П. И. Плотников, Существование пространственных волн на поверхности идеальной жидкости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1979, том 84, 211–219

П.И.Плотников

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

I. Задача о пространственных волнах конечной амплитуды на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости формулируется следующим образом [I], [2]. Для всех значений параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ требуется найти в пространстве точек $x=(x_1,x_2,x_3)$ поверхность S с графиком

$$x_3=\varepsilon\cos k_1x_1\cos k_2x_2+\eta(\varepsilon,x_1,x_2)\equiv Z(\varepsilon,x_1,x_2)$$

и функцию $\varphi(\varepsilon,x)$, гармоническую по x в слое $\mathcal{D}:\{-h<x_3<Z\}$, так чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\quad |\nabla\varphi|^2+2\lambda x_3=p \quad \text{на } S,$$

$$\varphi_{x_3}=0 \qquad \text{при} \quad x_3=-h \tag{I}$$

$$\|\eta\|_{C_3(R^2)}\leqslant const\cdot\varepsilon^2, \tag{2}$$

а функции $\eta, x_1-\varphi(\varepsilon,x)$ были бы 2π - периодическими по переменным x_1, x_2. Здесь $k=(k_1,k_2)$ - волновой вектор с целочисленными компонентами, n - нормаль к S, λ, p - неизвестные постоянные.

В настоящее время отсутствуют какие-либо точные результаты, относящиеся к задаче о трехмерных волнах. Ряд приближенных решений задачи (I)-(2) построен в [I], [3].

Пусть Λ - множество пар положительных чисел (λ_0, h) обладающих следующими свойствами: λ_0 - рационально, в решетке целочисленных векторов дисперсионное уравнение

$$k_1^2-\lambda_0|k|\,th(h|k|)=0 \tag{3}$$

имеет единственное решение k с целыми $k_i>0$. (Множество Λ не пусто оно содержит, например, пару $\lambda_0=1/2$, $h=\frac{1}{\sqrt5}\ln(2+\sqrt5)$, соответствующий волновой вектор $k=(I,2)$). Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение о разрешимости задачи (I)-(2):

ТЕОРЕМА I. Пусть $(\lambda_0, h) \in \Lambda$, волновой вектор k является решением (3), целое число $r \geqslant 3$. Тогда существуют положительные постоянные ε_0, c_0 такие, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задача (I)-(2) имеет по крайней мере одно решение, для которого справедлива оценка

$$\|\eta\|_{C_r(R^2)} + |\lambda - \lambda_0| + |1 - p| \leqslant c_0 \varepsilon^2.$$

Главным препятствием на пути к доказательству теоремы I является то, что в пространстве периодических функций линейная задача теории волн [I],

$$u_{x_1 x_1} + \lambda u_{x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0, \; u_{x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = -h \tag{4}$$

для гармонической функции u - линеаризация задачи (I) на тривиальном решении $\eta = 0$, $\varphi = x_1$ обладает непрерывным спектром. Существует, [4], всюду плотное на положительной полуоси множество значений параметра λ, для которых (4) имеет нетривиальное ядро. Решение задачи (I) с помощью разложений в ряды по степеням ε приводит к появлению малых знаменателей, что ставит под сомнение сходимость этих рядов. Доказательство теоремы I проводится с помощью метода ускоренной сходимости и опирается на теорему Нэша-Мозера, [5].

2. Сведение задачи со свободной границей к операторному уравнению. Для решения уравнений (I) удобно преобразовать их к новым переменным, [2], "распрямив линии тока", (аналогичный подход был применен в [I]). С этой целью введем в рассмотрение функции $\xi_i(x)$ связанные с потенциалом соотношениями

$$\xi_1 = \varphi, \; \sigma^{-1} \nabla \xi_1 - \nabla \xi_2 \times \nabla \xi_3 = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$\xi_3 = 0 \;\text{ на } S, \qquad \xi_3 = -h \quad \text{при} \quad x_3 = -h,$$

где σ - искомая постоянная. Выбор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в качестве независимого переменного приводит к следующей краевой задаче для вектор-функции $x(\xi)$ в слое Ω, ограниченном плоскостями $\Gamma_1 : \xi_3 = 0$, $\Gamma_2 : \xi_3 = -h$,

$$L_0(\sigma, x) \equiv \sigma x_{\xi_1} - x_{\xi_2} \times x_{\xi_3} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$L_1(p,\lambda,x) \equiv |x_{\xi_1}|^{-2} + 2\lambda x_3 - p = 0 \quad \text{на } \Gamma_1', \tag{5}$$

$$x_3 = -h \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Для того, чтобы обеспечить устойчивость решений линеаризированных уравнений, [4], добавим к (5) скалярное соотношение, определяющее параметр λ :

$$\Phi(\lambda,x) \equiv \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(Q\,d\xi_1)^2 d\xi_2\right\}^{-1} = \lambda_0. \tag{6}$$

Здесь $Q(\xi_1,\xi_2)$ - периодическая функция, определенная равенствами

$$(\det A)^{-1/4} a^{1/2}\Big|_{\Gamma_1} = Q, \qquad \frac{|x_{\xi_1}|^2}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_3}L_1(p,\lambda,x)\Big|_{\Gamma_1} = a, \tag{7}$$

в которых A симметричная матрица с элементами

$$A_{11} = 1, \quad A_{1i} = 0, \quad A_{ij} = |x_{\xi_1}|^{-2}(x_{\xi_i}, x_{\xi_j}), \quad i,j = 2,3.$$

Уравнения (5)-(6) образуют краевую задачу для $x(\xi)$ и параметров σ, p, λ , которая ляжет в основу дальнейших рассмотрений. Согласно [I],[3] эта задача имеет приближенное решение

$$x = x_0(\varepsilon,\xi) + \varepsilon^2 x_1(\xi), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1, \quad \sigma = 1 + \varepsilon^2\sigma_1, \quad p = 1 + \varepsilon^2 p_1,$$

удовлетворяющее (5)-(6) с точностью до порядка $O(\varepsilon^3)$. Вектор-функция x_0 задается формулами

$$x_0 = \xi + \varepsilon T_1 \nabla F(\xi), \quad F(\xi) = \cos k_1\xi_1 \cos k_2\xi_2 \,\mathrm{ch}(|k|(h+\xi_3)),$$

$$T_i = \mathrm{diag}\{(-1)^i, (-1)^{i-1}, 1\},$$

компоненты вектор-функции x_1 являются тригонометрическими полиномами от ξ_1, ξ_2 с коэффициентами, аналитически зависящими от ξ_3.

Из формул замены переменных непосредственно вытекает, что каждое решение (5)-(6) с 2π - периодической по ξ_1, ξ_2 вектор-функцией $x - x_0$, удовлетворяющей неравенству

$\|x-x_0\|_{C_3(\Omega)} \leqslant c\cdot\varepsilon^2$ дает решение задачи (I)-(2) со свободной поверхностью, заданной в параметрической форме уравнением $x=x(\xi_1,\xi_2,0)$. Будем искать точное решение (5)-(6) в виде

$$x=x_0+u,\quad \sigma=1+\alpha_1,\quad \lambda=\lambda_0+\alpha_2,\quad p=1+2\lambda_0(\omega,\alpha), \tag{8}$$

где α_i, $i=1,\dots,3$ – компоненты нового искомого вектора α, постоянный вектор $\omega=(0,-(2\lambda_0|k|)^{-1}sh\,2|k|h,\ |k|^{-2}ch|k|h)$.

Обозначим через $C^{\pm}$ линейные пространства непрерывных, 2π-периодических по ξ_1,ξ_2 отображений $u^{\pm}:\Omega\to R^3$, удовлетворяющих условиям симметрии

$$u^{\pm}(T_i\xi)=(\pm1)^i T_i u^{\pm}(\xi),\quad i=1,2.$$

Пусть E_τ – банахово пространство векторов $z=(u,\alpha)\in C^+\times R^3$ с компонентами $u_3=0$ на Γ_2, обладающих конечной нормой

$$\|z\|_\tau=\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{C_\tau(\Omega)}+|\alpha|.$$

через F_p обозначим банахово пространство векторов $g=(g_0,g_1,\varkappa)\in C^-\times C_p(\Gamma_1)\times R^1$ с четной 2π-периодической функцией g_1, обладающих конечной нормой

$$|g|_p=\sum_{i=1}^{3}\|g_{o,i}\|_{C_p(\Omega)}+\|g_1\|_{C_p(\Gamma_1)}+|\varkappa|.$$

Введем в рассмотрение отображение $f(\varepsilon,z)$, которое каждому элементу $z=(u,\alpha)$ ставит в соответствие, с учетом формул (8), вектор $\{L_0(\sigma,x),\ L_1(p,\lambda,x),\ \varepsilon\Phi(\lambda,x)-\varepsilon\lambda_0\}$. Тогда задача (5)-(6) в пространстве E_τ может быть записана в виде одного равносильного ей операторного уравнения

$$f(\varepsilon,z)=0. \tag{9}$$

Из известных, [6], оценок суперпозиций гладких функций вытекает, что при $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_1(\tau)$ оператор $f:E_\tau\to F_{\tau-1}$, $\tau\geqslant3$, трижды непрерывно дифференцируем в шаре $B:\|z\|_\tau<1/2$. Согласно [7] для доказательства разрешимости уравнения (9) достаточно установить, что f удовлетворяет следующему условию: существуют числа $\tau_0\geqslant t$, $\mathcal{T}_0\geqslant0$ такие, что для всех $\tau\geqslant\tau_0$, $\mathcal{T}\leqslant p\leqslant\tau-t$,

$\tau \geqslant \tau_0$ в области $B \times [0, \varepsilon_1)$ определен линейный оператор $M(\varepsilon, z): E_r \to F_\rho$, удовлетворяющий неравенствам

$$|M(\varepsilon,z)y|_\rho \leqslant c\|y\|_r, \tag{10}$$

$$|M(\varepsilon,z)y - f'(\varepsilon,z)y|_\rho \leqslant c|f(\varepsilon,z)|_r \|y\|_r.$$

Если $z \in E_{r+\ell}$, $\ell \geqslant 0$, лежит в шаре $\|z\|_r \leqslant \varepsilon^\gamma$, $0 < \varepsilon < \delta(r,\ell)$, то линейное уравнение $M(\varepsilon,z)y = g$ с произвольной правой частью $g \in F_{\rho+\ell}$ имеет решение, для которого справедливы оценки

$$\|y\|_{\rho-\tau+\ell} \leqslant c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}|g|_\rho + |g|_{\rho+\ell} + \|z\|_{r+\ell}\right) P(\|y\|_{\rho-\tau}),$$
$$\|y\|_{\rho-\tau} \leqslant \frac{c}{\varepsilon}|g|_\rho. \tag{11}$$

Здесь $\gamma \in (1,2)$ – фиксированное число, постоянные c не зависят от выбора ε и элементов $g, z, P \in C_{\ell oc}(R^1)$.

Тогда, [7], найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ уравнение (9) имеет по крайней мере одно решение, для которого справедлива оценка $\|z\|_r \leqslant c \cdot \varepsilon^2$.

3. Таким образом, для доказательства теоремы I достаточно построить оператор M, удовлетворяющий условиям (10)-(11). С этой целью для $z \in B$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ определим линейное отображение $M_0(\varepsilon, z): E_{r-2} \to F_{r-3}$, которое каждому элементу $y = (w, \beta)$ ставит в соответствие вектор $\{N_0 y, N_1 y, \beta_2\}$. Линейные дифференциальные операторы N_j задаются равенствами

$$q_0 N_0 y = A^{-1} \nabla v_1 - e_2 X \nabla v_3 + e_3 X \nabla v_2 + \sigma^{-1} \beta_1 e_1,$$

$$q_1 N_1 y = -\frac{1}{a_1} v_{1,\xi_1} + v_3 + \varepsilon \beta_3 q_2 - (\omega, \beta),$$

где

$$v = J^{-1} w, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\Phi(x,\lambda)} a, \quad q_0 = \sigma^{-1} J^{-1},$$
$$q_1 = |x_{\xi_1}|^2 a^{-1}, \quad q_2 = \cos k_1 \xi_1 \cdot \cos k_2 \xi_2, \tag{12}$$

$\mathcal{J}$ - матрица Якоби отображения $x(\xi)$, e_i - векторы ортонормированного базиса в R^3, матрица A, коэффициент a и вектор-функция $x(\xi)$ выражаются через z по формулам (7)-(8). Следующее утверждение показывает, что с точностью до несущественных малых слагаемых оператор M_0 совпадает с производной $f'(\varepsilon,z)$:

ЛЕММА I. Пусть произвольное число $\gamma\in(1,2)$ целые числа $r\geqslant 5$, $\ell\geqslant 0$. Тогда для всех $z\in E_{r+\ell}$, лежащих в шаре $\|z\|_r\leqslant\leqslant\varepsilon^\gamma$, при $0\leqslant\varepsilon<\delta(r,\ell)$ определен конечномерный линейный оператор $\varphi(\varepsilon,z)$ такой, что

$$|\varphi(\varepsilon,z)y|_{r-2}\leqslant\varepsilon^\gamma c\|y\|_2,\quad |\varphi(\varepsilon,z)y|_{r+\ell-3}\leqslant c(1+\|z\|_{r+\ell})\|y\|_2$$

$$|f'(\varepsilon,z)y-M_0(\varepsilon,z)y-\varphi(\varepsilon,z)y|_{r-5}\leqslant c|f(\varepsilon,z)|_r\|y\|_r .$$

Доказательство леммы состоит в непосредственном вычислении $f'(\varepsilon,z)$ и опирается на оценки суперпозиций гладких функций работы [6]. Чтобы проверить, что отображение $M=M_0+\varphi$ удовлетворяет условиям (I0)-(II) рассмотрим уравнение

$$M_0(\varepsilon,z)y=g,\quad g=(g_0,g_1,\varkappa)\in F_p. \tag{I3}$$

Замечательным свойством переменных является то, что (I3) можно свести к краевой задаче для функции v_1, заданной соотношениями (I2) и параметра β_3 - близкой к линейной задаче теории волн (4):

$$\operatorname{div}(A^{-1}\nabla v_1-G_0)=0 \quad \text{в} \quad \Omega;$$

$$\Big(\frac{1}{a_0}v_{1,\xi_1}\Big)_{\xi_1}+\big(A^{-1}\nabla v_1-G_0,e_3\big)=(\varepsilon\beta_3 q_2-G_1)_{\xi_1} \quad \text{на}\ \Gamma_1 \tag{I4}$$

$$(A^{-1}\nabla v_1-G_0,e_3)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2,$$

где $G_i=q_i g_i$. После решения (I4) остальные компоненты вектор-функций v восстанавливаются по v_1 квадратурами из соотношений

$$v_{i,\xi_1}=-(A^{-1}\nabla v_1-G_0,e_i),\quad i=2,3. \tag{I5}$$

правые части которых нечетны по ξ_1 в силу выбора шкалы пространств E_r. Произвол, возникающий при интегрировании, устраняется с помощью условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_2\, d\xi_1 = \int_0^{\xi_2} P_1(\xi_2)\, d\xi_2 , \quad \int_{-\pi}^{\pi} v_3\, d\xi_1 = \int_{-h}^{\xi_3} (P_0 - P_1)\, d\xi_3 , \tag{I6}$$

где

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} P_0\, d\xi_3 - \frac{1}{h}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{a_0} v_{1,\xi_1} + (\omega,\beta) + G_1\Big) d\xi_1\Big)\Big|_{\Gamma_1} = P_1 ,$$

$$\frac{2\pi\beta_1}{\sigma} - \int_{-\pi}^{\pi} G_{0,1}\, d\xi_1 = P_0 .$$

В силу (I3) постоянная $\beta_2 = \varkappa$, β_1 однозначно находится из (I6) и условий периодичности v_i. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что если элемент $(v,\beta) \in E_3$ удовлетворяет (I4)-(I6), то $y = (\mathcal{J} v, \beta)$ является решением уравнения (I3).

Из результатов работы [4] , условия (6) и выражения для коэффициента a_0 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи (I4):

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия леммы I и неравенства $r > p + 25$, $p \geqslant \tau + 4$, $\tau \geqslant 5$, $\ell \geqslant 0$. Тогда при $0 < \varepsilon < \delta(r, \ell)$, $g \in F_{p+\ell}$ задача (I4) в классе 2π-периодических, четных по ξ_2, нечетных по ξ_1 функций имеет единственное решение $v_1 \in C_{p-\tau+\ell+1}(\Omega)$, удовлетворяющее условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_1 \sin k_1\xi_1 \cos k_2\xi_2\, d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 .$$

Справедливы оценки:

$$\|v_1\|_{C_{p-\tau+1}(\Omega)} + \varepsilon|\beta_3| \leqslant c|g|_p ,$$

$$\|v_1\|_{C_{p-\tau+\ell+1}(\Omega)} \leqslant c\big[1 + \|z\|_{r+\ell} + |g|_{p+\ell}\big]\, P\big(\|v_1\|_{C_{p-\tau}(\Omega)}\big).$$

Отсюда, из формул (I5),(I6) и оценок суперпозиций гладких функций вытекает, что в условиях теоремы 2 уравнение (I3) имеет решение, для которого выполнены оценки (II). Следовательно, в силу леммы I и принципа сжатых отображений, оператор $M = M_0 + \psi$ удовлетворяет условиям (I0),(II) с показателями $\tau_0 = 35$, $t = 26$, $\tau_0 = 5$. Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $\tau \geqslant 35$ существуют положительные постоянные ε_0, c_0 такие, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задача (5)-(6) имеет по крайней мере одно решение x такое, что

$$\|x - x_0\|_{C_\tau(\Omega)} \leqslant C_0 \varepsilon^2.$$

Поскольку при малых ε отображение x является диффеоморфизмом, то утверждение теоремы I является следствием теоремы 3.

О выборе параметров. В отличие от двумерных задач теории волн,[I], в условиях теоремы I искомыми являются два параметра-давление на открытой поверхности жидкости p и число λ связанное со скоростью распространения волны. Давление p находится, как обычно, из уравнения разветвления. Величина λ определяется из соотношения (6), которое не имеет аналога в плоском случае. Оно выражает условие устойчивости линеаризированной задачи, сформулированное [4], и устанавливает связь между геометрическими характеристиками свободной поверхности S и значениями λ, p.

Соотношение (6) допускает следующую инвариантную формулировку:

Выделим класс параметризаций $S: x = x(q^1, q^2)$ таких, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм S -

$$a(dq) = a_{\mu\nu}\, dq^\mu dq^\nu, \quad b(dq) = b_{\mu\nu}\, dq^\mu dq^\nu$$

являются 2π -периодическими функциями q^1, q^2. Тогда S может быть отождествлена с двумерным тором. Рассмотрим задачу о движении тяжелой материальной точки по S, описываемую гамильтоновой системой:

$$\dot{q}^\nu = -H_{p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = H_{q^\nu}, \quad H = \frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \lambda x_3(q^1, q^2). \qquad (I7)$$

Условие (6) равносильно следующему: Система (I7) имеет двумерный инвариантный тор T, лежащий на множестве уровня энергии $H = \frac{p}{2}$ и состоящий из замкнутых траекторий Γ. Существуют канонические переменные $\tilde{q}, \tilde{p}$, в которых T задается уравнениями $\tilde{p}_1 = 1$, $\tilde{p}_2 = 0$ и выполняется равенство:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{q}^2 \left(\oint_{\Gamma} \sqrt{\tilde{a}_{22} |b_0(\dot{\tilde{q}})|}\, dt \right)^{-2} = \frac{1}{\lambda_0 \pi}, \quad b_0 = b(\dot{\tilde{q}}) + \lambda \frac{\partial x_3}{\partial n} (\tilde{q}).$$

Литература

1. С р е т е н с к и й Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., "Наука", 1977.
2. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1969.
3. К р ы л о в Ю.М. К теории трехмерных морских волн. - В сб.: Тр. океанографического института, 1952, вып. 21, с. 129.
4. П л о т н и к о в П.И. Корректность обобщенной линейной модели задачи, о трехмерных волнах на поверхности идеальной жидкости. - В сб.: "Динамика сплошной среды". Новосибирск, 1977, вып. 31.
5. М о з е р Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений. - Математика, сб. переводов., 1962, т.6, № 4.
6. H ö r m a n d e r L. The boundary problems of physical geodesy. - Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, v.62, p. 1-52.
7. П л о т н и к о в П.И. Один вариант теоремы Нэша-Мозера. - В сб.: "Динамика сплошной среды". Новосибирск, 1976, вып. 35.