А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский, О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 12–19

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

О ПОВЕРХНОСТЯХ С МАКСИМАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ГРАССМАНОВА ОБРАЗА

А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский

1. Будем обозначать через $G(l, l+p)$ $(l \geqslant 2,\ p \geqslant 2)$ многообразие Грассмана l-мерных плоскостей в $l+p$-мерном евклидовом пространстве, проходящих через начало координат. Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — l-мерная регулярная поверхность. Построим в каждой точке поверхности F^l касательное пространство и перенесем его параллельно в начало координат $O \in E^{l+p}$. Множество полученных l-мерных плоскостей, рассматриваемых как точки многообразия Грассмана $G(l, l+p)$, назовем грассмановым образом поверхности F^l, а соответствующее отображение $\Gamma\colon F^l \to G(l, l+p)$ — отображением Грассмана. Мы будем дополнительно предполагать, что поверхность F^l имеет в каждой точке нулевой внешний нуль-индекс, т. е. не существует ненулевого касательного вектора, соответствующего нулевому собственному значению второй квадратичной формы поверхности относительно произвольной нормали. Это требование обеспечивает невырожденность грассманова отображения, т. е. $\Gamma(F^l)$ будет гладким подмногообразием размерности l в $G(l, l+p)$.

В настоящей работе мы будем рассматривать кривизну многообразия Грассмана вдоль двумерных площадок, касательных к грассманову образу поверхности. С такой точки зрения рассматривался грассманов образ поверхности в работах [1—3]. В [4] доказано, что кривизна многообразия Грассмана заключена в пределах [0, 2]. Естественно в связи с этим исследовать поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, для которых кривизна многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к их грассманову образу, минимальна, т. е. равна нулю, и максимальна — равна 2.

В [3] получено необходимое и достаточное условие равенства нулю кривизны многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к грассманову образу поверхности. А именно доказана

ТЕОРЕМА А. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная поверхность в евклидовом пространстве и ее грассманов образ невырожден. Секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ равна нулю вдоль любой двумерной площадки, касательной к $\Gamma(F^l)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $p \geqslant l$;

2) *поверхность* F^l — *плоское подмногообразие в* E^{l+p}, *т. е. секционная кривизна тождественно равна нулю*;

3) *нормальная связность поверхности* $F^l \subset E^{l+p}$ *плоская, т. е. первая и вторые квадратичные формы одновременно могут быть приведены к диагональному виду.*

Нами исследован вопрос о поверхностях, для которых кривизна многообразия Грассмана максимальна и равна 2, а именно, доказана

ТЕОРЕМА. *Пусть* $F^l \subset E^{l+p}$ $(l \geqslant 2, \quad p \geqslant 2)$ — *регулярная класса* C^2 l-*мерная поверхность в* $(l+p)$-*мерном евклидовом пространстве невырожденным грассмановым образом.*

Кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ *вдоль двумерных площадок, касательных к грассманову образу поверхности, тождественно равна* 2 *тогда и только тогда, когда* F^l *является двумерной минимальной поверхностью, эллипс нормальной кривизны которой в каждой точке является окружностью с центром на поверхности. При этом, если* $\mathbf{r}(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), \ldots$ $\ldots, x^{2+p}(u^1, u^2))$ — *радиус-вектор поверхности в конформных координатах и* $z = u^1 + iu^2$ — *комплексная координата на поверхности, то функции* $f^k(z) = \partial x^k/\partial z = \partial x^k/\partial u^1 - i\,\partial x^k/\partial u^2$ $(k = 1, 2, \ldots, p+2)$ *голоморфны в силу минимальности,* $\sum_{k=1}^{2+p} (f^k)^2 = 0$ *в силу конформности координат* u^1, u^2 *и* $\sum_{k=1}^{2+p} (\mathrm{d}f^k/\mathrm{d}z)^2 = 0$ *в силу условия на эллипс нормальной кривизны.*

В случае, когда коразмерность поверхности равна 2, *т. е.* $F^2 \subset E^4$, *она является комплексной кривой в* $\mathbf{C}^2$, *т. е. в некотором ортогональном базисе в* E^4 *ее радиус-вектор имеет вид* $w^1 = w^1(z)$, $w^2 = w^2(z)$, *причем* w^1 *и* w^2 *голоморфны и* $|\mathrm{d}w^1/\mathrm{d}z|^2 + |\mathrm{d}w^2/\mathrm{d}z|^2 \neq 0$.

Отметим, что при $p > 2$ поверхность $F^2 \subset E^{p+2}$, удовлетворяющая условиям теоремы, вообще говоря, не обязательно является комплексной кривой.

2. Прежде чем переходить к доказательству теоремы, мы изучим двумерные площадки, касательные к многообразию Грассмана, вдоль которых кривизна многообразия Грассмана равна 2.

Рассмотрим l-мерную плоскость L в E^{l+p}, проходящую через начало координат $O \in E^{l+p}$ и введем на $G(l, l+p)$ локальные координаты так, чтобы координаты L были равны 0. Многообразие Грассмана $G(l, l+p)$ имеет размерность pl, причем касательные pl-мерные векторы к $G(l, l+p)$ удобно представлять в виде $(p \times l)$-матриц. Пусть вектор T лежит в касательном пространстве $T_O G(l, l+p)$. Группой изотропии точки $O \in G(l, l+p)$ является $O(p) \times O(l)$. Если $S \in O(p)$ и $Q \in O(l)$, то отображение $S \times Q$: $E^{l+p} \to E^{l+p}$, сохраняющее плоскость L на месте, индуцирует автоморфизм изотропии касательного пространства $T_O G(l, l+p)$, который действует так: $(S \times Q)_* T = STQ \in T_O G(l, l+p)$. Этот автоморфизм сохраняет секционную кривизну.

В [4] получена формула для подсчета секционной кривизны многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ в точке O по двумерной площадке, натянутой на касательные векторы T_1 и $T_2 \in T_O G(l, l+p)$

$$k = \frac{(^1/_2)\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_1 \Lambda_1') + (^1/_2)\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_2 \Lambda_2')}{\mathrm{Tr}\,(T_1 T_1')\,\mathrm{Tr}\,(T_2 T_2') - (\mathrm{Tr}\,(T_1 T_2'))^2}, \qquad (1)$$

где $\Lambda_1 = T_1 T_2' - T_2 T_1'$, $\Lambda_2 = T_1' T_2 - T_2' T_1$ — кососимметрические $(p \times p)$ и $(l \times l)$-матрицы, Tr — след матрицы, $'$ — транспонирование.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Если кривизна многообразия Грассмана вдоль двумерной касательной площадки равна 2, то эта площадка единственна с точностью до автоморфизмов изотропии касательного пространства $T_O G(l, l+p)$ и приводится таким автоморфизмом к виду $T_1 \wedge T_2$,*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть кривизна вдоль площадки $T_1 \wedge T_2$ равна 2. Касательный вектор T_1 есть $(p \times l)$-матрица. Пусть $\mathrm{rg}\, T_1 = r \leqslant p, l$. Тогда ортогональными преобразованиями из $O(p)$ и $O(l)$ (т. е. некоторым автоморфизмом изотропии, действующим в $T_O G(l, l+p)$) T_1 можно привести к виду [5, с. 260]

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0).$$

Матрицу, полученную из T_2 этими же преобразованиями, по-прежнему будем обозначать T_2. Пусть

$$T_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & H \end{pmatrix}$$

где A, B, C и H — $(r \times r)$, $(r \times (l-r))$, $((p-r) \times r)$ и $((p-r) \times (l-r))$-матрицы соответственно, причем их элементы имеют те же индексы, которые они имели в T_2. Квадратными скобками с индексами будем обозначать соответствующий элемент матрицы.

Пользуясь формулой (1), найдем кривизну многообразия Грассмана вдоль площадки $T_1 \wedge T_2$. Имеем

$$[T_1 T_2']_{ij} = \begin{cases} 0, & i > r, \\ \lambda_i a_{ji}, & i \leqslant r, j \leqslant r, \\ \lambda_i c_{ji}, & i \leqslant r, j > r. \end{cases}$$

Тогда

$$[\Lambda_1]_{ij} = \begin{cases} 0, & i > r,\ j > r, \\ \lambda_i c_{ji}, & i \leqslant r,\ j > r, \\ -\lambda_j c_{ij}, & i > r,\ j \leqslant r, \\ \lambda_i a_{ji} - \lambda_j a_{ij}, & i \leqslant r,\ j \leqslant r. \end{cases}$$

Значит,

$$(^1/_2)\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_1\Lambda_1') = \sum\nolimits_{r\geqslant i>j\geqslant 1}(\lambda_i a_{ji} - \lambda_j a_{ij})^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{k=r+1}^{p}(\lambda_i c_{ki})^2.$$

Аналогично

$$(^1/_2)\,\mathrm{Tr}\,(\Lambda_2\Lambda_2') = \sum\nolimits_{r\geqslant i>j\geqslant 1}(\lambda_i a_{ij} - \lambda_j a_{ji})^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{r}\sum\nolimits_{s=r+1}^{l}(\lambda_i b_{is})^2.$$

Вычисляя знаменатель в формуле (1), получаем

$$\left(\sum\nolimits_{q=1}^{r}\lambda_q^2\right)\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}a_{ii}^2\right) - \left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}\lambda_i a_{ii}\right)^2 + \left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}\lambda_i^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum\nolimits_{i,\,s}b_{is}^2 + \sum\nolimits_{k,\,i}c_{ki}^2 + \sum\nolimits_{k,\,s}h_{ks}^2 + \sum\nolimits_{r\geqslant i>j\geqslant 1}(a_{ij}^2 + a_{ji}^2)\right).$$

Вычитая из удвоенного знаменателя формулы (1) ее числитель, получим

$$2\sum\nolimits_{i=1}^{r}\lambda_i^2\cdot\sum\nolimits_{k,\,s}h_{ks}^2 + \sum\nolimits_{k,\,i}c_{ki}^2\left(2\sum\nolimits_{q=1}^{r}\lambda_q^2 - \lambda_i^2\right) + \sum\nolimits_{i,\,s}b_{is}^2\cdot$$
$$\cdot\left(2\sum\nolimits_{q=1}^{r}\lambda_q^2 - \lambda_i^2\right) + 2\left(\sum\nolimits_{q=1}^{r}\lambda_q^2\cdot\sum\nolimits_{i=1}^{r}a_{ii}^2 - \left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}\lambda_i a_{ii}\right)^2\right) +$$
$$+ \sum\nolimits_{1\leqslant j<i\leqslant r}\left[(a_{ij}^2 + a_{ji}^2)\left(2\sum\nolimits_{q=1}^{r}\lambda_q^2 - \lambda_i^2 - \lambda_j^2\right) + 4a_{ij}a_{ji}\lambda_i\lambda_j\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно

$$2\,(a_{ij}^2 + a_{ji}^2)\sum\nolimits_{q\neq i,\,j}\lambda_q^2 + (\lambda_i a_{ij} + \lambda_j a_{ji})^2 + (\lambda_i a_{ji} + \lambda_j a_{ij})^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, кривизна не превышает 2. Для того чтобы кривизна равнялась 2, необходимо, чтобы h_{ks}, b_{is}, c_{ki} были равны нулю и чтобы векторы $\{\lambda_i\}_{i=1}^{r}$ и $\{a_{ii}\}_{i=1}^{r}$ были коллинеарны. В этом случае можно считать, что вектор T_2 выбран в площадке так, что $a_{ii} = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, r$. Кроме того, надо потребовать, чтобы при любых $1 \leqslant i < j \leqslant r$

$$2\,(a_{ij}^2 + a_{ji}^2)\sum\nolimits_{q\neq i,\,j}\lambda_q^2 + (\lambda_i a_{ij} + \lambda_j a_{ji})^2 + (\lambda_i a_{ji} + \lambda_j a_{ij})^2 = 0. \quad (2)$$

Если $r > 2$, то $\sum_{q\neq i,j}\lambda_q^2 > 0$ и, значит, $a_{ij} = a_{ji} = 0$, т. е. $T_2 = 0$. Если $r = 1$, то $a_{ij} = 0$ при любых $i > 1$, $j > 1$. Тогда при $i = 1$, $j = 2, 3, \ldots, r$ уравнение (2) имеет вид $\lambda_1^2\,(a_{1j}^2 + a_{j1}^2) = 0$, откуда $a_{1j} = a_{j1} = 0$ и, значит, $T_2 = 0$.

Пусть теперь $r = 2$. Из (2) получаем, что все a_{ij} кроме, быть может, a_{12} и a_{21} равны нулю и

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} = 0, \quad \lambda_2 a_{12} + \lambda_1 a_{21} = 0,$$

причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$ и хотя бы одно из чисел a_{12}, a_{21} не равно нулю. Отсюда получаем $\lambda_1 = \lambda_2$, $a_{12} = -a_{21}$. Домножая T_1 на $1/\lambda_1$, а T_2 — на $1/a_{12}$, получаем требуемое. Лемма 1 доказана.

Из доказательства леммы 1 следует, что для произвольного вектора из касательного пространства $T_O G(l, l+p)$ к многообразию Грассмана существует не более одной двумерной площадки, проходящей через него, кривизна вдоль которой равна 2. В частности, имеет место

ЛЕММА 2. *В касательном пространстве к многообразию Грассмана не существует трехмерного подпространства такого, что секционная кривизна многообразия Грассмана по любой двумерной площадке, лежащей в этом подпространстве, равна* 2.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим теперь поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ такие, что кривизна многообразия Грассмана по любой двумерной площадке, касательной к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ равна 2.

Будем считать, что начало координат $O \in F^l$, касательная плоскость $T_O F^l$ как точка многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ имеет координаты, равные нулю, и в $T_O F^l$ выбран ортогональный базис. Пусть $H^1, H^2, \ldots, H^p$ — матрицы вторых квадратичных форм поверхности F^l в точке O относительно ортонормированного базиса нормалей. Тогда касательное пространство к $\Gamma(F^l)$ в точке $O \in G(l, l+p)$ есть l-мерное пространство, натянутое на векторы

$$Z_j = \begin{pmatrix} H^1_{j1} & H^1_{j2} & \ldots & H^1_{jl} \\ H^2_{j1} & H^2_{j2} & \ldots & H^2_{jl} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H^p_{j1} & H^p_{j2} & \ldots & H^p_{jl} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

в $T_O G(l, l+p)$, где H^μ_{ji} $(\mu = 1, 2, \ldots, p;\ i, j = 1, 2, \ldots, l)$ — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности F^l в точке O. Поскольку грассманов образ поверхности F^l невырожден, а, потому, имеет размерность l, то из леммы 2 немедленно получаем, что если кривизна $G(l, l+p)$ вдоль любой площадки, касательной к $\Gamma(F^l)$ равна 2, то поверхность F^l двумерна, т. е. $l = 2$.

Касательное пространство к $\Gamma(F^l)$ натянуто на два вектора

$$Z_1 = \begin{pmatrix} H^1_{11} & H^1_{12} \\ \cdot & \cdot \\ H^p_{11} & H^p_{12} \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} H^1_{12} & H^1_{22} \\ \cdot & \cdot \\ H^p_{12} & H^p_{22} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 следует, что векторы Z_1 и Z_2 должны быть линейными комбинациями векторов ST_1Q и ST_2Q, где $S \in O(p)$, $Q \in O(2)$ и

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно получить, что в этом случае ортогональными заменами базиса в касательном и нормальном пространствах вторые квадратичные формы поверхности приводятся к виду

$$H^1 = c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad H^2 = c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad H^3 = \ldots = H^p = 0, \qquad (3)$$

$c \neq 0$.

Поскольку средняя кривизна равна нулю, то поверхность $F^2 \subset \subset E^{2+p}$ минимальна. Далее, если $\{n^\mu\}_{\mu=1}^p$ — ортонормированный базис нормалей к поверхности, то эллипс нормальной кривизны имеет радиус-вектор

$$n^1 \cdot c\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + n^2\cdot c\,(2\cos\varphi\sin\varphi) = n^1\cdot c\cos 2\varphi + n^2\cdot c\sin 2\varphi,$$

т. е. является окружностью радиуса $|c| > 0$ с центром на поверхности.

Выберем на поверхности конформные координаты (u^1, u^2). Пусть $r(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), \ldots, x^{p+2}(u^1, u^2))$ — радиус-вектор поверхности. Рассмотрим комплексные функции $f^k(z) = \partial x^k/\partial u^1 - i\,\partial x^k/\partial u^2 = \partial x^k/\partial z$, где $z = u^1 + iu^2$ — комплексная координата на поверхности F^2. Для компонент первой квадратичной формы положим $g(z) = g_{11} = g_{22}$. Система координат — конформна, т. е.

$$\sum_{k=1}^{p+2} (f^k)^2 = 0. \qquad (4)$$

Обозначим через $r_{ij}^\perp$ нормальную компоненту вектора, $\partial^2 r/\partial u^i \partial u^j$. Тогда коэффициенты вторых квадратичных форм имеют вид $H_{ij}^\mu = \langle r_{ij}^\perp, n^\mu\rangle$, где $\{n^\mu\}_{\mu=1}^p$ — ортонормированный базис нормалей к поверхности, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в E^{2+p}. То, что ортогональным преобразованием базиса можно привести вторые квадратичные формы к виду (3), означает, что:

$$1)\ H_{11}^\mu + H_{22}^\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p),$$

$$2)\ \sum_\mu H_{11}^\mu H_{12}^\mu = 0, \qquad (5)$$

$$3)\ \sum_\mu (H_{11}^\mu)^2 = \sum_\mu (H_{12}^\mu)^2 > 0.$$

Условие 1) есть условие минимальности поверхности и в случае конформных координат оно эквивалентно голоморфности функций $f^k(z)$. Рассмотрим условия 2) и 3). Для поверхности, заданной в конформных координатах, символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^1},$$
$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^2}. \qquad (6)$$

Из 2) имеем $\sum_\mu \langle r_{11}^\perp, n^\mu\rangle \langle r_{12}^\perp, \quad n^\mu\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle r_{11}^\perp, r_{12}^\perp\rangle = 0$, так как векторы $r_{ij}^\perp$ лежат в нормальном пространстве, а $\{n^\mu\}_{\mu=1}^p$ образуют в нем ортонормированный базис. Теперь имеем

$$\frac{\partial^2 r}{(\partial u^1)^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial r}{\partial u^2} + r_{11}^\perp,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial r}{\partial u^2} + r_{12}^\perp.$$

Отсюда

$$\left\langle \frac{\partial^2 r}{(\partial u^1)^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2}\right\rangle = \left\langle \Gamma_{11}^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial r}{\partial u^2},\right.$$

$$\left.\Gamma_{12}^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial r}{\partial u^2}\right\rangle = (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2)\, g = 0,$$

что видно из (6). Это означает, что

$$\sum_k \frac{\partial^2 x^k}{(\partial u^1)^2} \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^1 \partial u^2} = 0 \Rightarrow \sum_k \frac{\partial (\operatorname{Re} f^k)}{\partial u^1} \frac{\partial (\operatorname{Im} f^k)}{\partial u^1} = 0. \qquad (7)$$

Аналогично из 3) получаем

$$\sum_k \left[\left(\frac{\partial (\operatorname{Re} f^k)}{\partial u^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial (\operatorname{Im} f^k)}{\partial u^1}\right)^2\right] = 0. \qquad (8)$$

Но $\dfrac{\partial (\operatorname{Re} f^k)}{\partial u^1} = \operatorname{Re} \dfrac{df^k}{dz}$, $\dfrac{\partial (\operatorname{Im} f^k)}{\partial u^1} = \operatorname{Im} \dfrac{df^k}{dz}$.

Тогда (7) и (8) запишутся так:

$$\sum_k \left(\operatorname{Re} \frac{df^k}{dz}\right)\left(\operatorname{Im} \frac{df^k}{dz}\right) = 0, \qquad (7')$$

$$\sum_k \left[\left(\operatorname{Re} \frac{df^k}{dz}\right)^2 - \left(\operatorname{Im} \frac{df^k}{dz}\right)^2\right] = 0. \qquad (8')$$

Складывая (8′) и (7′), умножая на $2i$, получаем

$$\sum_k \left[\left(\operatorname{Re} \frac{df^k}{dz}\right)^2 - \left(\operatorname{Im} \frac{df^k}{dz}\right)^2 + 2i\left(\operatorname{Re} \frac{df^k}{dz}\right)\left(\operatorname{Im} \frac{df^k}{dz}\right)\right] = 0$$

или

$$\sum_k \left(\frac{df^k}{dz}\right)^2 = 0. \qquad (9)$$

Теорема полностью доказана, поскольку, как показано в [6], если поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет в каждой точке эллипсом нормальной кривизны окружность с центром в этой точке, то поверхность F^2 является комплексной кривой в $\mathbf{C}^2$, рассматриваемом как E^4 с некоторой комплексной структурой.

Однако класс поверхностей, рассматриваемых в теореме, в случае коразмерности $p > 2$ шире класса комплексных кривых. Действительно, поскольку голоморфные функции f^s определяют гар-

монические компоненты x^s радиус-вектора с точностью до констанаты, то для задания поверхности достаточно задать $p+2$ голоморфных функций f^s, удовлетворяющих двум условиям (4) и (9). Учитывая еще, что конформные координаты определены с точностью до голоморфной замены комплексной переменной, приходим к выводу, что поверхность задается $p-1$ голоморфными функциями.

С другой стороны, комплексная кривая $F^2 \subset \mathbf{C}^2 \subset E^{p+2}$ задается r голоморфными функциями, причем $2r \leqslant p+2$, откуда $r \leqslant [p/2]+1$ ($[\cdot]$ здесь означает целую часть). Здесь тоже надо учесть возможность голоморфной замены координат, поэтому имеем не более $[p/2]$ голоморфных функций. Нетрудно видеть, что при $p>2$ будет $p-1>p/2 \geqslant [p/2]$.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступило 23.03.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О грассмановом образе трехмерных поверхностей // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом». Тезисы докладов. Новосибирск, 28—30 сентября 1987 г. Новосибирск, 1987.
[2] Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Украинский геометрический сборник. 1980. Вып. 23. С. 3—16.
[3] Muto Y. The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space // J. Math. Soc. Japan. 1978. V. 30. P. 85—100.
[4] Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 1968. V. 60, N 1. P. 75—79.
[5] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
[6] Kommerell K. Riemannsche Flachen im ebenen Raum von vier Dimensionen // Math. Ann. 1905. Bd 60. S. 546—596.