М. Ш. Исраилов, Связанные задачи сейсмодинамики трубопровода,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 41–45

принятой расчетной модели образца, является хорошее соответствие между расчетным значением относительного осевого перемещения выступов образца (0,796 мм) и измеренным значением перемещения захватов испытательной машины (0,75 мм).

В результате проведенного экспериментально-теоретического исследования прочности образца может быть сделан следующий вывод: в условиях концентрации напряжений внутри материала Рипор-2Н, характеризующейся размером зоны концентрации [1] порядка 30—40 мм, и при соотношении главных напряжений в зоне концентрации $\sigma_2\approx\sigma_3\approx\approx 0{,}22\,\sigma_1$ величины разрушающих напряжений превосходят стандартное значение прочности этого материала приблизительно в 1,5 раза по интенсивности напряжений и в 2 раза по максимальному отрывному напряжению. Это обстоятельство подтверждает необходимость точного моделирования на специальных образцах пространственных напряженных состояний и их градиентов, реализуемых в опасных зонах натурных конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 93—013—16531.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков Д. Л., Васильев А. М., Дельцов В. С., Коновалов Д. Н. О моделировании трехмерных напряженных состояний при испытании образцов//Изв. РАН. Механ. тверд. тела. 1994. № 6. 155—161.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1989.

Поступила в редакцию
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

М. Ш. Исраилов

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДА

Значительный раздел сейсмодинамики протяженных подземных сооружений (в частности, трубопроводов) базируется на предложенной А. А. Ильюшиным модели взаимодействия сооружения и грунта. В одномерном случае продольного движения трубопровода (стержня) и грунта взаимодействие описывается связью между касательным напряжением на границе контакта и относительным смещением в виде операторного соотношения $\tau=-\mathscr{K}(u)$. Если в этом соотношении правая часть есть линейная функция, взаимодействие называется линейно упругим; если $\mathscr{K}(u)$ является оператором типа линейной вязкоупругости — вязкоупругим и, наконец, если $\mathscr{K}(u)=ku[1-\omega(u)]$, где $k=\mathrm{const}$ и функция $\omega(u)$ обладает свойствами ω-функции Ильюшина теории малых упругопластических деформаций, — упругопластическим. Это предложение Ильюшина имело принципиальное значение в инженерной сейсмодинамике подземных сооружений и привело к большому числу экспериментальных исследований по определению констант и функций, входящих в указанные типы взаимодействия, для грунтов с различными физико-механическими характеристиками (ссылки на некоторые из них содержатся, например, в монографии [1]).

На базе принятых моделей взаимодействия проведены сейсмодинамические расчеты конкретных деформируемых конструкций. В этих расчетах, как правило, не учитывалось взаимное влияние движений объекта и среды (движение среды задано и не искажается) — обстоятельство, частично компенсированное тем, что характеристики взаимодействия определялись непосредственно из эксперимента. Через те же характеристики модели взаимодействия опосредованно сказывалось и влияние механических свойств грунта, задания (или определения) которых не требовалось в рассматриваемых приближенных постановках задач.

Однако такая «несвязанная» постановка не всегда приводит к правильным результатам еще и в силу того обстоятельства, что вытекающее из соотношения $\tau=-\mathscr{K}(u)$ равенство нулю касательных напряжений при отсутствии относительных смещений (проскальзывания) в одних случаях может быть приближенно принято (скажем, для песчаных грунтов), а в других оно неприемлемо. Имеются в виду случаи, когда проскальзывание отсутствует, но касательные напряжения значительны, либо когда наличие проскальзывания мало сказывается на величинах касательных напряжений на поверхности контакта.

Между тем, как будет показано ниже на примере установившихся (стационарных) движений трубопровода, результаты, полученные в точной (связанной) постановке, по форме (но не по физическому содержанию) соответствуют полученным по «модели взаимодействия» в работе [2]. При этом аналог «коэффициента взаимодействия» для упругого грунта обретает из решения внешней задачи для среды точное теоретическое выражение.

1. Постановка и аналитическое решение задачи в сверхзвуковом случае. Рассмотрим совместное движение упругой среды и бесконечного стержня (трубопровода) круглого сечения радиуса a, вызванное распространением вдоль стержня в среде плоской продольной волны в случае, когда скорость продольной волны в среде больше скорости распространения продольных возмущений в стержне (сверхзвуковой случай). На цилиндрической поверхности контакта среды и стержня примем условия полного прилипания (идеального контакта).

В цилиндрической системе координат (r, ϑ, z) с осью Oz, направленной вдоль оси стержня, возмущения среды за фронтом плоской волны, вызванные наличием стержня, описываются в силу осевой симметрии вектором перемещения $\mathbf{u}(u_r(r,z), 0, u_z(r,z))$.

В качестве основной задачи сейсмодинамики трубопровода (совместного движения упругой среды и стержня) сформулируем задачу об определении движения стержня по измеренным на некотором расстоянии $r=R(R>a)$ от оси стержня перемещениям (сейсмическим колебаниям) среды. При достаточно заглубленном трубопроводе $(R\gg a)$ в качестве таких измерений могут быть приближенно приняты легко доступные измерения перемещений поверхности Земли над трубопроводом. Очевидно, что именно такая постановка оправданна с практической точки зрения.

Отметим сразу же одно важное обстоятельство в пользу рассмотрения данной задачи в связанной постановке. Хотя на достаточно большом расстоянии от стержня $R\gg a$ характеристики сейсмической волны и могут слабо искажаться из-за наличия стержня, однако, поскольку стержень вовлекается в движение средой за счет действия касательных напряжений на его поверхности, величины их (а значит, и само движение стержня) определяются локальным полем напряжений в среде вблизи стержня и потому решение задачи в связанной постановке существенно для получения достоверных результатов.

Упрощающее предположение. *Имея в виду прежде всего изучение движения и напряженно-деформированного состояния стержня, примем, что движение среды* ($r>a$) *является одномерным, т. е. что* $u_r=0$ *и, значит,* $\mathbf{u}=\mathbf{u}(0, 0, u_z\equiv u(r, z))$.

Результаты, полученные при решении внешней задачи для среды в точной постановке (с учетом обоих типов волн), будут опубликованы в следующей работе автора. Они позволяют оценить погрешность принятой здесь одномерной модели движения среды с точки зрения точности определения характеристик движения стержня. В частности, погрешность вычисления касательных напряжений и результирующей силы, вызывающей движение стержня, имеет порядок $O((\ln R/a)^{-2})$.

В рассматриваемом случае $M\equiv c_1'/c>1$ (где $c_1'=\sqrt{(\lambda'+2\mu')/\rho'}$, $c=\sqrt{E/\rho}$ — соответственно скорости распространения продольных волн в среде и стержне; штрихом помечаются характеристики, относящиеся к среде) возмущения как в среде, так и в стержне имеют место левее плоского фронта П, перпендикулярного оси Oz и движущегося по отношению к стержню со сверхзвуковой скоростью c_1'.

В принятом предположении движение среды за фронтом П описывается волновым уравнением для $u(r,z)$ (в цилиндрических координатах). Примем за начало координат на оси z положение фронта П в момент времени $t=0$, тогда в момент времени t положение П определяется координатой $z=c_1't$. Если измеряемое на расстоянии $r=R$ перемещение u_0 является функцией расстояния $Z\equiv c_1't-z$ от фронта П, то реализуется установившийся режим, когда все функции зависят от переменной Z (и r).

В переменных (r, Z) волновое уравнение для $u(r, Z)$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение по r:

$$\frac{d^2u\,(r;\,Z)}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{du\,(r;\,Z)}{dr}=0, \tag{1}$$

в котором зависимость от $Z>0$ является параметрической.

Присоединим к уравнению (1) граничные условия

$$u\,(r;\,Z)\,|_{r=R}=u_0\,(Z),\quad u\,(r;\,Z)\,|_{r=a}=U\,(Z). \tag{2}$$

Здесь $u_0(Z)$, как указывалось выше, измеренное на расстоянии $r=R$ горизонтальное перемещение точек среды за фронтом П, а $U(Z)$ — продольное перемещение стержня (и значит, второе условие в (2) есть условие прилипания на поверхности $r=a$).

Решая задачу (1), (2), имеем выражение для перемещений точек среды

$$u\,(r,\,Z)=\frac{\ln\,(r/a)}{\ln\,(R/a)}\,[u_0\,(Z)-U\,(Z)]+U\,(Z). \tag{3}$$

Для получения уравнения движения стержня (трубопровода) вычислим, исходя из (3), касательные напряжения на цилиндрической поверхности $r=a$ с учетом того, что внешняя нормаль к $r=a$ направлена в сторону, противоположную направлению возрастания r:

$$\sigma_{rz}|_{r=a}=-\mu'\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}=-\frac{\mu'}{a\ln\,(R/a)}\,[u_0\,(Z)-U\,(Z)].$$

Результирующая сила, действующая на поверхности элемента стержня длиной dz, имеет вид

$$f\,(Z)=dz\int\limits_0^{2\pi}(-\sigma_{rz}|_{r=a})\,ad\vartheta=dz\,\frac{2\pi\mu'}{\ln\,(R/a)}\,[u_0\,(Z)-U\,(Z)]. \tag{4}$$

В качестве массовой силы, приводящей в движение стержень, выступает поверхностная сила (4), отнесенная к единице массы стержня (ρ — плотность материала стержня):

$$\mathcal{F}(Z)=\frac{f(Z)}{\rho dz\cdot 2\pi a^2}=\frac{\mu'}{\rho a^2 \ln(R/a)}[u_0(Z)-U(Z)]. \qquad (5)$$

С учетом (5) уравнение продольных колебаний стержня в установившемся режиме

$$(M^2-1)\frac{d^2U}{dZ^2}-\frac{\rho}{E}\mathcal{F}(Z)=0$$

приводится к виду

$$\frac{d^2U(Z)}{dZ^2}+\lambda^2[U(Z)-u_0(Z)]=0, \qquad (6)$$

где

$$\lambda^2=\frac{\mu'}{Ea^2(M^2-1)\ln(R/a)} \qquad (7)$$

— положительный коэффициент размерности м$^{-2}$.

Уравнение (6) по форме совпадает с уравнением, полученным для колебаний стержня по «модели взаимодействия» [1, с. 97], только разность $U—u_0$ здесь имеет другой физический смысл и λ^2 определяется точным теоретическим выражением (7), тогда как в указанной работе он выражается через экспериментально определяемые величины.

Общим решением уравнения (6) является функция

$$U(Z)=A_1\sin\lambda Z+A_2\cos\lambda Z+\lambda\int_0^Z u_0(Z')\sin\lambda(Z-Z')\,dZ',$$

в которой константы A_1, A_2 определяются из условий на фронте волны $Z=0$.

Из непрерывности перемещений при переходе через фронт имеем $A_2=0$. В силу выполнения условия прилипания условия на фронте волны в стержне и в среде совпадают. Поэтому, если в точке наблюдения $r=R$ на фронте П известен скачок скорости $[\partial u/\partial t]_П=v_0$ (или скачок напряжения σ_{zz}), то той же величине v_0 равен и скачок скорости на фронте волны в стержне. Отсюда $A_1=v_0/(\lambda c_1')$ и, следовательно,

$$U(Z)=\frac{v_0}{\lambda c_1'}\sin\lambda Z+\lambda\int_0^Z u_0(Z')\sin\lambda(Z-Z')\,dZ'. \qquad (8)$$

Например, при $u_0(Z)=A_0\sin\omega Z$ для $Z>0$ (тогда скачок скорости на фронте $v_0=A_0\omega c_1'$) получаем из (8), что

$$U(Z)=\frac{A_0\omega}{\lambda}\sin\lambda Z+\frac{A_0\lambda}{\lambda^2-\omega^2}(\lambda\sin\omega Z-\omega\sin\lambda Z).$$

2. Установившийся колебательный режим. Пусть фронт волны П ушел в плюс бесконечность. Тогда в среде и стержне устанавливается колебательный режим, описывающийся перемещениями

$$u(r,\ Z)=A(r)e^{i\omega Z}\equiv A(r)e^{i\omega(c_1't-z)}, \qquad (9)$$

$$U(Z)=Be^{i\omega Z}\quad (B=\text{const}). \qquad (10)$$

Так же, как и в п. 1, поставим задачу: по измеренной на расстоянии $r=R$ амплитуде горизонтальных колебаний среды $A(R)=A_0$ определить амплитуду B колебаний стержня. Отметим, что в формулах (9), (10) ω/c_1' тоже измеренная (заданная) частота колебаний.

Подстановка представлений (9), (10) в (1), (2) и решение соответствующей краевой задачи приводят к следующему выражению для амплитуды колебаний точек среды:

$$A(r)=\frac{\ln(r/a)}{\ln(R/a)}(A_0-B)+B. \tag{11}$$

Тогда уравнение продольных колебаний стержня (6) после сокращения на общий множитель $e^{i\omega z}$ принимает вид

$$-\omega^2 B+\lambda^2(B-A_0)=0,$$

откуда

$$B=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\omega^2}A_0. \tag{12}$$

Назовем величину $\lambda c_1'$, определяемую выражением (7), частотой собственных «связанных» колебаний стержня. Из формулы (12) следует, что когда частота сейсмических колебаний $\omega c_1'$ стремится к $\lambda c_1'$, амплитуда колебаний стержня неограниченно возрастает, т. е. *в сверхзвуковом случае может наблюдаться явление резонанса.*

3. Решение задачи для дозвукового случая $M<1$. В этом случае существует только установившийся колебательный режим, поэтому постановка и решение задачи полностью аналогичны изложенному в п. 2. Амплитуда колебаний точек среды также определяется формулой (11). Единственное отличие будет состоять в том, что уравнение движения стержня (совпадающее с (6) при замене λ^2 на $-\bar{\lambda}^2$) приведет для амплитуды колебаний стержня B к соотношению

$$\omega^2 B+\bar{\lambda}^2(B-A_0)=0,$$

где

$$\bar{\lambda}^2=\frac{\mu'}{\rho a^2(1-M^2)\ln(R/a)}.$$

Отсюда получаем

$$B=\frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2+\omega^2}.$$

Таким образом, в дозвуковом случае ($M<1$) явление резонанса не наблюдается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашидов Т. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент, 1973.
2. Ильюшин А. А., Рашидов Т. Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод//Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1971. № 1. 35—41.

Поступила в редакцию
13.05.96