



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. T. Antokhin, Analytic approach to the problem
of equations of the first kind,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1966, Volume 167,
Number 4, 727–730

<https://www.mathnet.ru/eng/dan32182>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

April 21, 2025, 15:07:50



Ю. Т. АНТОХИН

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО РОДА**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1965)

В работе изучается уравнение 1-го рода

$$Ax = f, \quad (1)$$

где x, f — элементы некоторого гильбертова пространства H ; A — положительный самосопряженный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)$, для которого нуль является точкой спектра, но не является собственным значением. Доказано, что если x — решение (1) и $\|A\| \leq 1$, то $x = \sum_{n=0}^{\infty} (E - A)^n f$, где E — единичный оператор. Если A — неограниченный оператор и уравнение (1) разрешимо, то его решение можно найти по формуле

$$x = f + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (A - E) \dots (A - (n-1)E) f. \quad (2)$$

Формула (2) доказана в предположении, что $f \in D(A^n)$, $\|A^n f\| \leq C$, $n = 0, 1, 2, \dots$, C не зависит от n . Формула (2) равносильна методу последовательных приближений по схеме

$$x_n = \frac{1}{n} f + x_{n-1} - \frac{1}{n} A x_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad x_1 = f. \quad (3)$$

Общий прием получения различных формул для решения уравнения (1) состоит в следующем. Предполагая, что $f \in D(A^n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, строим аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $A^z x$, зная ее значения $A^n x = A^{n-1} f$ в точках $z = n$, $n \geq 1$. В качестве решения уравнения (1) берем $\lim_{z \rightarrow +0} A^z x$. Функция $A^z x$ определяется однозначно и зависит только от f . Если для конструктивного определения $A^z x$ использовать, например, формулы работы (3), стр. 149, то мы получим

$$x = \lim_{z \rightarrow +0} x_z, \quad (4)$$

где $z x_z + A x_z = f$, $z > 0$. Формулы (2) — (4) получены только на основании факта существования решения. Если заранее предположить, что искомое решение «истокообразно представимо», т. е. $x = Ay$, $y \in H$, то, например, в формуле (4) можно получить оценку скорости приближения вида $\|x - x_z\| \leq z \|y\|$.

Представляется полезным отнесение некоторых вопросов общей теории уравнений 2-го рода к теории уравнений 1-го рода.

Например, рассмотрим уравнение

$$x - \varepsilon Ax = f, \quad (5)$$

где $A = A^*$, $A > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\delta$, $\delta > 0$, δ мало. Доказывается, что если $f \in D(A^n)$, $\|A^n f\| \leq C$, $n = 0, 1, 2, \dots$, C не зависит от n , то решение

уравнения (5) находится по формуле

$$x = f + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\varepsilon) \varphi_n(A) f + r_N, \quad (6)$$

где $\varphi_n(A) = A(A - iE) \dots (A - i(n-1)E)$, $\rho_n(\varepsilon) = \varepsilon^n / (1 - i\varepsilon) \dots (1 - in\varepsilon)$, $\|r_N\| \leq K(\alpha) / \alpha^2 N^\alpha$, $\alpha = \delta / (\varepsilon_0^2 + \delta^2)$, $K(\alpha)$ — некоторая постоянная, $K(0) > 0$, N произвольно.

Поведение решения уравнения (5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ связывается с исследованием уравнения (1) с помощью формул (4), если существует A^{-1} . Рассмотрим вопрос об асимптотике решения уравнения (5) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть для некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, целого $m \geq 1$ и $|\varepsilon| \leq 1$ выполнены условия: $\delta \rightarrow 0$, $\alpha |\varepsilon_0|^{m+1} < \delta < \beta |\varepsilon_0|$. Если при этом $f \in D(A^n)$, $\|A^n f\| \leq C$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то для любого N и некоторого $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, m)$ имеем

$$\left\| x - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n A^n f \right\| \leq \gamma C |\varepsilon|^{N+1}. \quad (7)$$

Оценка (7) получается из тождества

$$x = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n A^n f + \varepsilon^{N+1} \left\{ A^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon^n A^n f \right) + \varepsilon^m (E - \varepsilon A)^{-1} A^{m+N+1} f \right\}$$

и известной оценки

$$\| \varepsilon (E - \varepsilon A)^{-1} g \| \leq \|g\| / \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon} \right|, \quad g \in H.$$

Из неравенства (7) следует, что $x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A^n f$.

Рассмотрим вопрос об асимптотике решения уравнения (5), полученного по «принципу предельного поглощения». Пусть существует элемент $x(\varepsilon_0) \in D(A)$ такой, что $x(\varepsilon_0) - x \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, где x удовлетворяет (5). Пусть, помимо этого, $f \in D(A^n)$, $\|A^n f\| \leq C$ и $\|(E - \varepsilon A)^{-1} A^n f\| \leq C \varepsilon^{-m}$, где m — некоторое целое число, $m \geq 0$, C не зависит от n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $x(\varepsilon_0) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_0^n A^n f$.

Метод, примененный для вывода оценки (7), использован для получения асимптотики решения уравнения $\varepsilon \Delta u - B(u) = f$, возникающего в теории дифракции волн на неограниченных поверхностях в трехмерном пространстве, где $B(u) = 2i(\nabla \mu, \nabla u) + iu \Delta \mu$, $(\nabla \mu)^2 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\varepsilon_0^m$, $m \geq 1$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

Рассмотрим некоторые уравнения 1-го рода, возникающие в математической физике. Показано, что решение многих таких уравнений сводится к решению некорректной задачи о построении аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывной при $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции $F(z)$ по известным числам $F(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Эта задача имеет единственное решение, если для некоторых $M > 0$, $B > 0$, $0 < \varepsilon < \pi$ выполнены условия $|F| \leq M \exp(B|z|)$, $|F(i|z|)| \leq M \exp((\pi - \varepsilon)|z|)$. (См. (3), стр. 144.) Доказано, что в этих предположениях для всех z из любой ограниченной области правой полуплоскости справедлива оценка $|F(z)| \leq K = K(M, B, \varepsilon, m)$, где $m = \max_n |F(n)|$, $K \rightarrow 0$ при $m \rightarrow 0$ и фиксированных M, B, ε . В этом смысле задача о построении $F(z)$ корректна, если заданы числа $F(n)$, M, B, ε , $n = 0, 1, \dots$. С помощью формул из (3), стр. 152 доказано, что при естественных ограничениях на $F(n)$ предыдущая задача приводит к сингулярному уравнению

$$\varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - t} = H(t),$$

где

$$g(t) = \pi t F(it) / \operatorname{sh} \pi t, \quad H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n F(n)}{n - it}.$$

Рассмотрим некоторые уравнения 1-го рода, возникающие в теории потенциала. Рассмотрим обратную задачу логарифмического потенциала, которая сводится к определению границы L области D , если при больших $|z|$ известна функция $U(z)$ (внешний комплексный потенциал)

$$U(z) = \iint_D \frac{d\xi d\eta}{z - \zeta}, \quad (8)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Интеграл (8) при $z \in D$ называется внутренним комплексным потенциалом. Пусть граница L в полярных координатах (r, θ) дается уравнением $r = \varphi(\theta)$, $|\theta| \leq \pi$. Покажем, что если $\varphi(\theta)$ известна при $\pi - |\theta| \leq \varepsilon$, то нелинейное уравнение (8) для $\varphi(\theta)$ решается методами аналитического продолжения. Поясним сказанное. Пусть $|\theta| \leq \pi$, $m = \min \varphi(\theta)$, $M = \max \varphi(\theta)$. Тогда при $|z| < m$

$$U(z) = \pi \bar{z} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^n$$

и при $|z| > M$

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1},$$

где $a_{-n} = f(-n-1)$ для $n = 0, 2, 3, \dots$; $a_{-1} = f(-2) + \pi$; $a_n = f(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $f(\pm n) = f(z)$ при $z = \pm n$;

$$f(z) = \frac{1}{z+2} \int_{|\theta| \leq \pi} \varphi^{2+z}(\theta) e^{iz\theta} d\theta. \quad (9)$$

Так как a_n и $\varphi(\theta)$ при $\pi - |\theta| \leq \varepsilon$ даны, то можно построить целую функцию $F(z) = \int_{|\theta| \leq \pi - \varepsilon} \varphi^{2+z}(\theta) e^{iz\theta} d\theta$, определив предварительно $F(n)$, $n = 1, 2, \dots$, и по $F(z)$ определить $f(z)$ и числа $a_{\pm n}$, т. е. можно построить внутренний и внешний комплексные потенциалы области D . Граница L определяется затем как множество тех точек z , где оба потенциала совпадают. Аналогичным образом и в пространственном случае обратной задачи потенциала знание части границы позволяет определить остальную часть границы методами интерполяции целых функций.

Рассмотрена и решена задача о нахождении вещественной функции $\rho(\vartheta)$, если заданы числа

$$\int_{|\theta| \leq \pi} \rho(\theta) \Phi^n(\theta) d\theta = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $\Phi(\theta) = e^{i\theta} \varphi(\theta)$ — заданная функция; $\varphi(\theta) > 0$; $\varphi, \varphi', \varphi''$ — 2π -периодические функции; $\sqrt[n]{|c_n|} < \min \varphi(\theta)$. Изучен пространственный аналог задачи (10) — задача о нахождении функции $\rho(\lambda, \theta)$ из системы уравнений

$$\int_{\omega} \rho \Phi^{n+3} P_n(\cos \gamma) d\omega = A_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где ω — единичная сфера; P_n — многочлен Лежандра; $\Phi = \Phi(\lambda, \theta)$; γ — угол между точкой сферы (λ, θ) и вектором $(\Phi(\lambda', \theta'), \lambda', \theta')$; λ', θ' — переменные долгота и широта на сфере; $d\omega = \sin \theta' d\lambda' d\theta'$; $A_n = A_n(\lambda, \theta)$ —

заданные сферические функции; $\sqrt[n]{|A_n|} < \min_{\theta} \Phi(\lambda, \theta)$; $|\lambda| \leq \pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$; Φ — заданная на ω достаточно гладкая функция.

На основе задачи (11) получены новые уравнения для решения обратной задачи ньютоновского потенциала в пространстве.

Рассмотрим одну задачу из теории разностных схем, приводящую к обратной задаче логарифмического потенциала. Пусть $u(s, n)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяют разностному уравнению:

$$u(s, n+1) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r u(s+r, n). \quad (12)$$

Поставим задачу о нахождении чисел c_r . Пусть $c_r = c_{-r}$ и $\varphi(\theta) =$

$c_r e^{ir\theta}$ — непрерывная функция, $\varphi(\theta) > 0$, $|\theta| \leq \pi$. Пусть

$u^{(m)}(s, n)$ — семейство решений уравнения (12), причем $u^{(m)}(s, 0) = 0$ при $s \neq m$ и $u^{(m)}(m, 0) = 1$. Пусть даны числа $b_m = u^{(m)}(2, m)$, $m = 2, 3, \dots$

Тогда для нахождения $\varphi(\theta)$ имеем уравнения

$$\int_{|\theta| \leq \pi} \varphi^m(\theta) e^{i(m-2)\theta} d\theta = 2\pi \bar{b}_m, \quad m = 2, 3, \dots \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что, зная \bar{b}_m , мы знаем внешний комплексный потенциал области $D = \{z: |z| \leq \varphi(\arg z)\}$. Формула (13) получается из равенства

$$u(s, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} u(m, 0) \int_{|\theta| \leq \pi} \varphi^m(\theta) e^{i(s-m)\theta} d\theta$$

(см. (1), стр. 133). Дифференциальные аналоги задачи (12) — (13) изучались в работе (2).

Рассмотрен вопрос о корректности задачи Коши для эллиптических по Петровскому систем любого порядка, у которых коэффициенты при старших производных постоянны, а коэффициенты при младших производных являются целыми функциями. Исследование основано на формуле, которая, в частности, выглядит следующим образом.

Если функция $u(x, y, z)$ гармонична в ограниченной области D 3-мерного пространства и на части Γ_1 границы Γ известна $u|_{\Gamma_1} = \varphi$ и нормальная производная $u_n|_{\Gamma_1} = \psi$, то при $P = (x, y, z) \in D$

$$u = v - v^*, \quad (14)$$

где

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-Q|} d\sigma_Q - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \psi \frac{1}{|P-Q|} d\sigma_Q,$$

а v^* — гармоническое продолжение v внутрь D через Γ_1 . Формула (14) обобщается и на уравнения параболического типа.

Поступило
26 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., 1963. ² М. М. Лаврентьев, ДАН, 160, № 1, 32 (1965). ³ М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.