В. А. Ватутин, С. М. Сагитов, Критические разложимые процессы Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, «далекие» от марковских, *Матем. заметки*, 1988, том 43, выпуск 2, 276–282

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 43, № 2 (1988)

КРИТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ПРОЦЕССЫ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА С ДВУМЯ ТИПАМИ ЧАСТИЦ, «ДАЛЕКИЕ» ОТ МАРКОВСКИХ

В. А. Ватутин, С. М. Сагитов

Рассмотрим два типа частиц, размножающихся в момент гибели. Будем считать, что численность потомства и продолжительность жизни каждой частицы независимы между собой и не зависят от аналогичных характеристик других частиц. Пусть $G_i(t)$ — функция распределения времени жизни частиц i-го типа, ν_{ij} — случайная величина, распределение которой совпадает с распределением числа частиц j-го типа, производимых в конце жизни частицей i-го типа, а $\mu_i(t)$ — число частиц i-го типа, существующих в момент t.

Определение. Процесс $(\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot))$ будем называть *критическим разложимым ветвящимся процессом Беллмана — Харриса с двумя типами частиц*, если

$$\mathsf{E}\nu_{11} = \mathsf{E}\nu_{22} = 1,\ \mathsf{E}\nu_{12} = 0,\ \mathsf{E}\nu_{21} = A_{21} \in (0, \infty). \tag{1}$$

Пусть, кроме (1), выполнено условие

$$f^i(s) \equiv \mathsf{E}s^{\nu_{ii}} = s + (1-s)^{1+\alpha_i} L_i(1-s) \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

где $\alpha_i \in (0, 1]$, а функции $L_i(\cdot)$ медленно меняются в нуле ($i = 1, 2$). Процесс $(\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot))$ рассматривался прежде в [1] в предположении, что существуют конечные положительные пределы

$$d_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-G_i(n))}{1-f_n^i(0)} \qquad (i=1,2), \tag{3}$$

где $f_n^i(\cdot)$ является n-кратной итерацией функции $f^i(\cdot)$.

Данная заметка посвящена случаю $d_1 \in [0, \infty]$, $d_2 = \infty$.

Замечание 1. Предположим, что в начальный момент времени нет других частиц, кроме одной частицы i-го типа нулевого возраста. Ввиду условия разложимости ($\mathsf{E}\, \nu_{12} = 0$) процесс $\mu_i(\cdot)$ является ветвящимся процессом Беллмана — Харриса с одним типом частиц. Положим

$$Q_i(t, s) = 1 - \mathsf{E} s^{\mu_i(t)}, \quad Q_i(t) = \mathsf{P}\{\mu_i(t) > 0\}.$$

Здесь уместно пояснить, почему рассматриваемые нами процессы названы «далекими» от марковских. Если бы процесс $\mu_2(\cdot)$ был марковским, то выполнялось бы равенство $d_2 = 0$. Как показано в [2—4], случай $d_2 = 0$ имеет много общего с марковским, в случае $d_2 \in (0, \infty)$ появляются новые свойства, а при $d_2 = \infty$ поведение процесса $\mu_2(\cdot)$ в корне отличается от поведения соответствующего марковского ветвящегося процесса.

Помимо соотношений (1), (2) и (3) с $d_1 \in [0, \infty]$, $d_2 = \infty$ всюду далее предполагаются выполненными следующие условия. В момент $t = 0$ рождается ровно одна частица второго типа. При $i = 2$

$$1 - G_i(t) = t^{-\beta_i} l_i(t), \quad \beta_i > 0, \tag{4}$$

где $l_i(\cdot)$ медленно меняется на бесконечности. Условие (4) будем предполагать выполненным и при $i = 1$ в случае, если $d_1 = \infty$. Наконец, мы будем считать, что существует конечный или бесконечный предел $\sigma = \lim\limits_{t\to\infty} Q_1(t)/(1 - G_2(t))$.

§ 1. Формулировки основных результатов.

Положим $\gamma_i = (1 + \alpha_i)^{-1}$, $m_i = \int_0^\infty t\, \mathrm{d}G_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Обозначим через $\lambda_1(s)$ единственный положительный корень уравнения

$$y^{1+\alpha_1} = m_1 y + \alpha_1 d_1 (1 - s), \quad s \in [0, 1), \ d_1 \in [0, \infty).$$

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\sigma < \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, \{s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)} \mid \mu_2(t) > 0\} =$$
$$= (1 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))^{\gamma_2} - (1 - s_2 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))^{\gamma_2}$$

для всех $(s_1, s_2) \in [0, 1) \times [0, 1]$, *где*

$$\Lambda_1(s) = \begin{cases} \lambda_1(s)/\lambda_1(0), & \text{если } d_1 < \infty, \\ (1 - s)^{\gamma_1}, & \text{если } d_1 = \infty. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Указанное предельное распределение является собственным тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \sigma = 0, \text{ либо } \sigma \in (0, \infty), \; d_1 = \infty. \qquad (5)$$

Если $\sigma = 0$, то $\mathsf{P}\,\{\mu_1(t) = 0 \mid \mu_2(t) > 0\} \to 1$ при $t \to \infty$.

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним одно утверждение, доказанное в [5]. Пусть

$$\lim_{t\to\infty} U_1(t)\,(1 - G_2(t))^{\alpha_1} L_1(1 - G_2(t)) = a \in [0, \infty], \qquad (6)$$

где $U_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_1^{*k}(t)$. Если $h(t)$ — монотонно убывающая к нулю функция такая, что при $t \to \infty$

$$h(t) \sim \begin{cases} 1 - G_2(t), & \text{если } a < \infty, \\ \dfrac{(1 - G_2(t))^{1+\alpha_1} L_1(1 - G_2(t))}{1 - G_1(t)}, & \text{если } a = \infty, \end{cases}$$

то для всех $x > 0$ существует предел

$$B(x) = \lim_{t\to\infty} Q_1(t, e^{-xh(t)})/(1 - G_2(t)). \qquad (7)$$

Функция $B(x)$ в зависимости от значений a, m_1 имеет вид

$$\begin{array}{lll} x(1 + a\alpha_1 x^{\alpha_1})^{-1/\alpha_1}, & \text{если } a < \infty, & m_1 < \infty, \\ x\varphi(x^{\alpha_1/\beta_1}), & \text{если } a < \infty, & m_1 = \infty, \\ x^{\gamma_1}, & \text{если } a = \infty, & \end{array}$$

где $\varphi(\cdot)$ — единственное непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) = 1 - a\int_0^x \varphi^{1+\alpha_1}(x - u)\, u^{\beta_1 - 1}\, du.$$

З а м е ч а н и е 3. Соотношение (6) в случае $\sigma > 0$, $d_1 < \infty$ выполняется автоматически (см. [2, 4]). При этом $U_1(t) \sim t/m_1$, $t \to \infty$ и $a = (\alpha_1 m_1)^{-1}(\lambda_1(0)/\sigma)^{\alpha_1}$ (мы считаем $1/\infty = 0$).

ТЕОРЕМА 2. *Если* (5) *не выполняется и* (6) *имеет место при* $\sigma = d_1 = \infty$, *то для всех* $x \geqslant 0$, $s \in [0, 1]$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,\{e^{-xh(t)\mu_1(t)} s^{\mu_2(t)} \mid \mu_2(t) > 0\} =$$
$$= (1 + A_{21}B(x))^{\gamma_2} - (1 - s + A_{21}B(x))^{\gamma_2}.$$

З а м е ч а н и е 4. Теорема 2 показывает, в частности, что при $a = 0$ частицы первого типа в определенном смысле ведут себя как вечные (см. [6]).

§ 2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть* $y(\cdot)$ — *неотрицательная невозрастающая функция, а функция* $H(u, z)$ *не возрастает по* u *и не убывает по* z. *Если* $0 \leqslant H(u, z) \leqslant 1$ *для всех* $u, z > 0$ *и*

$$H(t, y(t))/(1 - G_2(t)) \to H, \quad t \to \infty,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) = H.$$

Доказательство. Поскольку

$$H(\cdot, z) * G_2(t) = \int_0^t H(t - u, z)\, dG_2(u) \geqslant H(t, z)\, G_2(t),$$

имеем

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) \geqslant H.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$H(\cdot, z) * G_2(t) \leqslant H(t(1 - \varepsilon), z) G_2(t\varepsilon) + \\ + H(t\varepsilon, z)(G_2(t(1 - \varepsilon)) - G_2(t\varepsilon)) + G_2(t) - G_2(t(1-\varepsilon)).$$

Следовательно,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) \leqslant \\ \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} \{H(t(1 - \varepsilon), y(t(1 - \varepsilon))) + \\ + H(t\varepsilon, y(t\varepsilon))(1 - G_2(t\varepsilon)) + G_2(t) - G_2(t(1 - \varepsilon))\} = \\ = (1 - \varepsilon)^{-\beta_2} H + (1 - \varepsilon)^{-\beta_2} - 1.$$

В силу произвольности ε лемма 1 справедлива.

ЛЕММА 2 (см. [7]). *Функция* $Q(t, s_1, s_2) = 1 - \mathsf{E} s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)}$ *монотонна по* t, *если точка* (s_1, s_2) *принадлежит множеству*

$$D = \{(s_1, s_2) \in [0, 1) \times [0, 1) \colon \mathsf{E} s_1^{\nu_{21}} s_2^{\nu_{22}} \geqslant s_2\}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1. Основное соотношение для производящей функции ветвящегося процесса Беллмана — Харриса в нашем случае можно записать так:

$$Q(t, s_1, s_2) = (1 - s_2)(1 - G_2(t)) + Q_1(\cdot, s_1)(A_{21} + \\ + \varepsilon(\cdot, s_1, s_2)) * G_2(t) + (1 - f^2(1 - Q(\cdot, s_1, s_2))) * G_2(t), \quad (8)$$

где функция $\varepsilon(t, s_1, s_2)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $(s_1, s_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Используя лемму 1 и то, что $Q_1(t, s)/Q_1(t) \to \Lambda_1(s)$ при $t \to \infty$ (см. [2—4]), преобразуем уравнение (8) к виду

$$Q(t, s_1, s_2) = (1 - s_2 + \sigma A_{21}\Lambda_1(s_1))(1 - G_2(t))(1 + \\ + \varepsilon_1(t)) + (1 - f^2(1 - Q(\cdot, s_1, s_2))) * G_2(t)$$

(здесь и далее $\varepsilon_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$). Асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решения уравнения такого же вида изучалось в [3] при условии монотонности по t этого решения. Применяя метод работы [3] к предыдущему уравнению, находим, что для всех $(s_1, s_2) \in D$ (см. лемму 2)

$$\lim_{t\to\infty} Q(t, s_1, s_2)/Q_2(t) = (1 - s_2 + \sigma A_{21}\Lambda_1(s_1))^{\gamma_2}. \quad (9)$$

Очевидное равенство

$$\mathsf{E}\{s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)} \mid \mu_2(t) > 0\} = \frac{Q(t, s_1, 0) - Q(t, s_1, s_2)}{Q_2(t)} \quad (10)$$

и (9) влекут утверждение теоремы 1 при $(s_1, s_2) \in D$. Поскольку в теореме 1 речь идет, по существу, о сходимости семейства аналитических функций, нам остается лишь заметить, что D содержит открытое подмножество из R^2.

§ 4. Доказательство теоремы 2. Положим

$$q(u, t) = Q(u, e^{-xh(t)}, s),\ \Phi(x) = x^{1+\alpha_2} L_2(x), \\ X(t) = q(t, t).$$

Ввиду (10) нам нужно доказать соотношение

$$X(t) \sim Q_2(t)(1 - s + A_{21}B(x))^{\gamma_2}, \quad t \to \infty,$$

для чего достаточно установить, что при $t \to \infty$ (см. [3])

$$\Phi(X(t)) \sim (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t)). \quad (11)$$

Из (7) с помощью леммы 1 выводим, что

$$Q_1(\cdot, e^{-xh(t)}) * G_2(t) \sim B(x)(1 - G_2(t)), \quad t \to \infty.$$

Это в свою очередь вместе с (8) влечет равенство

$$X(t) = (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)) + \\ + (1 - f^2(1 - q(\cdot, t))) * G_2(t). \quad (12)$$

Согласно лемме 2 функция $q(u, t)$ монотонна по u при достаточно больших t. Это свойство позволяет из (12) получить неравенство

$$\Phi(X(t)) + X(t)(1 - G_2(t)) \geqslant (1 - s + A_{21}B(x))\cdot \\ \cdot(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)).$$

Поскольку $X(t) \to 0$, $t \to \infty$, последнее неравенство влечет оценку

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Phi(X(t))}{1 - G_2(t)} \geqslant 1 - s + A_{21}B(x). \tag{13}$$

Для того чтобы получить из (12) соотношение, противоположное оценке (13), воспользуемся монотонностью $q(u, t)$ по t:

$$X(t) \leqslant (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)) + \\ + (1 - f^2(1 - X(\cdot))) * G_2(t). \tag{14}$$

Ввиду $X(t) \geqslant Q(t, 1, s) = Q_2(t, s)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} tX^{\alpha_2}(t)L_2(X(t)) = \lim_{t\to\infty} tQ_2^{\alpha_2}(t)L_2(Q_2(t)) = \infty.$$

Стало быть,

$$X(t) = o(t\Phi(X(t))), \quad t \to \infty. \tag{15}$$

Как показано в [6], из (14) и (15) вытекает неравенство

$$\limsup_{\lambda\to 0} \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda u}u^r\Phi(X(u))\,du}{\int_0^\infty e^{-\lambda u}u^r(1 - G_2(u))\,du} \leqslant 1 - s + A_{21}B(x) \tag{16}$$

для $r \geqslant 0$ таких, что $\int_0^\infty u^r(1 - G_2(u))\,du = \infty$.

Из (13), (4), (16) заключаем, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t u^r\Phi(X(u))\,du \sim (1 - s + A_{21}B(x))\int_0^t u^r(1 - G_2(u))\,du.$$

Это в силу монотонности $\Phi(X(\cdot))$ и свойств правильно меняющихся функций (см. упражнение 2.7 из [8]) доказывает (11).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Институт математики и механики
АН КазССР

Поступило
26.09.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ватутин В. А., Сагитов С. М. Разложимый критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса с двумя типамичастиц // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 5. С. 1040—1043.

[2] Ватутин В. А. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с бесконечной дисперсией // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, вып 4. С. 861—863.

[3] Ватутин В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана — Харриса // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, вып. 1. С. 150—155.

[4] Ватутин В. А. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса // Мат. сб. 1979. Т. 109, вып. 3. С. 440—452.

[5] Ватутин В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана — Харриса, начинающиеся с большого числа частиц // Математические заметки. 1986. Т. 40, вып. 4. С. 527—541.

[6] Ватутин В. А. Критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса с финальным типом // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31, вып. 3. С. 492—503.

[7] Ватутин В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, вып. 3. С. 503—514.

[8] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.