И. Н. Блинов, Прямой метод дня конечногладкой задачи с “малыми знаменателями”, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 23–31

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

ПРЯМОЙ МЕТОД ДЛЯ КОНЕЧНОГЛАДКОЙ ЗАДАЧИ С «МАЛЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ»

И. Н. Блинов

В статье изложен прямой метод оценок формальных рядов в применении к типичной задаче с «малыми знаменателями» — проблеме приводимости линейной системы с квазипериодическими коэффициентами. Исследована конечногладкая неаналитическая задача, к которой косвенный итерационный процесс А. Н. Колмогорова [1 или 2] не применим. К таким задачам возможен подход в рамках теории «сглаживания» Ю. Мозера [3], но при этом получаемые по методу «сглаживания» области сходимости будут у́же, а требования к гладкости жестче. Для конечногладкой задачи указаны области приводимости по параметру и указана необходимая связь показателя «качества» «малых знаменателей», позволяющая получить положительные результаты.

Как известно, применение прямых методов требует определенных теоретико-числовых исследований, которые проведены в разделе 1. Здесь обобщаются оценки, полученные в [4] для одномерных «малых знаменателей».

Прямые методы для аналитических задач, по-видимому, впервые применил К. Л. Зигель [4, 5]. Затем А. Д. Брюно [6] усовершенствовал прямые методы К. Л. Зигеля и применил их к более широкому классу аналитических задач. Прямые методы к конечногладким неаналитическим задачам применяются по-видимому, впервые.

Необходимо отметить, что здесь рассматривается задача о приводимости весьма узкого класса систем, на коэффициенты которых накладываются довольно жесткие ограничения, указанные в начале раздела 2. Среди рассматриваемых систем нет систем с вещественными коэффициентами, такие системы аналогичны специальным системам из [6]. Вопрос о возможности распространения метода на системы общего вида остается открытым.

1. Произведения «малых знаменателей».

ЛЕММА 1. *Пусть* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$ — *вектор, координаты которого линейно независимые над рациональным полем,* ω_i — *вещественные числа,* $n = (n_1, \ldots, n_l) \neq 0$ — *целочисленный век-*

тор, $(n, \omega) = n_1\omega_1 + \ldots + n_l\omega_l$ *— скалярное произведение. Обозначим*

$$\rho_n = (\min_{x \in Z} |(n, \omega) - x|)^{-1}, \tag{1}$$

где Z *— множество целых чисел. Тогда для любых целочисленных векторов* $p \neq q$ *справедливо неравенство*

$$\rho_q \rho_p (\rho_p + \rho_q)^{-1} \leqslant \rho_{p-q}. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим l_r — целое число, для которого

$$|(r, \omega) - l_r| = \min_{x \in Z} |(r, \omega) - x|, \quad r = p, q.$$

Тогда для любого $m \in Z$

$$\rho_{p-q}^{-1} = \min_{x \in Z} |((p-q), \omega) - x| \leqslant |((p-q), \omega) - m|.$$

Положим $m = l_p - l_q$, тогда

$$\rho_{p-q}^{-1} < |((p-q), \omega) - (l_p - l_q)| \leqslant |(p, \omega) - l_p| + \\ + |(q, \omega) - l_q| = \rho_p^{-1} + \rho_q^{-1}.$$

Отсюда следует неравенство (2). Лемма доказана.

Следствие 1. *Из* (2) *следует неравенство*

$$\min(\rho_p, \rho_q) \leqslant 2\rho_{p-q}. \tag{3}$$

Для одномерных векторов p, q это неравенство получил К. Л. Зигель [4, § 23].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\{n_i\}$ *— попарно различные целочисленные векторы,* $\{\rho_{n_i}\}$ *— числа, определяемые формулой* (1) $(i = 1, \ldots, k)$. *Пусть для любого вектора* n *выполняется неравенство К. Л. Зигеля*

$$\rho_n \leqslant \|n\|^\nu, \tag{4}$$

где $\nu > 0$ *— вещественное число,* $\|n\| = |k_1| + \ldots + |k_l|$, *если* $n = (k_1, \ldots, k_l)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_{n_i} \leqslant 2^{(\nu+1)(k-1)} \max_{i \leqslant k} \|n_i\|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \|n_i - n_{i+1}\|^\nu. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $k = 1$. По условию $\rho_{n1} \leqslant \|n_i\|^\nu$, и неравенство (5) доказано. Пусть неравенство уже доказано для любых $(k-1)$ множителей. Покажем его верность для k множителей. Пусть ρ_{n_τ} — наименьшее из k чисел $\{\rho_{n_i}\}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Возможны следующие случаи.

1. $\tau \in (1, k)$. Тогда по индуктивному предположению неравенство (5) верно для произвольных $(k-1)$ множителей,

следовательно,

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_{n_i} = \rho_{n_\tau} \prod_{i \neq \tau} \rho_{n_i} \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{n_\tau} 2^{(\nu+1)(k-2)} \max_{i \neq \tau} \| n_i \|^\nu \prod_{i \neq \tau-1,\, \tau} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \| n_{\tau-1} - n_{\tau+1} \|^\nu.$$

По предположению о минимальности ρ_{n_τ} и в силу неравенств (3), (4)

$$\rho_{n_\tau} = \min(\min(\rho_{n_{\tau-1}}, \rho_{n_\tau}), \min(\rho_{n_\tau}, \rho_{n_{\tau+1}})) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \min(\rho_{n_{\tau-1}-n_\tau}, \rho_{n_\tau - n_{\tau+1}}) \leqslant 2 \min(\| n_{\tau-1} - n_\tau \|^\nu, \| n_\tau - n_{\tau+1} \|^\nu).$$

А тогда

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_{n_i} \leqslant 2^{(\nu+1)(k-2)+1} \max_{i \neq \tau} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \cdot$$
$$\cdot \frac{\| n_{\tau-1} - n_{\tau+1} \|^\nu}{\| n_{\tau-1} - n_\tau \|^\nu \| n_\tau - n_{\tau+1} \|^\nu} \min(\| n_{\tau-1} - n_\tau \|^\nu, \| n_\tau - n_{\tau+1} \|^\nu) \leqslant$$

(в силу свойств нормы $\| n_{\tau-1} - n_{\tau+1} \| \leqslant \| n_{\tau-1} - n_\tau \| + \| n_\tau - n_{\tau+1} \|$)

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-2)+1} \max_{i \neq \tau} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \cdot$$
$$\cdot \frac{(\| n_{\tau-1} - n_\tau \| + \| n_\tau - n_{\tau+1} \|)^\nu}{\max(\| n_{\tau-1} - n_\tau \|^\nu, \| n_\tau - n_{\tau+1} \|^\nu)} \leqslant$$

(так как, очевидно, для любых положительных
u, v $[(u+v)^\nu / \max(u^\nu, v^\nu)] \leqslant 2^\nu$)

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-2)+1+\nu} \max_{i \neq \tau} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-1)} \max_{i \leqslant k} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu.$$

Неравенство (5) в случае $\tau \in (1, k)$ доказано.

2. $\tau = 1$. Тогда в силу минимальности ρ_{n_1} и неравенств (3), (4)

$$\rho_{n_1} = \min(\rho_{n_1}, \rho_{n_2}) \leqslant 2\rho_{n_1 - n_2} \leqslant \| n_1 - n_2 \|^\nu,$$

следовательно, по индуктивному предположению

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_{n_i} = \rho_{n_1} \prod_{i=2}^{k} \rho_{n_i} \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{n_1} 2^{(\nu+1)(k-2)} \max_{i \neq 1} \| n_i \|^\nu \prod_{i=2}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-2)+1} \max_{i \leqslant k} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-1)} \max_{i \leqslant k} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu.$$

Неравенство (5) в случае $\tau = 1$ доказано.

3. $\tau = k$. Тогда по индуктивному предположению

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_{n_i} = \rho_{n_k} \prod_{i=1}^{k-1} \rho_{n_i} \leqslant$$

$$\leqslant \rho_{n_k} 2^{(\nu+1)(k-2)} \max_{i \neq k} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-2} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \leqslant$$

(в силу минимальности ρ_{n_k} и неравенств (3), (4), $\rho_{n_k} = \min(\rho_{n_{k-1}}, \rho_{n_k}) \leqslant 2\rho_{n_{k-1}-n_k} \leqslant 2 \| n_{k-1} - n_k \|^\nu$)

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-2)+1} \max_{i \neq k} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(k-1)} \max_{i} \| n_i \|^\nu \prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|^\nu.$$

И вновь неравенство (5) доказано. Теорема доказана.

Замечание 1. Произведение $\prod_{i=1}^{k-1} \| n_i - n_{i+1} \|$, присутствующее в неравенстве (5), допускает произвольное упорядочение по $\{n_i\}$.

2. Приводимость систем ограниченной гладкости.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{X} = \lambda P(t) X, \tag{6}$$

где

$$P(t) = \sum_{n>0,\ m \geqslant 0} P_{nm} \exp(it((n, \omega) - m)), \quad n = (n_1, \ldots, n_l),$$

P_{nm} — квадратные постоянные матрицы некоторой размерности (запись $n = (n_1, \ldots, n_l) > 0$ означает, что $n_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, l)$ и хотя бы одно из $n_j \neq 0$), $\| P_{nm} \| \leqslant (\| n \| + m)^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, $\| n \| = | n_1 | + \ldots + | n_l |$ ($\| Q \|$ — какая-либо норма матрицы Q), λ — комплексный параметр, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$ — вектор с вещественными компонентами $\omega_i > 0$, линейно независимыми над рациональным полем. Таким образом, $P(t)$ — квазипериодическая матрица-функция с базисом частот $\omega_1, \ldots, \omega_l, 1$ и со степенным убыванием коэффициентов Фурье, что и обеспечивает конечную гладкость (условно γ-гладкость) коэффициентов системы (6).

Ниже применяется прямой метод оценок формальных рядов Фурье в неаналитической задаче приводимости системы (6). Этот метод не требует процедуры «сглаживания», и поэтому значительно проще в применении, а получаемые результаты точнее результатов, которые могут быть получены косвенными методами.

Замечание 2. Рассмотрим формальный ряд

$$X(t, \lambda) = E + \lambda \int P dt + \lambda^2 \int P \left(\int P dt\right) dt + \ldots, \tag{7}$$

где $P(t)$ — матрица коэффициентов системы (6), а под знаком $\int$ понимается именно та первообразная, для которой формальное среднее значение равно нулю. Если бы оказалось, что каждый член ряда (7) — почти периодическая функция, а ряд (7) равномерно сходится, то $X(t, \lambda)$ была бы почти периодической функцией [7] и являлась бы фундаментальной матрицей системы (6) при достаточно малых λ (в чем непосредственно убеждаемся после почленного дифференцирования ряда (7)). Кроме того, в этом случае система (6) приводима, так как если $L(t)$ — равномерно ограниченная фундаментальная матрица системы $\dot{X} = P(t) X$, то замена А. М. Ляпунова $X = Ly$ приводит к системе

$$\dot{y} = L^{-1} (PL - \dot{L})\, y = 0y$$

с нулевой постоянной матрицей.

ЛЕММА 2. *Обозначим* $\Phi_s(t)$ *коэффициент при* λ^s *в* (7). *Тогда формальный ряд Фурье функции* $\Phi_s(t)$ *допускает представление*

$$\sum_{n_j>0,\ m_j\geqslant 0} P_{n_s m_s} \ldots P_{n_1 m_1} \exp\left(it\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{s} n_j\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left.- \sum_{j=1}^{s} m_j\right)\right) \prod_{r=1}^{s} \left(i\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j\right)\right)^{-1}, \qquad (8)$$

здесь $n_j = (n_1^{(j)}, \ldots, n_l^{(j)})$ — *целочисленный вектор*, m_j — *целое число*, $j = 1, \ldots, s$.

Доказательство. При $s = 1$ $\Phi_1(t) = \int P(t) dt$. По условию $P(t) = \sum_{n_1>0,\ m_1\geqslant 0} P_{n_1 m_1} \exp(it((n, \omega) - m_1))$. Следовательно, формальный ряд Фурье $\Phi_1(t)$ есть результат формального интегрирования ряда Фурье $P(t)$ [7]. Поэтому

$$\Phi_1(t) \backsim \sum P_{n_1 m_1} \exp(it(n_1, \omega) - m_1)(i((n_1, \omega) - m_1))^{-1}.$$

Для $s = 1$ утверждение доказано.

Пусть лемма уже доказана для s. Рассмотрим $\Phi_{s+1}(t)$. По определению $\Phi_{s+1}(t) = \int P(t) \Phi_s(t) dt$. По условию

$$P(t) = \sum_{n_{s+1}>0,\ m_{s+1}\geqslant 0} P_{n_{s+1} m_{s+1}} \exp(it((n_{s+1}, \omega) - m_{s+1})).$$

Следовательно, $P(t)\Phi_s(t)$ имеет формальный ряд Фурье, равный произведению рядов Фурье функций $P(t)$ и $\Phi_s(t)$ [7]. Тогда, по индуктивному предположению о виде ряда Фурье для $\Phi_s(t)$, получим

$$P(t)\Phi_s(t) \backsim \sum P_{n_{s+1} m_{s+1}} \exp(it((n_{s+1}, \omega) - m_{s+1}))\cdot$$
$$\cdot \sum P_{n_s m_s} \ldots P_{n_1 m_1} \exp\left(it\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{s} n_j\right) - \sum_{j=1}^{s} m_j\right)\right)\cdot$$
$$\cdot \prod_{r=1}^{s} \left(i\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j\right)\right) = \sum P_{n_{s+1} m_{s+1}} \ldots P_{n_1 m_1}\cdot$$
$$\cdot \exp\left(it\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{s+1} n_j\right) - \sum_{j=1}^{s+1} m_j\right)\right) \prod_{r=1}^{s} \left(i\left(\left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j\right)\right)^{-1}.$$

Формальный ряд Фурье функции $\Phi_{s+1}(t)$ получаем почленным интегрированием последнего выражения. В результате получим

$$\Phi_{s+1}(t) \backsim \sum P_{n_{s+1}m_{s+1}} \ldots P_{n_1 m_1} \exp\left(it\left(\left(\omega, \sum\nolimits_{j=1}^{s+1}{}' n_j\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum\nolimits_{j=1}^{s+1}{}' m_j\right)\right) \prod_{r=1}^{s+1}\left(i\left(\left(\omega, \sum\nolimits_{j=1}^{r}{}' n_j\right) - \sum\nolimits_{j=1}^{r}{}' m_j\right)\right)^{-1}.$$

В силу принципа индукции лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Рассмотрим числовой ряд*

$$\sum\nolimits_{m_i \geqslant 0}' (m_1 + \ldots + m_n)^{-\gamma}, \qquad i = 1, \ldots, n,\ m_1 > 0.$$

Пусть $\gamma > n$, тогда этот ряд сходится, и справедливо неравенство

$$\sum\nolimits_{m_i \geqslant 0}' (m_1 + \ldots + m_n)^{-\gamma} \leqslant \zeta^n(\gamma/n), \ m_1 > 0. \tag{9}$$

где $\zeta(s)$ — функция Римана, допускающая при $s > 1$ представление в виде сходящегося ряда

$$\zeta(s) = \sum\nolimits_{n \geqslant 1}' n^{-s}.$$

Доказательство. Пусть $N > 1$ — натуральное число. Считая $m_1 > 0$, $m_i \leqslant N$ $(i = 1, \ldots, n)$, рассмотрим частичную сумму повторного ряда

$$\sum\nolimits_{m_i \geqslant 0}' (m_1 + \ldots + m_n)^{-\gamma} =$$
$$= \sum (m_1 + \ldots + m_n)^{-\gamma/n} \ldots (m_1 + \ldots + m_n)^{-\gamma/n} \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_{m_i \geqslant 0}' m_1^{-\gamma/n} (m_2 + m_1)^{-\gamma/n} \ldots (m_n + m_1)^{-\gamma/n} \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_{m_i \geqslant 0}' m_1^{-\gamma/n} (m_1 + 1)^{-\gamma/n} \ldots (m_n + 1)^{-\gamma/n} =$$
$$= \sum\nolimits_{m_i \geqslant 1,\ m_i \leqslant N+1}' m_1^{-\gamma/n} m_2^{-\gamma/n} \ldots m_n^{-\gamma/n} =$$
$$= \sum\nolimits_{m_1=1}^{N} m_1^{-\gamma/n} \sum\nolimits_{m_2=1}^{N+1} m_2^{-\gamma/n} \ldots \sum\nolimits_{m_n=1}^{N+1} m_n^{-\gamma/n} \leqslant \zeta^n(\gamma/n).$$

Из-за положительности членов повторного ряда отсюда следует сходимость повторного ряда и справедливость неравенства (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть базис частот коэффициентов системы* (6) *удовлетворяет условию К. Л. Зигеля*:

$$\rho_n = (\min_{x \in Z} |(n, \omega) - x|)^{-1} = |(n, \omega) - m|^{-1} \leqslant \|n\|^{\nu} \tag{10}$$

при любых целочисленных векторах $n = (n_1, \ldots, n_l) \neq 0$, где $\nu > 1$ — вещественное число. Пусть ν и γ (показатель гладкости коэффициентов системы (6)) *связаны соотношением*

$$\gamma - 2\nu > l + 1, \tag{11}$$

где l — число иррациональных компонент базиса коэффициентов системы (6). *Тогда система* (6) *приводима при достаточно малых λ.*

Доказательство. Достаточно показать, что ряд, составленный из норм членов ряда (8), сходится к сумме σ_s при каждом s и $\Sigma\lambda^s\sigma_s < +\infty$ при достаточно малых λ. Действительно, в этом случае формальный ряд Фурье функции (7) сходится равномерно, а тогда $X(t, \lambda)$ — равномерная почти периодическая функция при тех же λ [7]. По замечанию 2 отсюда последует приводимость (6) при тех же λ. Составим ряд из норм членов ряда (8)

$$\sum \| P_{n_s m_s} \| \cdots \| P_{n_1 m_1} \| \prod_{r=1}^{s} \left| \left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j \right|^{-1}. \qquad (12)$$

Рассмотрим произведение «малых знаменателей», присутствующих в (12). По теореме 1

$$\prod_{r=1}^{s} \left| \left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j \right|^{-1} \leqslant \prod_{r=1}^{s} \rho_{\sum_{j=1}^{r} n_j} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(s-1)} \max_{r \leqslant s} \left\| \sum_{j=1}^{r} n_j \right\|^{\nu} \prod_{r=1}^{s} \left\| \sum_{j=1}^{r} n_j - \sum_{j=1}^{r+1} n_j \right\|^{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(s-1)} \left(\sum_{j=1}^{s} \| n_j \| \right)^{\nu} \prod_{r=1}^{s-1} \| n_{r+1} \|^{\nu}.$$

По условию $\| P_{nm} \| \leqslant (\| n \| + m)^{-\gamma}$ и, следовательно, члены ряда (12) удовлетворяют неравенству

$$\| P_{n_s m_s} \| \cdots \| P_{n_1 m_1} \| \prod_{r=1}^{s} \left| \left(\omega, \sum_{j=1}^{r} n_j\right) - \sum_{j=1}^{r} m_j \right|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{s} (\| n_j \| + m_j)^{-\gamma} \, 2^{(\nu+1)(s-1)} \left(\sum_{j=1}^{s} \| n_j \| \right)^{\nu} \prod_{j=2}^{s} \| n_j \|^{\nu} \leqslant$$

$$\left(\text{так как очевидно, } \sum_{j=1}^{s} \| n_j \| \leqslant s \prod_{j=1}^{s} \| n_j \| \right)$$

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \prod_{j=1}^{s} \| n_j \|^{2\nu} / (\| n_j \| + m_j)^{\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \prod_{j=1}^{s} (\| n_j \| + m_j)^{2\nu-\gamma}.$$

Таким образом, ряд (12) имеет мажоранту в виде ряда

$$\sum_{n_j>0,\ m_j\geqslant 0,\ j=1,\ldots,s} 2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \prod_{j=1}^{s} (\| n_j \| + m_j)^{2\nu-\gamma}.$$

Меняя знаки Σ и Π местами, что допустимо из-за положительности членов ряда, получим мажорантный ряд для ряда (12) в виде

$$2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j>0,\ m_j\geqslant 0} (\| n_j \| + m_j)^{2\nu-\gamma}. \qquad (13)$$

Так как $\| n_j \| = n_1^{(j)} + \ldots + n_l^{(j)}$, где $n_k^{(j)} \geqslant 0$ и хотя бы одно из них не равно 0, то ряд (13) примет вид

$$2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_k^{(j)}\geqslant 0,\ m_j\geqslant 0}' (n_1^{(j)} + \ldots + n_l^{(j)} + m_j)^{2\nu-\gamma}, \qquad (14)$$

где символ Σ' означает суммирование по $\| n_j \| > 0$. К рядам, стоящим в (14), применим лемму 3 при условии (11). В силу леммы 3 каждый из таких рядов сходится, и справедливо неравенство

$$\sum'_{n_k^{(j)} \geqslant 0,\, m_j \geqslant 0} (n_1^{(j)} + \ldots + n_l^{(j)} + m_j)^{2\nu - \gamma} \leqslant \zeta^{l+1} ((\gamma - 2\nu)/(l+1)).$$

Тогда ряд (12) сходится, и в силу (14) его сумма σ_s удовлетворяет неравенству

$$\sigma_s \leqslant 2^{(\nu+1)(s-1)} s^{\nu} \zeta^{s(l+1)} ((\gamma - 2\nu)/(l+1)). \tag{15}$$

Теперь очевидно, что $\Sigma \lambda^s \sigma_s < +\infty$ для всех λ, удовлетворяющих неравенству

$$2^{\nu+1} \quad \zeta^{l+1} ((\gamma - 2\nu)/(l+1)) \mid \lambda \mid < 1. \tag{16}$$

Отсюда следует приводимость системы (6) при достаточно малых λ. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Область приводимости системы (6) по λ оценивается неравенством (16).

З а м е ч а н и е 4. Укажем некоторые проблемные вопросы, связанные с выполненным исследованием.

Как показано в [6], для применения прямого метода к аналитическим проблемам в случае одномерных «малых знаменателей» (вектор ω базиса частот состоит только из одной компоненты) вида $\{n\omega - m\}$ достаточным условием получения положительных результатов является условие А. Д. Брюно $\sum_k (\ln q_{k+1})/q_k < +\infty$, где $\{p_k/q_k\}$ — последовательность подходящих дробей при разложении ω в обыкновенную цепную дробь, а для применимости прямых методов в рассматриваемом выше классе конечногладких неаналитических задач приводимости системы (6) достаточным условием достижения положительного результата является условие К. Л. Зигеля

$$\mid n\omega - m \mid^{-1} \leqslant \mid n \mid^{\nu}. \tag{17}$$

Очевидно (и это подробно обсуждается в [6]), между этими условиями имеется явный «зазор».

Отсюда возникает первый проблемный вопрос — насколько можно ослабить условие (17) (в одномерном случае $l = 1$), чтобы прямой метод еще позволял бы получить положительный результат? Разумеется, этот же вопрос интересен и для многомерного случая. Решение этого вопроса, очевидно, связано с прогрессом в оценках произведения «малых знаменателей» при замене условия (17) на менее жесткое. А это, фактически, теоретико-числовая задача. Было бы интересно найти необходимые и достаточные условия на «малые знаменатели», допускающие применение прямых методов в неаналитических задачах, и выяснить связь этих условий с показателем гладкости γ.

Второй проблемный вопрос заключается в следующем. Допустим, система (6) удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, приводима в области, определяемой неравенством (16). Можно ли доказать, что при нарушении неравенства (16) система (6) окажется неприводимой? Точнее — существует ли система вида (6), у которой при малых λ в силу (16) имеется приводимость, а при достаточно больших λ приводимость разрушается?

Третий проблемный вопрос — насколько минимально условие (11) хотя бы для одномерных ($l = 1$) «малых знаменателей»? Известно, что ν не может быть <1. А тогда коэффициент гладкости в силу (11) $\gamma > 2\nu + l + 1$ не может быть меньше 4 для случая $l = 1$. Возможно, нижнюю границу коэффициента гладкости γ удастся снизить до 3. По-видимому, $\gamma > l + 1$, так как это граница области абсолютной сходимости ряда Фурье коэффициентов системы (6), что можно установить по лемме 3. Но уж во всяком случае $\gamma > (l + 1)/2$, так как в противном случае ряды из квадратов коэффициентов Фурье для коэффициентов системы (6) будут расходиться, что, как известно [7], невозможно. Так какова же здесь точная нижняя грань для γ хотя бы для $l = 1$?

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступило
18.11.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527—530.
[2] Блинов И. Н. Об одном итерационном процессе Ньютона // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 1. С. 3—14.
[3] Мозер Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений // Математика. 1962. Т. 4. С. 3—10.
[4] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.
[5] Зигель К. Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия // Математика. 1961. Т. 5, № 2. С. 119—128.
[6] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262.
[7] Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.