

УДК 519.2

## О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде

© 1999 г. В. И. Афанасьев

Пусть  $\{\xi_n\}$  — критический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями. Показано, что при некоторых условиях при  $x \rightarrow \infty$

$$P\left(\sup_n \xi_n > x\right) \sim \frac{c_0}{\ln x}, \quad P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n > x\right) \sim \frac{c_0}{\ln x},$$

где  $c_0$  — положительная постоянная.

1. Пусть последовательности случайных величин

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

одинаково распределены и независимы при разных  $n$ . Введем производящие функции

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$  называется ветвящимся процессом в случайной среде  $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ , если

$$\mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(для простоты изложения будем считать, что  $\xi_0 = 1$ ).

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин  $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ , где

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = f''_{i-1}(1)/(2f'_{i-1}(1)^2), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что процесс  $\{\xi_n\}$  является критическим, то есть  $\mathbf{M}X_1 = 0$ , и выполнены условия

(а) конечны  $\mathbf{M}X_1^2, \mathbf{M}\eta_1, \mathbf{M}X_1\eta_1$ , причем  $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2 > 0$ ;

(б) производящие функции  $f_n(s)$  дробно-линейны.

В настоящей работе устанавливаются следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\{\xi_n\}$  — критический ветвящийся процесс в случайной среде  $\{\pi_n\}$ , выполнены условия (a), (b) и  $\mathbf{M} \exp(-X_1) < \infty$ , тогда при  $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left( \sup_n \xi_n > x \right) \sim \frac{c_0}{\ln x},$$

где  $c_0$  — положительная постоянная.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 при  $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n > x \right) \sim \frac{c_0}{\ln x}.$$

Пусть  $T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$  — момент вырождения  $\{\xi_n\}$ . Доказательство указанных теорем существенно опирается на следующий результат, установленный в [1]: в условиях теоремы 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln(\xi_{[nt]} + 1)/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (1)$$

где  $W^+(t)$  — броуновская извилина [2], знак  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  означает сходимость по распределению в пространстве  $D[0, 1]$  с топологией Скорохода [3]. Заметим, что в работе [4] соотношение (1) доказано без предположения (b), но при более ограничительных условиях на моменты, чем (a).

Указанные теоремы имеют интересные следствия для возвратного случайного блуждания в случайной среде. Обозначим  $\zeta_n$  число переходов блуждающей частицы из точки  $n$  в  $n+1$  до момента  $\mathcal{T}$  первого после нуля достижения полуоси  $(-\infty, 0]$ . Как нетрудно понять,  $\{\zeta_n\}$  является критическим ветвящимся процессом в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, поэтому в силу теоремы 1 (при выполнении некоторых ограничений на вероятности перехода) при  $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left( \sup_n \zeta_n > x \right) \sim \frac{c_0}{\ln x}.$$

Поскольку в рассматриваемой ситуации число переходов из точки  $n$  в  $n+1$  равно числу переходов из точки  $n+1$  в  $n$ ,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n = \mathcal{T}.$$

Отсюда ввиду теоремы 2 следует, что при  $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > x) \sim \frac{c_0}{\ln x}.$$

**2.** В этом разделе рассматриваются некоторые факты, касающиеся случайного блуждания с нулевым сносом и броуновской извилины  $W^+(t)$ . Будем понимать под  $W^+(t)$  при  $t > 1$  стандартное броуновское движение, начинающееся из  $W^+(1)$ . Пусть

$$\tau = \inf\{t > 0: W^+(t) = 0\}.$$

Заметим, что  $W^+(t) > 0$  при  $t \in (0, 1]$ , поэтому  $\tau > 1$ .

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем  $\mathbf{M}X_1 = 0$ ,  $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2$ ,  $0 < \sigma < \infty$ . Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$Y_n(t) = S_{[nt]} / (\sigma\sqrt{n}), \quad n \in \mathbf{N}, \quad t \in [0, \infty).$$

Пусть  $\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}$ . Известно [5, 6], что при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_1 > n) \sim c_1 / \sqrt{n}, \quad (2)$$

где  $c_1$  — положительная постоянная, и

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid \tau_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}, \quad (3)$$

где знак  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  означает сходимость по распределению в пространстве  $D[0, \infty)$  с топологией Скорохода [7].

**Лемма 1.** При любых  $k \in \mathbf{N}$ , неотрицательных  $t_1, x_1, \dots, t_k, x_k$  и  $a > 1$

$$\mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+(t_i/a) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k).$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > a) = \mathbf{P}\left(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \inf_{t \in [1, a]} W^+(t) > 0\right).$$

Ввиду соотношений (2), (3) последняя вероятность равна

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(S_{[nt_i]} / (\sigma\sqrt{n}) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \inf_{t \in [1, a]} S_{[nt]} / (\sigma\sqrt{n}) > 0 \mid \tau_1 > n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{[nt_i]} / (\sigma\sqrt{n}) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau_1 > na) \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_1 > n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{[na(t_i/a)]} / (\sigma\sqrt{na}) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k \mid \tau_1 > na) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > na)}{\mathbf{P}(\tau_1 > n)} \\ &= \mathbf{P}(W^+(t_i/a) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k) \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** При любых  $k \in \mathbf{N}$ , неотрицательных  $t_1, x_1, \dots, t_k, x_k$  и  $a > 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > a) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k). \quad (4) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Если  $t_i \leq a$ ,  $i = 1, \dots, k$ , то утверждение леммы 2 следует из леммы 1. Доказательство в общем случае проведем по индукции по числу точек  $t_1, \dots, t_k$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , причем

$t_1 \leq a$ , поэтому в силу сказанного первый шаг индукции очевиден. Пусть (4) верно при некотором  $k \in \mathbf{N}$  и  $t_{k+1} > t_k$ . Покажем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > a) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k+1). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу сказанного достаточно рассмотреть случай  $t_{k+1} > a$ . Представим левую часть (5) в виде суммы

$$\mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > a) = P_1 + P_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}), \\ P_2 &= \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; a < \tau \leq t_{k+1}). \end{aligned}$$

Учитывая лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+(t_i/t_{k+1}) \leq x_i/\sqrt{t_{k+1}}, i = 1, \dots, k+1). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, поскольку  $W^+(t_{k+1} \wedge \tau) = W^+(\tau) = 0$  при  $\tau \leq t_{k+1}$ , то

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; a < \tau \leq t_{k+1}) \\ &= \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > a) \\ &\quad - \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > t_{k+1}), \end{aligned}$$

откуда по предположению индукции находим, что

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+((t_i/t_{k+1}) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{t_{k+1}}, i = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (8)$$

Представим теперь правую часть (5) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k+1) = P_3 + P_4, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}/a), \\ P_4 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k+1; \tau \leq t_{k+1}/a). \end{aligned}$$

Учитывая лемму 1, видим, что

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+(t_i/a) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}/a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+(t_i/t_{k+1}) \leq x_i/\sqrt{t_{k+1}}, i = 1, \dots, k+1). \end{aligned} \quad (10)$$

Наконец,  $W^+((t_{k+1}/a) \wedge \tau) = W^+(\tau) = 0$  при  $\tau < t_{k+1}/a$ , и поэтому

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k; \tau \leq t_{k+1}/a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k; \tau > t_{k+1}/a), \end{aligned}$$

откуда по предположению индукции следует, что

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+((t_i/t_{k+1}) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{t_{k+1}}, i = 1, \dots, k). \quad (11) \end{aligned}$$

В силу соотношений (7), (10) и (8), (11)

$$P_1 = P_3, \quad P_2 = P_4,$$

откуда, учитывая (6) и (9), приходим к (5). Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** При любом фиксированном  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W^+(t) - W^+(1)| > \varepsilon \right) = 0.$$

*Доказательство.* В силу соотношения (3)

$$\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W^+(t) - W^+(1)| > \varepsilon \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} \left| \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \right| > \varepsilon \mid \tau_1 > n \right),$$

но последняя вероятность не превосходит

$$\frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n(1-\delta))}{\mathbf{P}(\tau_1 > n)} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} \left| \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \right| > \varepsilon \mid \tau_1 > n(1-\delta) \right),$$

откуда, учитывая соотношение (2), независимость случайных событий

$$\left\{ \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}) - S_n/(\sigma\sqrt{n})| > \varepsilon \right\}, \quad \{\tau_1 > n(1-\delta)\}$$

и теорему Донскера, получаем, что

$$\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W^+(t) - W^+(1)| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W(t) - W(1)| > \varepsilon \right),$$

где  $W(t)$  — стандартное броуновское движение, начинающееся из нуля. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W(t) - W(1)| > \varepsilon \right) &\leq 2\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-\delta, 1]} |W(t) - W(1-\delta)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= 2\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0, \delta]} |W(t)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= 2\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0, 1]} |W(t)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right), \end{aligned}$$

и (см., например, [3])

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0, 1]} |W(t)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right) = 0. \quad (12)$$

Лемма 3 доказана.

Наряду с последовательностью случайных величин  $X_i$ ,  $i \in \mathbf{N}$ , рассмотрим последовательность неотрицательных случайных величин  $\eta_i$ ,  $i \in \mathbf{N}$ , предполагая при этом, что пары  $(X_1, \eta_1)$ ,  $(X_2, \eta_2), \dots$  независимы и одинаково распределены. Положим

$$a_n = e^{-S_n}, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad b_0 = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

**Лемма 4.** Пусть  $\mathbf{M}\eta_1 < \infty$  и  $a_n + b_n \geq 1$  при всех  $n \in \mathbf{N}$ , тогда при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \mathbf{M} \left( 1 - \frac{1}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \right)^{\exp(\varepsilon \sigma \sqrt{n})} = 0.$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\mathbf{M} \left( 1 - \frac{1}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \right)^{\exp(\varepsilon \sigma \sqrt{n})} = M_1(n, \delta) + M_2(n, \delta), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} M_1(n, \delta) &= \mathbf{M} \left( \left( 1 - \frac{1}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \right)^{\exp(\varepsilon \sigma \sqrt{n})} ; \sup_{i \in [0, \delta n]} (-S_i) / (\sigma \sqrt{n}) > \frac{\varepsilon}{2} \right), \\ M_2(n, \delta) &= \mathbf{M} \left( \left( 1 - \frac{1}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \right)^{\exp(\varepsilon \sigma \sqrt{n})} ; \sup_{i \in [0, \delta n]} (-S_i) / (\sigma \sqrt{n}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$M_1(n, \delta) \leq \mathbf{P} \left( \sup_{i \in [0, \delta n]} (-S_i) / (\sigma \sqrt{n}) > \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

в силу теоремы Донскера и соотношения (12)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} M_1(n, \delta) &\leq \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0, \delta]} W(t) > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0, 1]} W(t) > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь рассмотрим  $M_2(n, \delta)$ . Если

$$\sup_{i \in [0, \delta n]} (-S_i) / (\sigma\sqrt{n}) \leq (\varepsilon/2),$$

то

$$\frac{e^{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \geq \frac{e^{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}}{\sup_{i \in [0, \delta n]} e^{-S_i} \left( 1 + \sum_{i=0}^{[\delta n]-1} \eta_{i+1} \right)} \geq \frac{e^{\varepsilon\sigma\sqrt{n}/2}}{1 + \sum_{i=0}^{[\delta n]-1} \eta_{i+1}}.$$

По усиленному закону больших чисел последнее выражение с вероятностью 1 стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому если

$$\sup_{i \in [0, \delta n]} (-S_i) / (\sigma\sqrt{n}) \leq (\varepsilon/2),$$

то с вероятностью 1 (учитываем неравенство  $(1-x)^a \leq e^{-ax}$  при  $x \in [0, 1], a > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{a_{[\delta n]} + b_{[\delta n]}} \right)^{\exp(\varepsilon\sigma\sqrt{n})} = 0,$$

откуда по теореме о мажорируемой сходимости при любом фиксированном  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_2(n, \delta) = 0. \quad (15)$$

Из соотношений (13)–(15) следует утверждение леммы 4.

**3.** В этом разделе обобщается соотношение (1).

**Теорема 3.** В условиях теоремы 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln(\xi_{[nt]} + 1) / (\sigma\sqrt{n}), t \in [0, \infty) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}.$$

*Доказательство.* Сначала установим сходимость конечномерных распределений последовательности случайных процессов

$$Z_n(t) = \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, \infty), \quad n \in \mathbf{N},$$

рассматриваемых при условии  $T > n$ . Возьмем произвольные  $k \in \mathbf{N}$  и неотрицательные  $t_1, x_1, \dots, t_k, x_k$ , причем  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ . Надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k \mid T > n) = \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k). \quad (16)$$

Если  $t_k \leq 1$ , то это следует из соотношения (1), поскольку  $\tau > 1$  и

$$W^+(t_i \wedge \tau) = W^+(t_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Доказательство в общем случае проведем индукцией по числу точек  $t_1, \dots, t_k$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $t_1 \leq 1$ , поэтому в силу сказанного первый шаг индукции очевиден. Пусть (16) верно при некотором  $k \in \mathbf{N}$  и  $t_{k+1} > t_k$ . Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1 \mid T > n) = \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1). \quad (17)$$

В силу сказанного достаточно рассмотреть случай  $t_{k+1} > 1$ . Очевидно, что

$$\mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; T > n) = P_1(n) + P_2(n), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; T > nt_{k+1}), \\ P_2(n) &= \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; n < T \leq nt_{k+1}). \end{aligned}$$

В [8] установлено, что если выполнены условия (а), (б), то при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (19)$$

где  $c_2$  — положительная постоянная. Ввиду соотношений (1), (19), учитывая, что  $t_i/t_{k+1} \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, k+1$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(n)}{\mathbf{P}(T > n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T > nt_{k+1})}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}(\ln(\xi_{[nt_{k+1}(t_i/t_{k+1})]} + 1) / (\sigma \sqrt{nt_{k+1}}) \\ &\leq x_i / \sqrt{t_{k+1}}, i = 1, \dots, k+1 \mid T > nt_{k+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+(t_i/t_{k+1}) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1). \end{aligned} \quad (20)$$

Если  $T \leq nt_{k+1}$ , то  $\ln(\xi_{[nt_{k+1}]} + 1) = 0$  и неравенство  $Z_n(t_{k+1}) \leq x_{k+1}$  выполняется автоматически, поэтому

$$P_2(n) = \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; n < T \leq nt_{k+1}) = P_3(n) - P_4(n),$$

где

$$\begin{aligned} P_3(n) &= \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T > n), \\ P_4(n) &= \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T > nt_{k+1}). \end{aligned}$$

По предположению индукции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3(n)}{\mathbf{P}(T > n)} = \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k), \quad (21)$$

Аналогично (20) выводится, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_4(n)}{\mathbf{P}(T > n)} = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbf{P}(W^+(t_i/t_{k+1}) \leq x_i, i = 1, \dots, k). \quad (22)$$

Из соотношений (18), (20)–(22) следует, что левая часть (17) равна

$$\frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \left( \mathbf{P} \left( W^+ \left( \frac{t_i}{t_{k+1}} \right) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1 \right) - \mathbf{P} \left( W^+ \left( \frac{t_i}{t_{k+1}} \right) \leq x_i, i = 1, \dots, k \right) \right) + \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k),$$

и с учетом леммы 1 получаем для нее представление

$$\mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}) - \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > t_{k+1}) + \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k).$$

Осталось заметить, что правая часть соотношения (17) равна

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}) \\ & + \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau \leq t_{k+1}) \\ & = \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}) \\ & + \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau \leq t_{k+1}) \\ & = \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k+1; \tau > t_{k+1}) \\ & + \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k) \\ & - \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > t_{k+1}). \end{aligned}$$

Итак, соотношение (17) доказано, а следовательно, установлена сходимость конечномерных распределений.

Для функции  $f \in D[u, v]$ ,  $0 \leq u < v < \infty$ , введем модуль непрерывности

$$w_f(\delta, u, v) = \sup |f(s) - f(t)|,$$

где супремум берется по всем  $s, t$  таким, что

$$s, t \in [u, v], \quad |t - s| < \delta, \quad \delta \in (0, \infty).$$

Покажем, что при любом фиксированном  $v > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon | T > n) = 0. \quad (23)$$

Если  $v \leq 1$ , то соотношение (23) является следствием (1).

Пусть  $v > 1$ . Без ограничения общности можно считать, что  $v - 1$  кратно  $\delta$ . Положим  $(v - 1)/\delta - 1 = k_0$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > n) \\ & = \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > vn) + \sum_{k=0}^{k_0} \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T \in (n(1+k\delta), n(1+(k+1)\delta)]. \end{aligned}$$

Преобразуем отдельное слагаемое суммы, стоящей справа. Ясно, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T \in (n(1 + k\delta), n(1 + (k + 1)\delta)]) \\
 &= \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T \in (n(1 + k\delta), n(1 + (k + 1)\delta))) \\
 &= \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta)) \\
 &\quad - \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + (k + 1)\delta)) \\
 &= (\mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + k\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta)) \\
 &\quad - \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + (k + 1)\delta))) \\
 &\quad + (\mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta)) \\
 &\quad - \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + k\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta))).
 \end{aligned}$$

Обозначим первое и второе выражения, стоящие в скобках в последнем члене равенства через  $a_k(n, \delta)$  и  $b_k(n, \delta)$  соответственно. Положим

$$\begin{aligned}
 S_1(n, \delta) &= \sum_{k=0}^{k_0} a_k(n, \delta), \\
 S_2(n, \delta) &= \sum_{k=0}^{k_0} b_k(n, \delta).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > n) = \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > nv) + S_1(n) + S_2(n). \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что

$$S_1(n, \delta) = \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1) > \varepsilon, T > n) - \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > nv),$$

и поэтому, учитывая справедливость соотношения (23) при  $v = 1$ , получаем, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{P}(T > n)} (\mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, v) > \varepsilon, T > nv) + S_1(n, \delta)) = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь  $S_2(n, \delta)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned}
 b_k(n, \delta) &= \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + k\delta) \leq \varepsilon, w_{Z_n}(\delta, 0, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta)) \\
 &\leq \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 1 + (k - 1)\delta, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + k\delta)) \\
 &= c_k(n, \delta) + d_k(n, \delta),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_k(n, \delta) &= \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 1 + (k - 1)\delta, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T > n(1 + (k + 1)\delta)), \\
 d_k(n, \delta) &= \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 1 + (k - 1)\delta, 1 + (k + 1)\delta) > \varepsilon, T \in (n(1 + k\delta), n(1 + (k + 1)\delta))).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$S_2(n, \delta) \leq S_3(n, \delta) + S_4(n, \delta), \quad (26)$$

где

$$S_3(n, \delta) = \sum_{k=0}^{k_0} c_k(n, \delta),$$

$$S_4(n, \delta) = \sum_{k=0}^{k_0} d_k(n, \delta).$$

Рассмотрим  $c_k(n, \delta)$ . Зафиксируем  $k$  между 0 и  $k_0$  и положим

$$1 + (k - 1)\delta = t_1, \quad 1 + (k + 1)\delta = t_2, \quad nt_2 = \tilde{n}.$$

Ясно, что

$$c_k(n, \delta) \leq 2\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [t_1, t_2]} |Z_n(t) - Z_n(t_2)| > \varepsilon/2, T > \tilde{n} \right)$$

$$= 2\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left| \frac{\ln \xi[\tilde{n}(t/t_2)]}{\sigma\sqrt{\tilde{n}}} - \frac{\ln \xi[\tilde{n}]}{\sigma\sqrt{\tilde{n}}} \right| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t_2}}; T > \tilde{n} \right),$$

но последняя вероятность, деленная на  $\mathbf{P}(T > \tilde{n})$ , ввиду соотношения (1) стремится при  $n \rightarrow \infty$  к

$$\mathbf{P} \left( \sup_{t \in [t_1, t_2]} |W^+(t/t_2) - W^+(1)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t_2}} \right) \leq \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-2\delta, 1]} |W^+(t) - W^+(1)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{v}} \right).$$

Следовательно, учитывая, что  $\mathbf{P}(T > n) \geq \mathbf{P}(T > \tilde{n})$ , получаем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_3(n, \delta)}{\mathbf{P}(T > n)} \leq \frac{v-1}{\delta} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [1-2\delta, 1]} |W^+(t) - W^+(1)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{v}} \right).$$

Применяя теперь лемму 3, приходим к равенству

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_3(n, \delta)}{\mathbf{P}(T > n)} = 0. \quad (27)$$

Наконец, рассмотрим  $d_k(n, \delta)$ . Очевидно, что

$$d_k(n, \delta) \leq \mathbf{P}(\exists s_1, s_2 \in [t_1, t_2]: Z_n(s_1) > \varepsilon, Z_n(s_2) = 0)$$

$$= \mathbf{P}(\exists n_1, n_2 \in [[nt_1], nt_2]: \xi_{n_1} > e^{\varepsilon\sigma\sqrt{\tilde{n}}} - 1, \xi_{n_2} = 0). \quad (28)$$

Положим

$$x(\varepsilon, n) = \exp(\varepsilon\sigma\sqrt{\tilde{n}}) - 1$$

и пусть  $\tilde{T}_x$  означает момент первого достижения полуоси  $(x, \infty)$  случайной последовательностью  $\{\xi_n, n \geq [nt_1]\}$ . Тогда

$$\mathbf{P}_\pi(\exists n_1, n_2 \in [[nt_1], nt_2]: \xi_{n_1} > x(\varepsilon, n), \xi_{n_2} = 0)$$

$$= \sum_{m, l} \mathbf{P}_\pi(\tilde{T}_{x(\varepsilon, n)} = m, \xi_m = l) (\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq nt_2 - m))^l, \quad (29)$$

где суммирование ведется по  $m \in [[nt_1], nt_2]$ ,  $l \in (x(\varepsilon, n), \infty)$ ,  $\mathbf{P}_\pi$  означает, что вероятность находится при фиксированной среде  $\{\pi_n\}$ , а  $\mathbf{P}_\pi^{(m)}$  означает, что рассматривается ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы из  $m$ -го поколения. Известно [9], что при  $n \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}_\pi(T \leq n) = 1 - \frac{1}{a_n + b_n},$$

откуда вытекает, что при  $m \in [[nt_1], nt_2]$ ,  $l \in (x(\varepsilon, n), \infty)$  и достаточно больших (в зависимости от  $\delta$ )  $n$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq nt_2 - m))^l &= \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(T \leq nt_2 - m))^l \\ &\leq \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(T \leq 3\delta n))^{x(\varepsilon, n)} \\ &\leq \mathbf{M}\left(1 - \frac{1}{a_{[3\delta n]} + b_{[3\delta n]}}\right)^{\exp(\varepsilon\sigma\sqrt{n})}. \end{aligned} \tag{30}$$

Из соотношений (28)–(30) получаем, что при достаточно больших  $n$

$$\begin{aligned} d_k(n, \delta) &\leq \sum_{m,l} \mathbf{P}(\bar{T}_{x(\varepsilon, n)} = m, \xi_m = l) \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq nt_2 - m))^l \\ &\leq \mathbf{M}\left(1 - \frac{1}{a_{[3\delta n]} + b_{[3\delta n]}}\right)^{\exp(\varepsilon\sigma\sqrt{n})} \mathbf{P}(T > nt_1). \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathbf{P}(T > n) \geq \mathbf{P}(T > nt_1)$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4(n, \delta)}{\mathbf{P}(T > n)} \leq \frac{v-1}{\delta} \mathbf{M}\left(1 - \frac{1}{a_{[3\delta n]} + b_{[3\delta n]}}\right)^{\exp(\varepsilon\sigma\sqrt{n})}$$

Применяя теперь лемму 4, приходим к равенству

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4(n, \delta)}{\mathbf{P}(T > n)} = 0. \tag{31}$$

Из соотношений (26), (27) и (31) вытекает, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2(n, \delta)}{\mathbf{P}(T > n)} = 0. \tag{32}$$

Из соотношений (24), (25) и (32) следует соотношение (23). Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (23) в силу теорем 15.1 и 15.5 из [3] получаем утверждение теоремы 3.

**Теорема 4.** В условиях теоремы 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{tT}{n}, t \in [0, \infty) \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t\tau, t \in [0, \infty)\}.$$

*Доказательство.* Поскольку вторая компонента линейно зависит от  $t$ , ввиду теоремы 3 достаточно доказать, что сходятся конечномерные распределения последовательности двумерных случайных процессов

$$\{Z_n(t), tT/n, t \in [0, \infty) \mid T > n\},$$

а для этого достаточно показать, что при любых фиксированных  $k \in \mathbf{N}$ , неотрицательных  $t_1, x_1, \dots, t_k, x_k$  и  $a$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k; T/n > a \mid T > n) \\ = \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) \leq x_i, i = 1, \dots, k; \tau > a). \end{aligned} \quad (33)$$

Если  $a \in (0, 1]$ , то при условии  $T > n$  автоматически выполняется неравенство  $T/n > a$ , кроме того, известно, что  $\tau > 1$ , поэтому (33) сразу следует из теоремы 3.

Пусть  $a > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, T/n > a \mid T > n) \\ = \frac{\mathbf{P}(T > an)}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}\left(\frac{\ln \xi_{[na(t_i/a)]}}{\sigma \sqrt{na}} \leq \frac{x_i}{\sqrt{a}}, i = 1, \dots, k \mid T > an\right). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду теоремы 3 и соотношения (19) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, T/n > a \mid T > n) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+((t_i/a) \wedge \tau) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (34)$$

По лемме 2 правые части соотношений (33) и (34) совпадают. Итак, доказана справедливость соотношения (33), а, следовательно, и теоремы 4.

Пусть  $D_0[0, \infty)$  — подмножество в  $D[0, \infty)$ , состоящее из всех неубывающих неотрицательных функций. Рассмотрим на  $D_0[0, \infty)$  топологию, индуцированную топологией Скорохода в  $D[0, \infty)$ . Пусть  $X_n$  и  $\Phi_n$  — случайные элементы  $D[0, \infty)$  и  $D_0[0, \infty)$  соответственно. Известно (см., например, [3]), что если

$$(X_n, \Phi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, \Phi)$$

и

$$\mathbf{P}(X \in C[0, \infty)) = \mathbf{P}(\Phi \in C[0, \infty)) = 1,$$

то

$$X_n \circ \Phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \circ \Phi$$

(здесь  $X_n \circ \Phi_n$  означает композицию  $X_n$  и  $\Phi_n$ ). В силу сказанного из теоремы 4 вытекает, что в условиях теоремы 1

$$\{\ln(\xi_{[tT]} + 1)/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, \infty) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+((t\tau) \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}.$$

В [6] (см. теорему 4) установлено, что совпадают конечномерные распределения процессов  $\{W^+(t\tau), t \in [0, 1]\}$  и  $\{W_0^+(t)/\alpha, t \in [0, 1]\}$ , где  $W_0^+(t)$  — броуновская экскурсия [2],  $\alpha$  — случайная величина, равномерно распределенная на  $(0, 1)$  и не зависящая от процесса  $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$ . Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 5.** В условиях теоремы 1

$$\{\ln(\xi_{[tT]} + 1)/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t)/\alpha, t \in [0, 1]\},$$

где  $\alpha$  — случайная величина, равномерно распределенная на  $(0, 1)$  и не зависящая от  $W_0^+$ .

4. Приступим к доказательству теоремы 1. Очевидно, что

$$\sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n = \sup_{t \in [0,1]} \xi_{[tT]},$$

поэтому достаточно показать, что при  $x \rightarrow \infty$

$$P(x) = \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > x \right) \sim \frac{c_0}{x}. \quad (35)$$

При любом фиксированном  $\varepsilon > 0$

$$P(x) = P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon), \quad (36)$$

где

$$P_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > x, T > \varepsilon x^2 \right),$$

$$P_2(x, \varepsilon) = \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > x, T \leq \varepsilon x^2 \right).$$

Сначала рассмотрим  $P_1(x, \varepsilon)$ . Очевидно, что

$$P_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) / (\sigma \sqrt{\varepsilon} x) > 1 / (\sigma \sqrt{\varepsilon}) \mid T > \varepsilon x^2 \right) \mathbf{P}(T > \varepsilon x^2),$$

и, следовательно, в силу теоремы 5 и соотношения (19)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x P_1(x, \varepsilon) = \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) / \alpha > 1 / (\sigma \sqrt{\varepsilon}) \right). \quad (37)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) / \alpha > 1 / (\sigma \sqrt{\varepsilon}) \right) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > u / (\sigma \sqrt{\varepsilon}) \right) du \\ &= \sigma \int_0^{1/(\sigma \sqrt{\varepsilon})} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > v \right) dv. \end{aligned} \quad (38)$$

Из соотношений (37), (38) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x P_1(x, \varepsilon) = \sigma c_2 \mathbf{M} \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t).$$

В [10] показано, что

$$\mathbf{M} \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) = \sqrt{\pi/2}.$$

Итак, установлено, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x P_1(x, \varepsilon) = c_0, \quad (39)$$

где  $c_0 = \sigma c_2 \sqrt{\pi/2}$ .

Теперь рассмотрим  $P_2(x, \varepsilon)$ . Очевидно, что

$$P_2(x, \varepsilon) = \mathbf{P} \left( \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > e^x - 1, T \leq \varepsilon x^2 \right).$$

Полагая

$$a = \exp x - 1, \quad T_a = \inf\{n \geq 0: \xi_n \in (a, \infty)\},$$

запишем, что

$$\mathbf{P}_\pi \left( \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > a, T \leq \varepsilon x^2 \right) = \sum_{m, l} \mathbf{P}_\pi(T_a = m, \xi_m = l) (\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq \varepsilon x^2 - m))^l,$$

где суммирование ведется по всем  $m \in [0, \varepsilon x^2]$ ,  $l \in (a, \infty)$ . Следовательно,

$$P_2(x, \varepsilon) = \sum_{m, l} \mathbf{P}(T_a = m, \xi_m = l) \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq \varepsilon x^2 - m))^l.$$

Так же, как при выводе соотношения (30), находим, что при  $m \in [0, \varepsilon x^2]$ ,  $l \in (a, \infty)$

$$\mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi^{(m)}(T \leq \varepsilon x^2 - m))^l \leq \mathbf{M} \left( 1 - \frac{1}{a_{[\varepsilon x^2]} + b_{[\varepsilon x^2]}} \right)^{\exp x - 1}.$$

Таким образом,

$$P_2(x, \varepsilon) \leq \mathbf{P} \left( \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > a \right) \mathbf{M} \left( 1 - \frac{1}{a_{[\varepsilon x^2]} + b_{[\varepsilon x^2]}} \right)^{\exp x - 1}.$$

Но последнее соотношение вследствие леммы 4 и определения  $P(x)$  означает, что

$$P_2(x, \varepsilon) = P(x) \alpha(x, \varepsilon), \quad (40)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \alpha(x, \varepsilon) = 0. \quad (41)$$

Из соотношений (36) и (40) вытекает, что

$$P_1(x, \varepsilon) \leq P(x) \leq P_1(x, \varepsilon) + \alpha(x, \varepsilon) P(x),$$

откуда при достаточно малых  $\varepsilon$  и достаточно больших (в зависимости от  $\varepsilon$ )  $x$  получаем, что

$$P_1(x, \varepsilon) \leq P(x) = \frac{P_1(x, \varepsilon)}{1 - \alpha(x, \varepsilon)}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x P_1(x, \varepsilon) &\leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x P(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x P(x) \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} x P_1(x, \varepsilon) \frac{1}{1 - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \alpha(x, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Применяя теперь соотношения (39) и (41), приходим к (35). Теорема 1 доказана  
Докажем теперь теорему 2. Очевидно, что

$$\sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \leq T \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n. \quad (42)$$

Для произвольного  $\varepsilon \in (0, 1)$  и  $x > 0$

$$\mathbf{P} \left( T \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > x \right) \leq \mathbf{P}(T > x^\varepsilon) + \mathbf{P} \left( \sup_n \xi_n > x^{1-\varepsilon} \right).$$

В силу соотношения (19) и теоремы 1, при  $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T > x^\varepsilon) &\sim \frac{c_2}{x^{\varepsilon/2}}, \\ \mathbf{P} \left( \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > x^{1-\varepsilon} \right) &\sim \frac{c_0}{(1-\varepsilon) \ln x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \ln x \mathbf{P} \left( T \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > x \right) \leq \frac{c_0}{1-\varepsilon}. \quad (43)$$

Ввиду соотношений (42), (43) и теоремы 1

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \mathbf{P} \left( \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > x \right) \\ &\leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \ln x \mathbf{P} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n > x \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \ln x \mathbf{P} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n > x \right) \leq \frac{c_0}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon \in (0, 1)$  произвольно, отсюда следует утверждение теоремы 2.

## Список литературы

1. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 52–67.
2. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller. D. R. Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 117–129.
3. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
4. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Докл. РАН* (1995) **344**, №1, 12–15.
5. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1984.
6. Hooghiemstra G. Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the M/G/1 queue. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №, 675–688.

7. Жакод Ж., Ширяев А. Н. *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. 1. Наука, Москва, 1994.
8. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
9. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, №1, 39–46.
10. Durrett R. T., Iglehart D. L. Functionals of brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 130–135.

Статья поступила 03.07.1998.