$f(x_1, x_2, u, p, q) = p \cdot x_1 + (1 - p) \cdot x_2 + u \cdot (x_1 - x_2), \\ q \cdot x_1 + (1 - q) \cdot x_2.$$

4: Целевая функция:

$$\sum_{t=0}^T \delta^t [(x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 + \gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2]$$

5: Адаптивное управление:

6: Определяется `cost_function(u)`

$$\gamma u^2 (x_1(t) - x_2(t))^2 + \delta \mathbb{E}_{p,q} J(u, p, q, x_1(t), x_2(t))$$

7: Используется программа для нахождения минимума (`cost_function`, `bounds=[-p, 1-p]`, `method='SLSQP'`) для нахождения оптимального u .

8: **for** $sim = 1$ to N **do**

9: Задаются начальные условия x_1 и x_2 .

10: **for** $t = 0$ in range T **do**

11: Генерируются (p, q) с совместным распределением CDF $F(p, q)$

12: Вычисляется $u^* = \text{optimize_control}(x_1, x_2, s, \delta, \gamma, p, q, T)$

13: Обновляются состояния : $(x_1, x_2) = \text{dynamics}(x_1, x_2, u^*, p, q)$

14: Вычисляются затраты на данном шаге

15: **end for**

16: Запоминаются терминальные состояния и общие затраты.

17: **end for**

18: **Output:** Вычисление средних значений адаптивного управления и затрат игрока.

Таблица 1: Моделирование для фиксированных p и q .

q	p	Консенсус	u^*	$J(u^*)$
0.2	0.5	1.20	0.45	0.82
0.2	0.75	1.20	0.20	0.78
0.2	0.67	1.20	0.28	0.79
0.2	0.33	1.20	0.62	0.86
0.75	0.5	1.20	0.311	0.003
0.33	0.67	1.20	0.250	0.347
0.50	0.67	1.20	0.204	0.111
0.50	0.5	1.20	0.370	0.114

4. Компьютерное моделирование

4.1. Модель динамики мнений с фиксированными p и q

Вначале рассмотрим модель, в которой параметры p и q известны игроку. Начальные данные имеют вид

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = 2, \quad s = 1.2, \quad \delta = 0.9, \quad \gamma = 0.2.$$

Рисунок 1 иллюстрирует динамику изменения мнений агентов при оптимальном постоянном управлении u^* , когда p и q известны и принимают различные значения. u^* находится при минимизации функции затрат (3.2). После определения оптимального управления находим траекторию динамики мнений агентов. Видно, что мнения агентов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ асимптотически сходятся к значению консенсуса $x^* = 1.2$, что совпадает с целевым значением, указанным игроком. В таблице 1 приведены значения оптимального управления u^* , значение консенсуса x^* и минимальное значение $J(u^*)$, для случая, когда p и q принимают различные фиксированные значения.

Мы сравним эти результаты в следующих сценариях, где p или q являются случайными переменными.

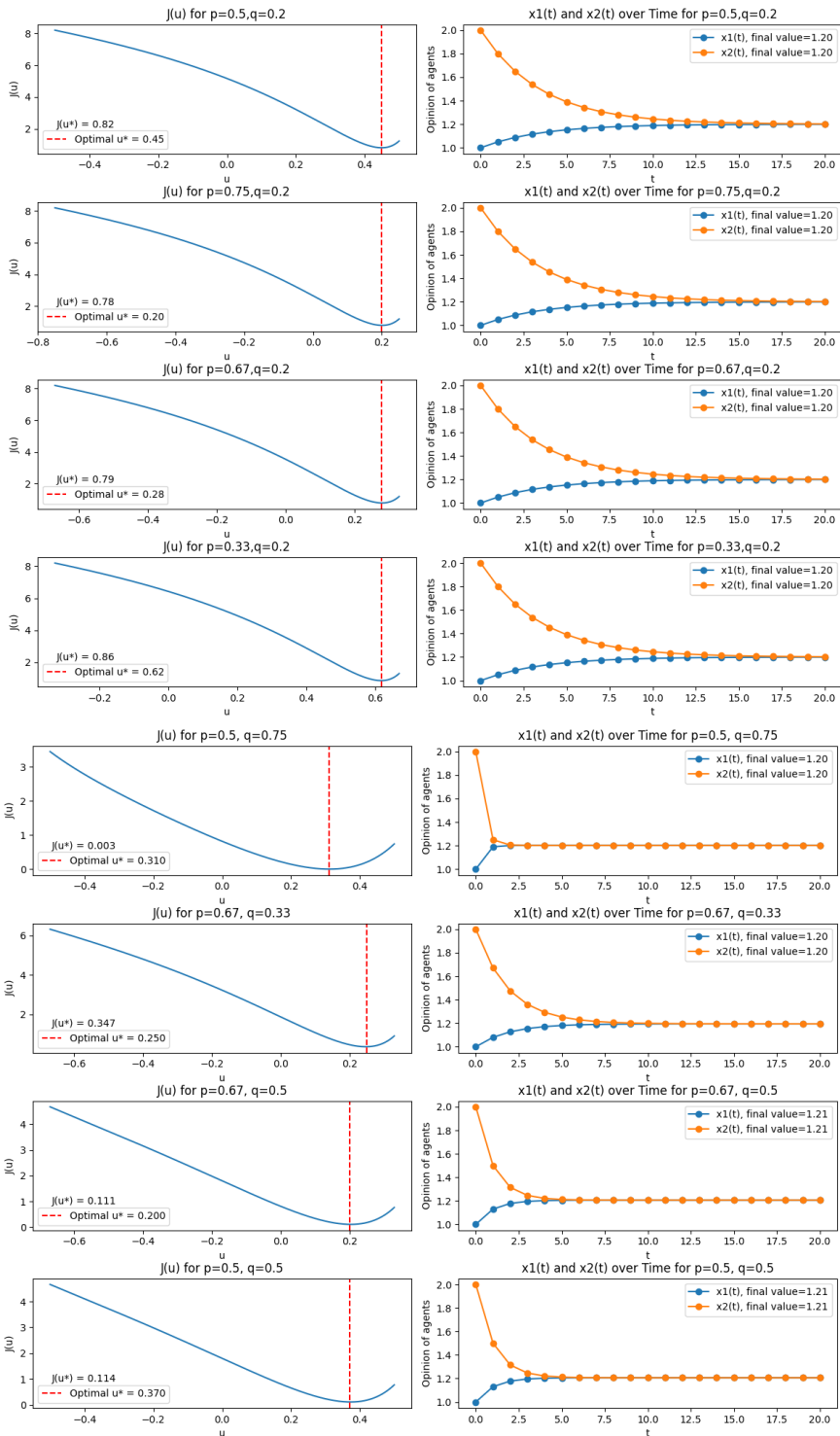


Рисунок 1. Функция $J(u)$ для различных u и динамика мнений при оптимальном постоянном управлении u^* , когда p и q известны и принимают различные значения.

4.2. Моделирование динамики мнений с независимыми случайными переменными p или q

4.2.1 Значение q фиксировано, и известна плотность распределения p

Вначале рассмотрим случай, когда p равномерно распределена на интервале $[0, 1]$ и $q = 0.2$. Пример работы алгоритма 1 приведен в Таблице 2. На рисунке 2 показана динамика мнений агентов при меняющемся управлении в соответствии со случайными генерациями p .

Таблица 2: $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при меняющемся управлении u^* и случайном $p \sim U[0, 1]$, $q = 0.2$.

t	1	3	5	7	9	11	13	15	17
p	0.35	0.75	0.17	0.88	0.25	0.29	0.70	0.37	0.79
$x_1(t)$	1.05	1.12	1.15	1.17	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
$x_2(t)$	1.8	1.54	1.39	1.31	1.26	1.23	1.22	1.21	1.21
u^*	0.6	0.2	0.78	0.08	0.7	0.66	0.26	0.58	0

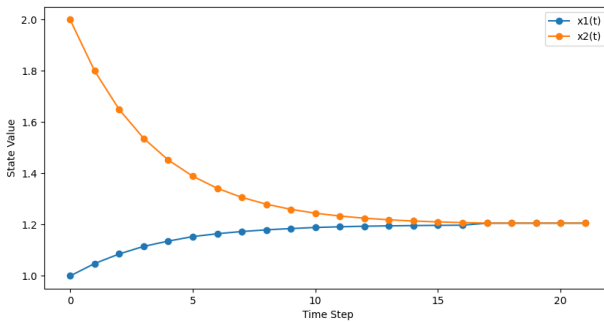


Рисунок 2. Динамика мнений при меняющемся u^* и случайном $p \sim U[0, 1]$, $q = 0.2$.

Этот сценарий соответствует случаю описанному в разделе 4.1,

когда $q = 0.2, p = 0.5$. В таблице 1 видим, что в этом случае оптимальное управление имеет вид $u^* = 0.45$, минимальное значение затрат равно $J(u^*) = 0.82$, и достигается консенсус $x^* = 1.20$. В случае случайных значений p среднее значение $u^* = 0.44$, и достигнутый консенсус равен $x^* = 1.21$.

В таблице 2 представлены результаты лишь одной симуляции. Для этих данных были проведены 1000 симуляций. Результаты представлены в Таблице 3. Кроме этого в таблице 3 представлены результаты численных расчетов для сценариев, когда p равномерно распределена в интервале $[0.5, 1]$, а также имеет распределение с плотностью вида $f(x) = 2x, x \in [0, 1], f(x) = 2(1 - x), x \in [0, 1]$.

Таблица 3: Численные результаты 1000 симуляций при $q = 0.2$ и случайном p .

Распределение вероятностей p	$\mathbb{E}(p)$	Консенсус	Среднее значение u^*	Среднее значение $J(u^*)$
$f(x) = 1$ на $[0, 1]$	0.5	1.21	0.44	0.84
$f(x) = 2$ на $[0.5, 1]$	0.75	1.20	0.2	0.79
$f(x) = 2x$ на $[0, 1]$	0.67	1.20	0.28	0.80
$f(x) = 2(1 - x)$ на $[0, 1]$	0.33	1.21	0.61	0.87

Сравнивая таблицы 3 и 1, видим, что хотя значения управления в стохастическом случае меняются в зависимости от полученных реализаций случайной величины p , средние значения управления u^* и средние значения целевой функции похожи на значения в случае, когда p и q принимают фиксированные значения.

Это показывает, что в некоторых случаях мы можем упростить проблему управления в случае неопределенности значений параметров, переходя к средним значениям случайных параметров без существенного влияния на точность результатов оптимизации. Это явление очень полезно в практике, поскольку позволяет приблизительно решить задачу управления, где параметры известны не точно. Однако важно отметить, что допустимость этой аппроксимации зависит от распределения случайных переменных и специфики проблемы. В некоторых случаях, дисперсия и вид распределения случайных переменных могут значительно влиять на результаты оптимизации.

4.2.2 p и q независимые случайные величины

Предположим, что p и q независимые случайные величины, при этом p равномерно распределена в интервале $[0, 1]$, а q равномерно распределена в интервале $[0.5, 1]$. Результаты адаптивного управления для этого случая представлены в Таблице 4 и рисунке 3. Видно, что за 6 итераций система достигает консенсуса. При этом, управление может принимать и отрицательные значения.

Таблица 4: $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при адаптивном управлении u^* и случайных $p \sim U[0, 1]$ и $q \sim U[0.5, 1]$

t	1	2	3	4	5	6
p	0.40	0.95	0.02	0.01	0.92	0.64
q	0.67	0.60	0.60	0.72	0.64	0.96
$x_1(t)$	1.17	1.19	1.20	1.21	1.20	1.20
$x_2(t)$	1.33	1.23	1.21	1.20	1.21	1.20
u^*	0.43	-0.09	0.84	0	-0.92	0

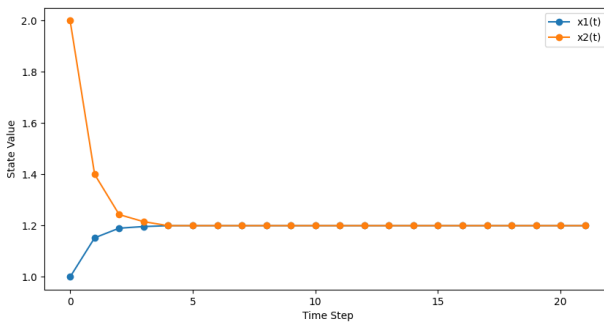


Рисунок 3. Динамика мнений при адаптивном управлении u^* и случайных $p \sim U[0, 1]$ и $q \sim U[0.5, 1]$.

Таблица 5: Численные результаты 1000 симуляций, когда p и q являются независимыми случайными переменными

Распределение вероятностей	$\mathbb{E}(p)$ и $\mathbb{E}(q)$	Среднее u^*	Среднее $J(u^*)$
p: $f_1(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$ q: $f_2(x) = 2, 0.5 \leq x \leq 1$	$\mathbb{E}(p)=0.5$ $\mathbb{E}(q)=0.75$	0.33	0.03
p: $f_1(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1$ q: $f_2(x) = 2(1 - x), 0 \leq x \leq 1$	$\mathbb{E}(p)=0.67$ $\mathbb{E}(q)=0.33$	0.24	0.49
p: $f_1(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1$ q: $f_2(x) = N(0.5, 0.2)$	$\mathbb{E}(p) = 0.67$ $\mathbb{E}(q) = 0.5$	0.21	0.19

Также, как и в предыдущем разделе, были проведены компьютерные эксперименты для трех сценариев с различными наборами распределений для случайных величин p и q . В таблице 4 представлены результаты численных расчетов для сценариев, когда p равномерно распределена в интервале $[0, 1]$ и q равномерно распределена в интервале $[0.5, 1]$, а также для распределений вида $f_1(x) = 2x, f_2(x) = 2(1-x), x \in [0, 1]$, и $f_1(x) = 2x, x \in [0, 1]$ и нормального распределения с параметрами $a = 0.5, \sigma = 0.2$.

Для каждого варианта было проведено 1000 компьютерных экспериментов. Полученные результаты приведены в таблице 5. Сравнивая с таблицей 1, видим, что среднее значение адаптивного управления примерно то же, что и в случае известных параметров, среднее значение затрат немного больше, чем в случае, когда p и q известны и принимают соответствующие фиксированные значения.

4.2.3 Модель динамики мнений с зависимыми случайными величинами p и q

В заключение рассмотрим задачу адаптивного управления для динамической системы (3.1), подверженной влиянию двух зависимых случайных величин p и q , где $p \in [0, 1]$ и $q \in [0, 1]$, при этом, совместная плотность распределения имеет вид

$$f(p, q) = 1 + 3k(1 - 2p)(1 - 2q), \quad k \in [0, 1/3]. \quad (4.1)$$

Здесь k коэффициент корреляции между p и q .

Для определенности предположим $k = 0.3$. Заметим, что p и q имеют маргинальные равномерные распределения. Целевая функция игрока имеет тот же вид, что и выше.

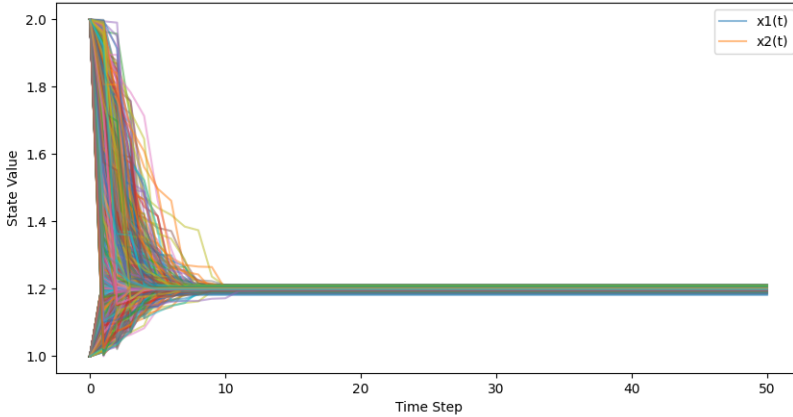


Рисунок 4. Симуляции динамики мнений при зависимых случайных p и q .

При моделировании сценария, когда p и q являются зависимыми случайными величинами с совместной вероятностной плотностью (4.1) было получено, что среднее значение адаптивного управления равно 0.37, конечное значение консенсуса равно 1.2, а средние затраты равны 0.26. Вид динамики мнений в этом случае представлен на рис. 4.

5. Заключение

Эта статья исследует влияние неопределенности на динамику мнений в модели оптимального управления мнениями двух агентов и одним игроком. Предложено адаптивное управление с использованием функции затрат, полученное в предположении, что все параметры модели известны. Используется метод квадратичного программирования (SLSQP), который минимизирует функцию затрат. Эффективность этого управления проверяется в различных условиях. Показано, что при адаптивном управлении динамика мнений также при-

ближается к целевому значению игрока, также как и в случае полной информации. В дальнейшем предполагается рассмотрение данного подхода в общем случае n агентов, а также будет рассмотрен теоретико-игровой вариант задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agbinya J. *Markov Chain and its Applications an Introduction* // In: Applied Data Analytics Principles and Applications. River Publishers Denmark, 2020.
2. Bolzern P., Colaneri P., De Nicolao G. *Opinion dynamics in social networks: The effect of centralized interaction tuning on emerging behaviors* // IEEE Transactions on Computational Social Systems. 2020. V. 7. N 2. P. 362–372.
3. Bullo F., Cortés J., Dörfler F. *Lectures on network systems* // CreateSpace. 2018. V. 1.
4. De Groot M.H. *Reaching a Consensus* // Journal of the American Statistical Association. 1974. V. 69. N 345. P. 118–121.
5. Deffuant G., Neau D., Amblard F. *Mixing beliefs among interacting agents* // Advances in Complex Systems. 2000. V. 3. N 01n04. P. 87–98.
6. Dong Y., Zhan M., Kou G. *A survey on the fusion process in opinion dynamics* // Information Fusion. 2018. V. 43. P. 57–65.
7. French J. RP. *A formal theory of social power* // Psychological Review. 1956. V. 63. N 3. P. 181.
8. Friedkin N.E., Johnsen E.C. *Social influence and opinions* // The Journal of Mathematical Sociology. 1990. V. 15. N 3–4. P. 193–206.
9. Gentil G., Bhaya A. *Opinion Dynamic Games Under One Step Ahead Optimal Control* // IEEE Transactions on Computational Social Systems. 2024.

10. Ghezlbash E., Yazdanpanah M. J., Asadpour M. *Optimal selection of informed agents for influence opposition* // IEEE Transactions on Computational Social Systems. 2021. V. 8. N 1. P. 20–32.
11. Hassani H., Razavi-Far R., Saif M. *Classical dynamic consensus and opinion dynamics models: A survey of recent trends and methodologies* // Information Fusion. 2022. V. 88. P. 22–40.
12. Hegselmann R., Krause U. *Opinion Dynamics Driven by Various Ways of Averaging* // Computational Economics. 2005. V. 25. P. 381–405.
13. Hegselmann R., König S., Kurz S. *Optimal opinion control: The campaign problem* // arXiv preprint arXiv:1410.8419. 2014.
14. Jia P., MirTabatabaei A., Friedkin N.E. *Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks* // SIAM Review. 2015. V. 57. N 3. P. 367–397.
15. Jiang H., Mazalov V.V., Gao H. *Opinion dynamics control in a social network with a communication structure* // Dynamic Games and Applications. 2023. V. 13. N 1. P. 412–434.
16. Kareeva Y., Sedakov A., Zhen M. *Influence in social networks with stubborn agents: From competition to bargaining* // Applied Mathematics and Computation. 2023. V. 444. Art. No. 127790.
17. Martins A.C.R. *Discrete opinion dynamics with M choices* // The European Physical Journal B. 2020. V. 93. P. 1–10.
18. Mazalov V.V., Parilina E.M. *Game of Competition for Opinion with Two Centers of Influence* // LNCS. 2019. Vol. 11548. P. 673–684.
19. Mazalov V., Parilina E. *The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics* // Mathematics. 2020. V. 8. N 3.
20. Sedakov A.A., Zhen M. *Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes* // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya. 2019. V. 15. P. 118–125.

21. Varma, V.S., Adhikari B., Morărescu I.C. *Optimal campaign strategy for social media marketing with a contrarian population* // Network Games, Control and Optimization: 10th International Conference, France, September 22–24, 2021. P. 241–251.
22. Veetaseveera J., Varma V.S., Morărescu I.C. *A dynamic game formulation for control of opinion dynamics over social networks* // Network Games, Control and Optimization: 10th International Conference, France, September 22–24, 2021. P. 252–260.
23. Wang C., Mazalov V.V., Gao H. *Opinion Dynamics Control and Consensus in a Social Network* // Automation and Remote Control. 2021. V. 82. P. 1107–1117.

ADAPTIVE CONTROL FOR TWO-AGENT OPINION DYNAMICS UNDER UNCERTAINTY

Yajin Chen, Qingdao University, School of Mathematics and Statistics,

Vladimir V. Mazalov, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics-Processes of Control; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS, Dr.Sc., professor (vlmazalov@yandex.ru),

Hongwei Gao, Qingdao University, School of Mathematics and Statistics, PhD, professor.

Abstract: A model of opinion dynamics is considered, in which the trust between agents is unknown and modeled using random variables with certain probability distributions. Additionally, there exists a player whose goal is to maintain the agents' opinions at a specific level. Initially, the optimal control is found in explicit form under the condition of known trust coefficients, and then this control is applied at each step when obtaining realizations of the random variables. Computer experiments have been conducted.

Keywords: model of opinion dynamics, linear dynamics, control, uncertainty in trust, adaptive control.