Доклады Академии наук СССР
1958. Том 118, № 3

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР В. Л. ГИНЗБУРГ

КРИТИЧЕСКИЙ ТОК ДЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ПЛЕНОК

Исследование поведения сверхпроводящих пленок в магнитном поле позволяет, вообще говоря, определить глубину проникновения слабого магнитного поля в сверхпроводник δ_0. Для той же цели может служить измерение критического тока, при котором исчезает сверхпроводимость, поскольку в теории ([1]) влияние поля и влияние тока учитываются на равных основаниях.

Если использовать пленки, нанесенные на цилиндрическую поверхность (см. ([2]), где указана также более ранняя литература), то определение критического тока, по-видимому, даже более надежно, чем определение критического поля. В этой связи остановимся на вычислении критического тока несколько подробнее, чем в ([1]).

Наибольший интерес представляют тонкие пленки с толщиной $l \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ см. При использовании в качестве подложек цилиндров с диаметром порядка миллиметра такие пленки можно считать плоскими, учитывая цилиндрическую конфигурацию пленки лишь в граничных условиях для поля. Для плоской пленки уравнения, определяющие функцию Ψ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, таковы ([1]):

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\xi^2} = \varkappa^2 \{\Psi_0^3 - \Psi_0 + \Psi_0(a_y^2 + a_z^2)\}; \tag{1}$$

$$\frac{d^2 a_y}{d\xi^2} = \Psi_0^2 a_y, \quad \frac{d^2 a_z}{d\xi^2} = \Psi_0^2 a_z. \tag{2}$$

Здесь и ниже используются обозначения:

$$\xi = \frac{x}{\delta_0}, \quad \delta_0^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 \Psi_\infty^2}, \quad \Psi_0^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2}, \tag{3}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2} H_{\text{км}} \delta_0}, \quad \varkappa = \frac{\sqrt{2} e}{\hbar c} H_{\text{км}} \delta_0^2, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{2} H_{\text{км}}},$$

где $H_{\text{км}}$ — критическое магнитное поле для массового металла.

Пленка предполагается расположенной в плоскости yz так, что ось x ей перпендикулярна; на границах пленки при $x = 0$ и $x = l$ должно соблюдаться условие

$$\xi = 0, \ \xi = \frac{l}{\delta_0}: \quad \frac{d\Psi_0}{d\xi} = 0. \tag{4}$$

Полный ток направлен по оси цилиндра (ось z); в том же направлении может быть наложено внешнее поле $H_0 = \sqrt{2} H_{\text{км}} h_0$. Поле тока направлено по оси y и на внешней поверхности пленки равно $H_I = \sqrt{2} H_{\text{км}} h_I = 2I / cr$, где I — полный ток, текущий по пленке, и r — радиус цилиндра (используются абсолютные единицы). На внутренней по-

верхности цилиндрической пленки (при $\xi = 0$) поле тока равно нулю. Таким образом, поле в пленке $\mathbf{h}(\xi)$ должно удовлетворять условиям*

$$\xi = 0: \quad h_y = 0,\ h_z = h_0; \qquad \xi = l/\delta_0: \quad h_y = h_I,\ h_z = h_0. \tag{5}$$

Если толщина удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\varkappa l}{\delta_0}\right)^2 \ll 1, \tag{6}$$

то можно считать функцию Ψ_0 не зависящей от координат ([1,3]).

При этом предположении поле $\mathbf{h}$ и соответствующий потенциал $\mathbf{a}$, удовлетворяющие уравнениям (2) и условиям (5), таковы:

$$a_y = \frac{h_0}{\Psi_0}\left\{\operatorname{sh}\Psi_0\xi - \frac{\operatorname{ch}\Psi_0\xi}{\operatorname{cth}(\Psi_0 l/2\delta_0)}\right\},$$

$$h_z = \frac{da_y}{d\xi} = h_0\left\{\operatorname{ch}\Psi_0\xi - \frac{\operatorname{sh}\Psi_0\xi}{\operatorname{cth}(\Psi_0 l/2\delta_0)}\right\}; \tag{7}$$

$$a_z = -\frac{h_I \operatorname{ch}\Psi_0\xi}{\Psi_0 \operatorname{sh}(\Psi_0 l/\delta_0)}, \qquad h_y = -\frac{da_z}{d\xi} = \frac{h_I \operatorname{sh}\Psi_0\xi}{\operatorname{sh}(\Psi_0 l/\delta_0)}.$$

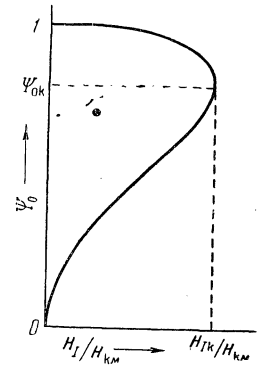

Рис. 1

Для определения величины Ψ_0 проинтегрируем уравнение (1) в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = l/\delta_0$. Тогда, используя условия (4) и учитывая постоянство Ψ_0, получаем:

$$\Psi_0^2 = 1 - \frac{\delta_0}{l} - \int_0^{l/\delta_0} (a_y^2 + a_z^2)\, d\xi. \tag{8}$$

Подставляя сюда решение (7), получаем соотношение для Ψ_0:

$$(\Psi_0^2 - 1)\Psi_0^2 = -\frac{\left(\frac{H_I}{H_{км}}\right)^2\left\{1 + \frac{\operatorname{sh}(2\Psi_0 l/\delta_0)}{2\Psi_0 l/\delta_0}\right\}}{4\operatorname{sh}^2(\Psi_0 l/\delta_0)} + \frac{\left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2\left\{1 - \frac{\operatorname{sh}(\Psi_0 l/\delta_0)}{\Psi_0 l/\delta_0}\right\}}{4\operatorname{ch}^2(\Psi_0 l/2\delta_0)}. \tag{9}$$

Это уравнение имеет решение только пока $H_I \leqslant H_{Iк}$, что ясно, например, из рис. 1, отвечающего значению $l/\delta_0 = 1$.

Таким образом, критическое поле тока $H_{Iк} = 2I_к/cr$ определяется из условия $dH_I/d\Psi_0 = 0$. График функции $H_{Iк}(l/\delta_0)$ при $H_0 = 0$ представлен на рис. 2. В предельных случаях из (9) легко получить выражения ($\Psi_{0к}$ — значение Ψ_0 при $H_I = H_{Iк}$):

$$\Psi_{0к}\frac{l}{\delta_0} \ll 1: \quad \frac{H_{Iк}}{H_{км}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{l}{\delta_0}\left[1 - \left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2 \frac{l^2}{24\delta_0^2}\right]^{3/2},$$

$$\Psi_{0к} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[1 - \left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2 \frac{l^2}{24\delta_0^2}\right]^{1/2}; \tag{10}$$

$$\Psi_{0к}\frac{l}{\delta_0} \gg 1: \quad \frac{H_{Iк}}{H_{км}} = \left[\frac{8}{5}\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}\frac{l}{\delta_0} - 2\left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \Psi_{0к} = \sqrt{\frac{3}{5}}. \tag{11}$$

---

* Предполагается, что в пленке не течет полный ток, направленный перпендикулярно оси цилиндра. Это может быть достигнуто охлаждением пленки в заданном поле h_0 из области выше критической температуры $T_к$ или если сделать пленку односвязной с помощью разреза вдоль образующей цилиндра.

При отсутствии тока разрушение сверхпроводимости пленки полем H_0 происходит при значении $H_к$, которое вычислялось в ([1,3]). Если при этом $l \leqslant l_к = \sqrt{5}\,\delta_0$, переход в нормальное состояние носит характер перехода второго рода и

$$\frac{H_к}{H_{км}} = \frac{\sqrt{24}\,\delta_0}{l}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует, что при $H_0 = 0$

$$H_{Iк} H_к = {}^8/_3 H_{км}^2. \tag{13}$$

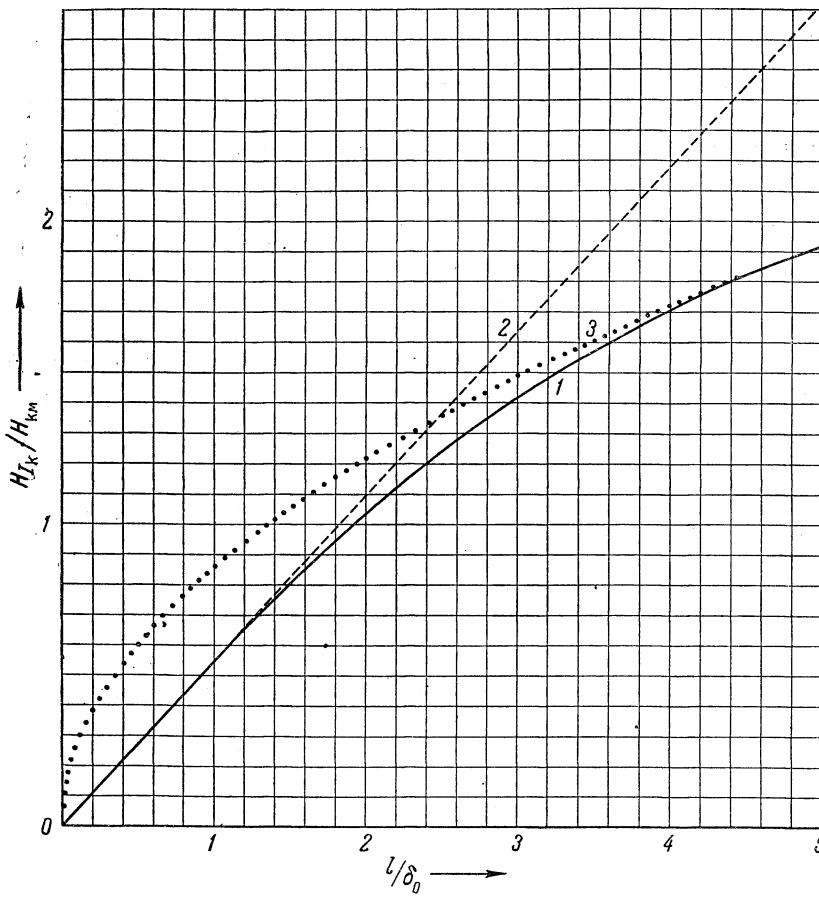

Рис. 2. *1* — по формуле (9) с $H_0 = 0$; *2* — $H_{Iк}/H_{км} = 0{,}544\, l/\delta_0$; *3* — $H_{Iк}/H_{км} = 0{,}86\sqrt{l/\delta_0}$

Заметим, что для плоской пленки (а не цилиндра) получается соотношение (9) с заменой в члене, пропорциональном H_I^2, толщины l на $l/2$ (см. ([1]), где $l = 2d$). Учет этого обстоятельства приводит к тому, что в использованных в ([2]) формулах нужно учесть дополнительный множитель 2. Для проверки теории особенно удобно воспользоваться соотношением (13), так как при этом не нужно независимым образом определять δ_0 и l.

Из экспериментальных данных следует, что обычно, по крайней мере для массивных образцов с хорошей точностью

$$H_{км} = H_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_к}\right)^2\right], \qquad \delta_0 = \frac{\delta_{00}}{\sqrt{1 - (T/T_к)^4}}. \tag{14}$$

Если принять эти выражения, то из (9) или (10), (11) получается вполне определенная температурная зависимость поля H_{Ik}. Вместе с тем нужно отметить, что конкретная форма исходного уравнения (I) связана с предположением об определенной зависимости свободной энергии сверхпроводника F_s от Ψ_0^2, а именно, зависимости

$$F_s = F_n + \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}(\Psi_0^4 - 2\Psi_0^2) = F_n + \alpha\Psi^2 + \beta\frac{\Psi^4}{2}.$$

Вопрос об основаниях для такого выбора и возможности рассмотрения более общего случая обсужден в ([4]). Ограничимся поэтому замечанием, что вблизи $T_{\text{к}}$ этот выбор особенно надежен, а для $H_{\text{км}}$ и δ имеем

$$H_{\text{км}} = \left|\frac{dH_{\text{км}}}{dT}\right|_{\text{к}} \Delta T, \quad \delta_0 = \frac{\delta'_{00}}{(\Delta T)^{1/2}}, \quad \Delta T = T_{\text{к}} - T \ll T_{\text{к}}; \tag{15}$$

Если справедливы выражения (14), то, очевидно,

$$\left|\frac{dH_{\text{км}}}{dT}\right|_{\text{к}} = \frac{2H_0}{T_{\text{к}}}, \quad \delta'_{00} = \sqrt{\frac{T_{\text{к}}}{4}}\,\delta_{00}.$$

Величины $|dH_{\text{км}}/dT|_{\text{к}}$ и δ'_{00} особенно надежно определяются на опыте.

Вблизи $T_{\text{к}}$ формула (10) при $H_0 = 0$ принимает вид

$$H_{I\text{к}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\left|\frac{dH_{\text{км}}}{dT}\right|_{\text{к}} \frac{l}{\delta'_{00}}(\Delta T)^{3/2}. \tag{16}$$

В условиях, когда наблюдается пропорциональность поля $H_{I\text{к}}$ величине $(\Delta T)^{3/2}$, использование выражения (16) должно явиться удобным методом нахождения коэффициента δ'_{00}.

Примечание при корректуре. В последнее время, в связи с построением микроскопической теории сверхпроводимости (препринт соответствующей подробной статьи Бардина, Купера и Шиффера был получен в Москве в конце ноября 1957 г.), выяснилось, что макроскопическая теория ([1]) может быть в количественном отношении строго справедливой лишь в некоторых предельных случаях. Вместе с тем, более общая теория, пригодная для рассмотрения поведения сверхпроводников в сильных полях и, в частности, для вычисления полей $H_{\text{к}}$ и $H_{I\text{к}}$, еще не развита. Можно думать, что измерение полей $H_{\text{к}}$ и $H_{I\text{к}}$ для тонких пленок явится удобным методом для экспериментального выявления области применимости результатов, вытекающих из теории ([1]), а также для проверки более общих формул, которые будут получены в дальнейшем.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
31 X 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950). [2] Л. А. Фейгин, А. И. Шальников, ДАН, 108, 823 (1956). [3] В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 33, № 1 (1958). [4] В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 30, 593 (1956); ДАН, 110, 358 (1956).