A. V. Rozhkov, Stabilizers of corteges in Aleshin-type groups,
Mat. Zametki, 1990, Volume 47, Issue 3, 121–128

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

О СТАБИЛИЗАТОРАХ КОРТЕЖЕЙ В ГРУППАХ АЛЁШИНСКОГО ТИПА

А. В. Рожков

Примеры не локально конечных периодических групп автоморфизмов деревьев были построены впервые С. В. Алёшиным [1], а затем Р. И. Григорчуком [2]. Позднее Ю. И. Мерзляков [3] (см. также [4, § 23]) показал, что рассмотренные в этих работах группы очень близки по своему строению, что послужило толчком к отысканию более широкого класса групп подобного типа. Одно из возможных обобщений — конструкция групп алёшинского типа или, короче, АТ-групп — было дано в [5].

В настоящей работе рассматриваются стабилизаторы конечных и бесконечных кортежей в АТ-группах. Устанавливаются условия, при которых стабилизаторы кортежей совпадают, находятся их нормальные замыкания, нормализаторы, индексы в содержащей их группе. Устанавливается, что стабилизаторы бесконечных кортежей в некоторых АТ-группах являются самонормализующимися подгруппами бесконечного индекса, а все подгруппы, их строго содержащие, имеют конечный индекс. Строится пример счетной локально нильпотентной АТ-группы, не удовлетворяющей нормализаторному условию.

Отметим, что первый пример локально нильпотентной группы, не удовлетворяющей нормализаторному условию, построил М. И. Каргаполов [6] (см. также [4, пример 18.2.2]), но группа в его примере несчетна.

1. Основные определения. Большая часть необходимых нам определений и обозначений приведена в [5, 7], поэтому здесь мы ограничимся краткими замечаниями. Пусть $A = (A_0, A_1, \ldots)$ — последовательность непустых множеств, $\mathrm{Cort}_n A$, $\mathrm{Cort}\, A$, $\mathrm{Cort}_\infty A$ — множества всех кортежей длины n, всех конечных и всех бесконечных кортежей над последовательностью A соответственно.

Если γ — кортеж, то по определению $\|\gamma\|$ — его длина, γ_n — $(n+1)$-й член, $\gamma^{[n]} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$, $\gamma^{(n)} = (\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots)$, γ^+ — множество всех кортежей длины $\|\gamma\| + 1$, продолжающих кортеж γ, $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $\varphi = \{\varphi(\nu) \in \mathrm{Sym}\, A_{\|\nu\|} \mid \nu \in \mathrm{Cort}\, A\}$ — автоморфизм дерева $\mathrm{Cort}\, A$. Подстановку $\varphi(\nu)$ назовем ν-й (а если важна только длина n кортежа ν, то n-й) сопровождающей подстановкой автоморфизма φ. Действие автоморфизма φ на кортеж γ конечный (или бесконечный) зададим правилом

$$\gamma\varphi = (\gamma_0\varphi(\varnothing), \ldots, \gamma_n\varphi(\gamma^{[n]}), \ldots).$$

Высотой автоморфизма φ назовем число

$$\min\{n \mid \varphi(\nu) = 1 \text{ при } \|\nu\| > n\}.$$

Автоморфизм φ назовем корневой мутацией, если $\varphi(\varnothing)$ — его единственная нетождественная сопровождающая подстановка. Пусть $\gamma \in \mathrm{Cort}_\infty A$. Автоморфизм φ бесконечной высоты назовем продольной мутацией с направляющим кортежем γ, если из $\varphi(\nu) \neq 1$ следует, что $\nu \in (\gamma^{[n]})^+ \setminus \gamma^{[n]}$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$.

Если M — некоторое множество корневых и продольных мутаций дерева $\mathrm{Cort}\, A$, где A — последовательность множеств, каждое из которых содержит не менее двух элементов и все группы подстановок

$$\Pi_n = \Pi_n(M) = \mathrm{гр}\,(\varphi(\nu) \mid \varphi \in M,\ \|\nu\| = n),\quad n \in \mathbf{N},$$

транзитивны, то группу $G = \mathrm{гр}\,(M)$ будем называть группой алёшинского типа (или АТ-группой), а множество M — каноническим порождающим множеством. Подмножества C всех корневых и D всех продольных мутаций множества M будем называть соответственно корневой и продольной частями множества M.

Если последовательность A состоит из неединичных групп A_n, $n \in \mathbf{N}$, а n-е сопровождающие подстановки элементов АТ-группы G принадлежат (правому) регулярному представлению группы A_n, то группу G назовем регулярной АТ-группой. Если $A_n \cong \mathbf{Z}_{p_n}$, где p_n — простое число, $\omega = (p_0, p_1, \ldots)$, то группу G назовем AT_ω-группой.

Пусть A — последовательность непустых множеств, $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$, $C \subseteq \mathrm{Cort}\, A$, $G \leqslant \mathrm{Aut}\,\mathrm{Cort}\, A$, тогда $A^{(n)} = (A_n, A_{n+1}, \ldots)$, $[\nu, \infty)$ — множество всех кортежей из $\mathrm{Cort}\, A$ с фиксированным началом ν, $\mathrm{St}_G(C)$ — (поэлементный) стабилизатор множества C в группе G. Назовем множества $\mathrm{St}_G(\nu)$ и $\mathrm{Cost}_G(\nu) = \mathrm{St}_G(\mathrm{Cort}\, A \setminus [\nu, \infty))$ соответственно стабилизатором и костабилизатором кортежа ν, а подгруппы $\mathrm{St}_G(n) = \bigcap_{\|\nu\|=n} \mathrm{St}_G(\nu)$ и $\mathrm{Cost}_G(n) = \mathrm{гр}\,(\mathrm{Cost}_G(\nu) \mid \|\nu\| = n)$ конгруэнц-подгруппой и малой конгруэнц-подгруппой соответственно.

Определение ν-срезки и n-срезки см. в [7, § 2].

СК1) [5, лемма 2]. Если G — АТ-группа над последовательностью A, $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$, то $\mathrm{St}_G(\nu)_{\{\nu\}} = G_{\|\nu\|}$. В частности, имеет место естественное вложение $\mathrm{St}_G(n) \to \prod_{\|\nu\|=n} G_n$ по правилу $g \mapsto \prod_{\|\nu\|=n} g_{\{\nu\}}$. В дальнейшем мы часто будем отождествлять элемент $g \in \mathrm{St}_G(n)$ и его образ $(g_{\{\mu\}}, \ldots, g_{\{\nu\}}, \ldots)$, где $\|\mu\| = \ldots = \|\nu\| = n$.

СК2) [7, теорема 1]. Если G — AT_ω-группа над произвольной последовательностью ω нечетных простых чисел, то

$$\mathrm{Cost}_G(\nu)_{\{\nu\}} \geqslant G''_{\|\nu\|}$$

для любого $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$, где X'' — второй коммутант группы X.

2. Стабилизаторы конечных кортежей. Пусть G — АТ-группа над последовательностью A, μ, $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$.

СК3) Если $\mu \leqslant \nu$, то $\mathrm{St}_G(\nu) \leqslant \mathrm{St}_G(\mu)$, $\mathrm{Cost}_G(\nu) \leqslant \mathrm{Cost}_G(\mu)$.

СК4) $\mathrm{St}_G(\nu)$ — нормализатор подгруппы $\mathrm{Cost}_G(\nu)$ в группе G.

СК5) Если $\mu = \nu\tau$, то $\mathrm{Cost}_G(\mu)_{\{\mu\}} = (\mathrm{Cost}_G(\nu)_{\{\nu\}} \cap \cap \mathrm{Cost}_{G_{\|\nu\|}}(\tau))_{\{\tau\}}$.

СК6) $\mathrm{Cost}_G(\nu)_{\{\nu\}} \trianglelefteq G_{\|\nu\|}$, $\mathrm{Cost}_G(n) \trianglelefteq \mathrm{St}_G(n)$.

Свойства СК3) — СК5) следуют из определения стабилизаторов и костабилизаторов кортежей, а свойство СК6) — из свойств СК1) и СК4).

СК7) Для любого $\nu \in \mathrm{Cort}_n A$ подгруппа $\mathrm{Cost}_G(n)$ совпадает с нормальным замыканием подгруппы $\mathrm{Cost}_G(\nu)$ в группе G и, в частности, нормальна в группе G, $n \in \mathbf{N}$.

СК8) Если $\nu \neq \varnothing$, $\mathrm{Cost}_G(\nu) \neq 1$, то $\mathrm{Cost}_G(\nu)$ — субнормальная подгруппа группы G субнормальной глубины 2.

СК9) Если $\mu = \nu\tau \in \mathrm{Cort}\, A$, то $\mathrm{St}_G(\mu)_{\{\nu\}} = \mathrm{St}_{G_{\|\nu\|}}(\tau)$.

СК10) Пусть G — регулярная АТ-группа, $\|\nu\| = 1$, тогда $\mathrm{St}_G(\nu)$ совпадает с конгруэнц-подгруппой $\mathrm{St}_G(1)$.

Свойство СК7) следует из определения костабилизатора и транзитивности действия АТ-группы на множестве всех кортежей данной длины [5, предложение 2]. Свойство СК8) следует из СК7), СК3) и СК4). Свойство СК10) очевидно.

Докажем СК9). Включение $\mathrm{St}_G(\mu)_{\{\nu\}} \leqslant \mathrm{St}_{G_{\|\nu\|}}(\tau)$ очевидно. С другой стороны, если $\varphi \in \mathrm{St}_{G_{\|\nu\|}}(\tau)$, то найдется такой элемент $\psi \in \mathrm{St}_G(\nu)$, что $\psi_{\{\nu\}} = \varphi$. Ясно, что $\psi \in \mathrm{St}_G(\nu\tau)$.

СК11) Для любых $g \in G$ и $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$ имеет место равенство $g^{-1}\,\mathrm{Cost}_G(\nu)\, g = \mathrm{Cost}_G(\nu g)$.

В самом деле, так как $g^{-1}\,\mathrm{Cost}_G(\nu)\, g \leqslant \mathrm{Cost}_G(\nu g)$, то $g\,\mathrm{Cost}_G(\nu g)\, g^{-1} \leqslant \mathrm{Cost}_G(\nu)$, откуда и следует равенство.

Если G — группа, $X \subseteq G$, то, по определению, $\overline{X}^G$ — нормальное замыкание множества X в группе G.

Предложение 1. *Пусть G — АТ-группа над последовательностью A, $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$.*

СК12) *Имеют место включения* $G \geqslant \overline{\mathrm{St}_G(\nu)^G} \geqslant \mathrm{St}_G(1)$, *причем равенства достигаются как справа так и слева.*

СК13) *Если G — конечно порожденная периодическая* AT_ω-*группа над последовательностью нечетных простых чисел ω, то ее малая конгруэнц-подгруппа имеет конечный индекс.*

Доказательство. Докажем СК12). Пусть d — произвольная продольная мутация группы G, γ — ее направляющий кортеж. В силу [5, предложение 2] в группе G найдется такой элемент g, что $(\gamma g)^{[\|\nu\|]} = \nu$ и, значит, $g^{-1}dg \in \mathrm{St}_G(\nu)$. Так как подгруппа, порожденная всеми продольными мутациями группы G совпадает с конгруэнц-подгруппой $\mathrm{St}_G(1)$, то нормальное замыкание $\overline{\mathrm{St}_G(\nu)}^G$ содержит подгруппу $\mathrm{St}_G(1)$. В силу СК10) равенство справа достигается.

Пусть теперь последовательность A такова, что ее первый член конечен и содержит $k > 4$ элементов. Пусть G — АТ-группа, подгруппа C корневых мутаций которой изоморфна знакопеременной группе над k символами. Поскольку последняя проста и каждый из k символов имеет в ней нетривиальный стабилизатор, то нормальное замыкание каждого такого стабилизатора совпадает с самой знакопеременной группой. Следовательно, $\overline{\mathrm{St}_G(\nu)}^G \supseteq \mathrm{St}_G(1) \cup C$, и, значит, $\overline{\mathrm{St}_G(\nu)}^G = G$ для любого $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$.

Установим свойство СК13). Так как стабилизатор $\mathrm{St}_G(n)$, очевидно, имеет конечный индекс в группе G и, в силу замечания после свойства СК1), изоморфен конечной подпрямой степени n-срезки G_n группы G, а костабилизатор $\mathrm{Cost}_G(n)$ (в силу СК2)) содержит подгруппу, изоморфную (относительно вложения $\mathrm{St}_G(n)$, суженного на костабилизатор $\mathrm{Cos}\, t_G(n)$) прямой степени второго коммутанта G_n'' группы G_n. То остается показать, что $|G_n : G_n''| < \infty$. Из определения n-срезки G_n сразу следует, что группа G_n конечно порождена и периодична, а значит имеет конечный индекс.

Предложение доказано.

Назовем конечные кортежи n-соседними, если они имеют одинаковую длину и различаются, самое большее, последними n членами, $n \in \mathbf{N}$. 1-соседние кортежи будем называть просто соседними. Ясно, что если кортежи n-соседние, то они и m-соседние при $m \geqslant n$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть G — регулярная* АТ-*группа над последовательностью* $A = (A_0, A_1, \ldots)$, $\mu, \nu \in \mathrm{Cort}\, A$.

1) *Если* $\mathrm{St}_G(\mu) = \mathrm{St}_G(\nu)$, *то кортежи* μ *и* ν — 2-*соседние.*

2) *Если* μ *и* ν — *соседние кортежи, то* $\mathrm{St}_G(\mu) = \mathrm{St}_G(\nu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Докажем утверждение 1). Пусть $\mu < \nu$. Покажем, что $\mathrm{St}_G(\mu) \neq \mathrm{St}_G(\nu)$. В силу СК1) найдется элемент $g \in \mathrm{St}_G(\mu)$ такой, что $g_{\{\mu\}}$ — корневая мутация группы $G_{\|\mu\|}$. Следовательно, μ-я сопровождающая подстановка автоморфизма g нетривиальна и, значит, $g \notin \mathrm{St}_G(\nu)$.

Пусть теперь μ и ν — несравнимые несоседние кортежи, τ — их наибольшее общее начало, т. е. $\mu = \tau\mu'$, $\nu = \tau\nu'$. Так как $\mathrm{St}_G(\tau) \supseteq \mathrm{St}_G(\mu) \cup \mathrm{St}_G(\nu)$, то можно рассмотреть τ-срезки $\mathrm{St}_G(\mu)_{\{\tau\}}$, $\mathrm{St}_G(\nu)_{\{\tau\}}$. В силу СК9) доказательство неравенства $\mathrm{St}_G(\mu) \neq \mathrm{St}_G(\nu)$ сводится к доказательству неравенства $\mathrm{St}_{G_{\|\tau\|}}(\mu') \neq \mathrm{St}_{G_{\|\tau\|}}(\nu')$. Не теряя общности можно считать, что $\tau = \varnothing$, т. е. кортежи μ и ν различаются уже первыми своими членами μ_0 и ν_0. Так как μ и ν несоседние, то хотя бы один из них имеет длину $n > 1$. Можно считать, что $n \geqslant \|\nu\|$.

Пусть $G \ni d$ — продольная мутация, имеющая некоторую нетривиальную сопровождающую подстановку $d(\tau)$, $\|\tau\| = 2$. Пусть $A_2 \ni a$ — элемент, на который подстановка $d(\tau)$ действует нетождественно, $r' = \tau a$ — кортеж длины 3. Не теряя общности можно считать, что направляющий кортеж мутации d начинается символом μ_0. Рассмотрим два случая.

а1) Пусть корневая мутация $d_{\{\nu_0\}}$ стабилизирует кортеж $\nu^{(1)}$. В частности, это всегда так при $\|\nu\| = 1$. В этом последнем случае в силу СК10) и а) $\mathrm{St}_G(\nu) = \mathrm{St}_G(1) = \mathrm{St}_G(\mu_0) > \mathrm{St}_G(\mu)$. Пусть, поэтому $\|\nu\| > 1$. Тогда $d_{\{\nu_0\}} = 1$ и так как μ и ν — не 2-соседние кортежи и $n = \|\mu\| \geqslant \|\nu\|$, то $n \geqslant 3$. Рассмотрим такой элемент h группы G, что $\tau' h = \mu^{[3]}$. Так как $\gamma_0 = \mu_0 = \tau_0 = \tau_0'$, то $h \in \mathrm{St}_G(1)$. Следовательно, $(h^{-1}dh)_{\{\nu_0\}} = h^{-1}{}_{\{\nu_0\}} d_{\{\nu_0\}} h_{\{\nu_0\}}$ и, значит, $h^{-1}dh \in \mathrm{St}_G(\nu)$. С другой стороны $\mu^{[3]}h^{-1}dh = \tau' dh = (\tau_0, \tau_1, ad(\tau))\, h \neq \mu^{[3]}$, т. е. $h^{-1}dh \notin \mathrm{St}_G(\nu)$.

а2) Пусть теперь корневая мутация $d_{\{\nu_0\}}$ не стабилизирует кортеж $\nu^{(1)}$, т. е. $\|\nu\| > 1$ и $d_{\{\nu_0\}} \neq 1$. Возьмем такой элемент, $h \in G$, что $\gamma^{[n]}h = \mu$. Тогда $h^{-1}dh \in \mathrm{St}_G(\mu)$. С другой стороны, поскольку $\gamma_0 = \mu_0$, то $h \in \mathrm{St}_G(1)$ и, поэтому $(h^{-1}dh)_{\{\nu_0\}} = h^{-1}_{\{\nu_0\}} d_{\{\nu_0\}} h_{\{\nu_0\}} \notin \mathrm{St}_{G_1}(1)$. Следовательно, $h^{-1}dh \notin \mathrm{St}_G(\nu)$. (Отметим, что фактически мы доказали утверждение: если μ и ν — несравнимые не 2-соседние кортежи, то ни один из стабилизаторов $\mathrm{St}_G(\mu)$ и $\mathrm{St}_G(\nu)$ не содержится в другом.)

б) Докажем утверждение 2). Пусть μ и ν — соседние кортежи длины n, $n \in \mathbf{N}$, $g \in \mathrm{St}_G(\nu)$. Тогда

$$\nu g = (\nu_0 g(\varnothing), \ldots, \nu_{n-1} g(\nu^{[n-1]})) = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}),$$

и поскольку $g(\nu^{[n-1]})$ — подстановка сдвига элементов группы A_{n-1}, то $g(\nu^{[n-1]}) = 1$. Так как μ и ν отличаются только последними членами, то $\mu g = \mu$ и, поэтому $\mathrm{St}_G(\nu) \leqslant \mathrm{St}_G(\mu)$. Обратное включение следует из тех же соображений. Предложение доказано.

Отметим, что с одной стороны, существуют регулярные АТ-группы, в которых стабилизаторы несоседних 2-соседних кортежей равны, а с другой стороны в AT_ω-группах стабилизаторы равны только у соседних кортежей. Кроме того, существуют АТ-группы, у которых стабилизаторы всех конечных кортежей попарно различны.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\omega = (p_0, p_1, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел, G — AT_ω-группа над последовательностью A, $\nu \in \mathrm{Cort}_n A$. Тогда*

1) *ряды последовательных нормализаторов подгрупп* $\mathrm{St}_G(\nu)$ *и* $\mathrm{Cost}_G(\nu) \neq 1$ *достигают группы G на n-м и $(n+1)$-м шагах соответственно,*

2) $\mathrm{St}_G(\nu)$ — *субнормальная подгруппа группы G субнормальной глубины n,*

3) $|G : \mathrm{St}_G(\nu)| = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. а) Докажем 1). Поскольку $\mathrm{St}_G(\nu)$ — нормализатор подгруппы $\mathrm{Cost}_G(\nu) \neq 1$) (свойство СК4)), то можно ограничиться рассмотрением стабилизатора $\mathrm{St}_G(\nu)$. Покажем, что если $\nu \in \mu^+$, то нормализатор подгруппы $\mathrm{St}_G(\nu)$ в группе G совпадает с подгруппой $\mathrm{St}_G(\mu)$.

Из утверждения 2) предложения 2 следует, что подгруппа $\mathrm{St}_G(\mu)$ нормализует подгруппу $\mathrm{St}_G(\nu)$. Пусть теперь $\varphi \notin \mathrm{St}_G(\mu)$, тогда некоторая сопровождающая подстановка $\varphi(\tau)$ автоморфизма φ нетождественна, где τ — начальный отрезок кортежа ν. Следовательно, ν и $\nu\varphi$ — несоседние и несравнимые кортежи и, значит, как доказано в предложении 2, ни один из стабилизаторов $\mathrm{St}_G(\nu)$ и $\mathrm{St}_G(\nu\varphi)$ не содержится в другом. Таким образом, найдется элемент $g \in \mathrm{St}_G(\nu)$ такой, что $\nu\varphi g \neq \nu\varphi$, что влечет в свою очередь $\varphi g \varphi^{-1} \notin \mathrm{St}_G(\nu)$.

б) Для доказательства утверждений 2) и 3) достаточно показать, что $|\mathrm{St}_G(\mu) : \mathrm{St}_G(\nu)| = p_n$, $n = \|\mu\|$, для всех $\mu, \nu \in \mathrm{Cort}\, A$ таких, что $\nu \in \mu^+$. Так как $\mathrm{St}_G([\mu, \infty))$ — ядро гомоморфизма $\{\mu\}$ и $\mathrm{St}_G([\mu, \infty)) < \mathrm{St}_G(\nu)$, то в силу СК9) $|\mathrm{St}_G(\mu) : \mathrm{St}_G(\nu)| = |G_n : \mathrm{St}_{G_n}(\nu_n)| = $ (СК10)) $= |G_n : \mathrm{St}_{G_n}(1)| = p_n$. Теорема доказана.

3. Стабилизаторы бесконечных кортежей.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* ω — *произвольная последовательность нечетных простых чисел,* G — AT_ω*-группа над последовательностью* A, $\gamma, \eta \in \mathrm{Cort}\, A$.

Тогда

1) *если кортежи* γ *и* η *различны, то ни один из стабилизаторов* $\mathrm{St}_G(\gamma)$ *и* $\mathrm{St}_G(\eta)$ *не содержится в другом;*

2) $\mathrm{St}_G(\gamma)$ — *самонормализующаяся подгруппа группы* G *бесконечного индекса;*

3) *если* G — *конечно порожденная периодическая группа, то любая подгруппа, строго содержащая подгруппу* $\mathrm{St}_G(\gamma)$ *имеет конечный индекс в группе* G.

Доказательство. а) Докажем утверждение 1). Отыщем элемент $g \in \mathrm{St}_G(\gamma)$, нетождественно действующий на кортеж η. Так как, очевидно,

$$\mathrm{St}_G(\gamma) \geqslant \mathrm{гр}\,(\mathrm{Cost}_G(\nu) \mid \nu \in \mathrm{Cort}_n A,\ \nu \neq \gamma^{[n]},\ n = 1, 2, \ldots)$$

и в силу СК2) $\mathrm{Cost}_G(\nu)_{\{\nu\}} \geqslant G''_{\|\nu\|}$, то остается показать, что для любого кортежа из $\mathrm{Cort}_\infty A$ во втором коммутанте нечетной AT_ω-группы G (т. е. когда последовательность ω состоит из нечетных простых чисел) найдется элемент, нетривиально действующий на этот кортеж.

Как показано в [7, п. б) доказательства теоремы 2] $G'' \neq 1$. Пусть $1 \neq g \in G''$, $g(\mu)$ — нетождественная сопровождающая подстановка, а все подстановки $g(\nu)$ при $\nu < \mu$ тождественны. В силу [5, предложение 2] для любого кортежа τ длины $\|\mu\|$ найдется элемент $f \in G$ такой, что $\mu f = \tau$. Следовательно, элемент $f^{-1} g f \in G''$ нетривиально действует на любой бесконечный кортеж с началом τ. Так как τ — произвольный кортеж, фиксированный по длине, то утверждение 1) доказано.

б) Докажем утверждение 2). Так как $\mathrm{St}_G(\gamma) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{St}_G(\gamma^{[n]})$ то бесконечность индекса следует из утверждения 3) теоремы 1. Докажем самонормализуемость. Пусть $g \notin \mathrm{St}_G(\gamma)$, тогда из 1) следует, что ни одна из подгрупп $\mathrm{St}_G(\gamma)$ и $\mathrm{St}_G(\gamma g)$ не содержится в другой и, значит, найдется элемент $h \in \mathrm{St}_G(\gamma) \setminus \mathrm{St}_G(\gamma g)$. Легко видеть, что $\gamma g h g^{-1} = \eta g^{-1}$, где $\eta \neq \gamma g$, и поэтому $\eta g^{-1} \neq \gamma$. Таким образом, $ghg^{-1} \notin \mathrm{St}_G(\gamma)$.

в) Докажем утверждение 3). Пусть $g = \{g(\nu) \mid \nu \in \mathrm{Cort}\, A\} \in G \setminus \mathrm{St}_G(\gamma)$ и n — длина наименьшего среди кортежей τ, удовлетворяющих условиям: τ — начальный отрезок γ, $g(\tau) \neq 1$. Пусть еще $\nu = \gamma^{[n+1]} g^{-1}$. Так как $\mathrm{St}_G(\gamma) \geqslant \text{гр}\,(\mathrm{Cost}_G(\mu) \mid \cdot \| \mu \| = n+1,\ \mu \neq \nu g)$, то $\mathrm{Cost}_G(\nu) \leqslant \mathrm{St}_G(\gamma)$ и, значит, в силу СК11)

$$g^{-1}\, \mathrm{Cost}_G(\nu)\, g = \mathrm{Cost}_G(\nu g) = \text{гр}\,(\mathrm{St}_G(\gamma),\ g).$$

Таким образом, подгруппа гр $(\mathrm{St}_G(\gamma), g)$ содержит малую конгруэнц-подгруппу $\mathrm{Cost}_G(n+1)$ и, следовательно, имеет конечный индекс в группе G (СК13)). Теорема доказана.

Напомним, что группа удовлетворяет нормализаторному условию, если каждая ее собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.

П р и м е р. *Существует счетная локально нильпотентная* АТ-*группа, не удовлетворяющая нормализаторному условию.*

Искомой группой, имея в виду предыдущую теорему, будет любая счетная локально нильпотентная AT_ω-группа над последовательностью $\omega = (p, p, \ldots)$, где p — нечетное простое число. Пусть c — корневая мутация, d_n — продольная мутация с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$, у которой нетривиальны только некоторая n-я и некоторые $2m$-е сопровождающие подстановки, $m \geqslant n \geqslant 1$ (предполагаем, разумеется, что сопровождающие подстановки являются элементами регулярного представления группы $\mathbf{Z}_p$).

Пусть $G = \text{гр}\,(c, d_n \mid n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что G — AT_ω-группа и $c^p = d_n^p = [d_n, d_m] = 1$, $m = n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что G — локально конечная p-группа. Для этого достаточно доказать, что $X = \text{гр}\,(c, d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — конечная p-группа для любого четного n.

Поскольку n четно, то все $(n+1)$-е сопровождающие подстановки мутаций $d_1, d_2, \ldots, d_n$ тождественны, и, значит, $(n+1)$-я срезка X_{n+1} группы X (имеется в виду подгруппа, порожденная всеми формальными ν-срезками порождающих группы X, при $\|\nu\| = n+1$) порождается ν-срезками $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мутаций $d_1, \ldots, d_n$ соответственно, где $\nu = (0, 0, \ldots)$, $\|\nu\| = n+1$. Так как $y_1^p = \ldots = y_n^p = [y_i, y_j] = 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то группа X_{n+1} абелева порядка p^n. Следовательно, подгруппа $\mathrm{St}_X(n+1)$, изоморфная подгруппе p^{n+1}-й прямой степени группы X_{n+1}, также конечная p-группа. Так как стабилизатор $\mathrm{St}_X(n+1)$ имеет конечный индекс в группе X, то X — конечная p-группа. Таким образом, G — счетная локально конечная p-группа, не удовлетворяющая нормализаторному условию.

Определим для каждого трансфинитного числа α группы G_α и G^α, полагая $G_0 = G^0 = \mathbf{Z}_p$,

$$G_\alpha = \begin{cases} \mathbf{Z}_p \text{г} G_{\alpha-1} & \text{при непредельном } \alpha, \\ \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta & \text{при предельном } \alpha, \end{cases}$$

$$G^\alpha = \begin{cases} G^{\alpha-1} \text{г} \mathbf{Z}_p & \text{при непредельном } \alpha, \\ \bigcup_{\beta<\alpha} G^\beta & \text{при предельном } \alpha. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что $G_{\alpha-1}$ отождествляется со своей естественной копией в сплетении $G_\alpha = \mathbf{Z}_p \text{г} G_{\alpha-1}$, а $G^{\alpha-1}$ (при бесконечном α) — с первой копией в базе сплетения $G^\alpha = G^{\alpha-1} \text{г} \mathbf{Z}_p$. Для конечных α имеем

$$G^\alpha = \underbrace{(\ldots(\mathbf{Z}_p \text{г} \mathbf{Z}_p)\, \text{г} \ldots)\, \text{г} \mathbf{Z}_p}_{\alpha} = \text{гр}\,(a_\alpha, a_{\alpha-1}, \ldots, a_1),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ — естественное порождающее множество группы G^α, a_1 принадлежит самой активной из групп $\mathbf{Z}_p$, a_2 — самой активной из оставшихся и т. д., и отождествляем группу $G^{\alpha-1}$ с подгруппой гр $(a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha-1})$ группы G^α.

М. И. Каргаполов [6] показал, что несчетные группы G_α не удовлетворяют нормализаторному условию (см. также [4, пример 18.2.2]). С другой стороны, легко видеть, что при нечетном p и α, равном ординалу натурального ряда, (счетная) группа G^α также не удовлетворяет нормализаторному условию, так как изоморфна АТ_ω-группе G, построенной нами выше.

Некоторое сходство групп G_α и G^α наводит на мысль (Ю. И. Мерзляков): а не будут ли и счетные группы G_α из серии М. И. Каргаполова примерами групп, не удовлетворяющих нормализаторному условию?

Челябинский государственный университет

Поступило 16.07.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А л ё ш и н С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Математические заметки. 1972. Т. 11, вып. 3. С. 319—328.
[2] Г р и г о р ч у к Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 1. С. 53—54.
[3] М е р з л я к о в . И. О бесконечных конечно порожденных периодических группах // ДАН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 803—805.
[4] К а р г а п о л о в М. И., М е р з л я к о в Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
[5] Р о ж к о в А. В. К теории групп алёшинского типа // Математические заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 572—589.
[6] К а р г а п о л о в М. И. Об обобщенных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 5. С. 19—28.
[7] Р о ж к о в А. В. О подгруппах некоторых групп алёшинского типа // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, вып. 6. С. 543—571.