

УДК 517.956.223

ОБ ИНДЕКСЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2006 г. А. П. Солдатов

1. **Постановка задачи.** Для эллиптической системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

с постоянными матричными коэффициентами $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ рассмотрим в ограниченной области D задачу Дирихле

$$u|_{\partial D} = f. \quad (2)$$

Для областей D , ограниченных гладким контуром Γ , эта задача изучена А.В. Бицадзе [1]. Им также выделен класс так называемых слабо связанных систем (1), принадлежность к которому необходима и достаточна для фредгольмовости задачи Дирихле. При этом индекс задачи оказывался равным нулю. В общем случае эллиптических систем второго порядка с непрерывными коэффициентами эти исследования были продолжены в работах [2–5] и др.

С системой (1) естественным образом связаны квадратичный матричный пучок $P(z) = z^2 - A_1 z - A_0$ и характеристический многочлен $\det P(z)$ степени $2l$. Условие эллиптичности заключается в том, что корни этого многочлена не лежат на вещественной оси. Множество этих корней в верхней полуплоскости обозначим через σ . Обозначив через λ_ν кратность корня $\nu \in \sigma$, можем, таким образом, записать

$$\det P(z) = \prod_{\nu \in \sigma} (z - \nu)^{\lambda_\nu} (z - \bar{\nu})^{\lambda_\nu}, \quad \sum_{\nu \in \sigma} \lambda_\nu = l.$$

Как показано в работе [6], условие слабой связанности системы равносильно обратимости матрицы $\int_{-\infty}^{\infty} P^{-1}(t) dt$. Там же указано и другое эквивалентное определение слабой связанности системы. Для любой эллиптической системы (1) найдутся две матрицы $B, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ такие, что

$$\det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BJ & \bar{B}J \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det(z - J) = \prod_{\nu \in \sigma} (z - \nu)^{\lambda_\nu}, \quad (3)$$

и выполнено матричное соотношение

$$BJ^2 - A_1 BJ - A_0 B = 0. \quad (4)$$

Здесь матрица J определена с точностью до подобия и может быть выбрана в жордановой форме.

В настоящей работе, предполагая систему (1) слабо связанной, задачу Дирихле рассмотрим в области D , ограниченной кусочно-гладким контуром Γ . Эллиптическим задачам в кусочно-гладких областях на плоскости посвящены многочисленные исследования (см., например, работы [7–10], где приведена подробная библиография). Ниже исследования будут вестись в модифицированных весовых пространствах Гельдера. Напомним [11] определения этих пространств.

Выберем на Γ конечное множество F , содержащее все угловые точки контура, и рассмотрим семейство $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел. Обозначим через $C_\lambda^\mu(\bar{D}, F)$, $0 < \mu < 1$, пространство всех непрерывных на $\bar{D} \setminus F$ функций $\varphi(z)$, для которых

$$\varphi_*(z) = \varphi(z) \prod_{\tau \in F} |z - \tau|^{\mu - \lambda_\tau} \in C^\mu(\bar{D}), \quad \varphi_*(\tau) = 0, \quad \tau \in F.$$

Относительно перенесенной нормы это пространство банахово и является весовым в следующем смысле: пространство C_0^μ состоит из ограниченных функций, а умножение на весовую функцию $\rho(z) = \prod_F |z - \tau|^{\lambda_\tau}$ осуществляет изоморфизм C_0^μ на C_λ^μ . Как видно из этого определения, при $\lambda = \mu$ пространство C_μ^μ состоит из функций $\varphi \in C^\mu(\bar{D})$, обращающихся в нуль на F . Подпространство C_λ^μ непрерывно дифференцируемых на $\bar{D} \setminus F$ функций φ , частные производные φ_x, φ_y которых принадлежат $C_{\lambda-1}^\mu$, обозначим через $C_\lambda^{1,\mu}$.

Введем далее расширение $C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F) \supseteq C_\lambda^\mu(\bar{D}, F)$ многочленами $p(z)$ комплексной переменной z . Очевидно, это расширение конечномерно и, следовательно, относительно соответствующей нормы пространство $C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$ банахово. Аналогичный смысл имеет пространство $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$ по отношению к $C_\lambda^{1,\mu}$. Функции $\varphi \in C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$ непрерывны на $\bar{D} \setminus \{\tau \in F, \lambda_\tau \leq 0\}$ и при $z \rightarrow \tau$ ведут себя как $O(1)|z - \tau|^{\lambda_\tau}$, если $\lambda_\tau \leq 0$, и $\varphi(\tau) + O(1)|z - \tau|^{\lambda_\tau}$, если $\lambda_\tau > 0$. Нетрудно показать также, что если $\lambda < 1$, то любая функция $\varphi \in C^1(\bar{D} \setminus F)$, производные которой ведут себя как $O(1)|z - \tau|^{\lambda_\tau - 1}$ при $z \rightarrow \tau$, принадлежит $C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$. Кроме того, справедливы вложения

$$C^\mu(\bar{D}) \subseteq C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F), \quad \lambda \leq \mu, \quad C^{1,\mu}(\bar{D}) \subseteq C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\bar{D}, F), \quad \lambda \leq 1 + \mu,$$

причем они переходят в точные равенства при $\lambda = \mu$ и $\lambda = 1 + \mu$ соответственно.

Аналогично все эти пространства определяются и на кусочно-гладком контуре Γ . Очевидно, оператор сужения $\varphi \rightarrow \varphi|_\Gamma$ ограничен: $C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F) \rightarrow C_{(\lambda)}^\mu(\Gamma, F)$ и аналогично для пространств $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$. Однако для справедливости этого факта по отношению к символу $C^{1,\mu}$ на гладкие дуги, составляющие контур Γ , необходимо наложить дополнительное условие Ляпунова. Более точно, каждая дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащая внутри себя точек $\tau \in F$, должна принадлежать классу $C^{1,\mu}$. В результате для пары (Γ, F) получаем класс, который обозначим также $C^{1,\mu}$. Для кривых Γ этого класса оператор сужения ограничен в пространствах $C_\lambda^{1,\mu}$ и $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$.

В дальнейшем задачу Дирихле рассматриваем в пространстве $C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$ при $0 < |\lambda| < 1$ (т.е. при $0 < |\lambda_\tau| < 1$ для всех $\tau \in F$) в предположении, что Γ не содержит угловых точек возврата и пара (Γ, F) принадлежит классу $C^{1,\mu+0}$ (т.е. $C^{1,\mu+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$).

2. Редукция к задаче Римана–Гильберта. Рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

с матрицей J из (3), (4), решения которой называем J -аналитическими или гипераналитическими функциями [12]. Основные результаты теории аналитических функций сохраняют свою силу и для решений этой системы, при этом роль комплексной переменной $\alpha + i\beta$ играет матрица

$$(\alpha + i\beta)_J = \alpha 1 + \beta J, \tag{6}$$

где 1 означает единичную матрицу. Так, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)_J^k \phi^{(k)}(z_0), \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k},$$

а интеграл Коши определяется равенством

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \tag{7}$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к D и аналогично (6) положено $(d\alpha + id\beta)_J = 1d\alpha + Jd\beta$. В этих обозначениях любая J -аналитическая в D функция

$\phi \in C(\bar{D})$ представима формулой Коши $2\phi = I\varphi^+$. Эта формула сохраняется и для функций $\phi \in C_\lambda^\mu(\bar{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$. В этом случае интегральный оператор $I: C_\lambda^\mu(\bar{D}, F) \rightarrow C^\mu(\Gamma, F)$ ограничен и справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$(I\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + (K\varphi)(t_0), \quad t_0 \in \Gamma \setminus F. \quad (8)$$

Здесь сингулярный интеграл $(K\varphi)(t_0)$ определяется аналогично (7) по отношению к $z = t_0$.

Для эллиптической системы (1) решения уравнения (5), где J фигурирует в условии (3), играют ту же роль, что и аналитические функции применительно к уравнению Лапласа. Она заключается в представлении

$$u = \operatorname{Re} B\phi \quad (9)$$

общего решения системы (1). То, что функция (9) является решением системы (1), непосредственно следует из (4). С точностью до постоянного слагаемого $\eta \in \mathbb{C}^l$ производная ϕ' здесь определяется по u однозначно. Обращение этой формулы можно получить, если ее продифференцировать и воспользоваться соотношениями $2u_x = B\phi' + \bar{B}\phi'$, $2u_y = BJ\phi' + \bar{B}J\phi'$, вытекающими из (7). Тогда с учетом (3)

$$\phi' = 2 \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BJ & \bar{B}J \end{pmatrix}^{-1}. \quad (10)$$

В частности, ϕ' является однозначной функцией. Однако сама функция ϕ , восстанавливаемая криволинейным интегралом

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \int_{z_0}^z dt J(C_1 u_x + C_2 u_y)(t),$$

в многосвязной области, вообще говоря, многозначна. Характер ее многозначности зависит от порядка связности области D , т.е. от числа s связных компонент контура $\Gamma = \partial D$. В неявном виде соответствующий результат [12] может быть сформулирован следующим образом.

Пусть для определенности $z = 0 \in D$. Тогда найдутся такие $l \times l$ -матрицы функции $u_j \in C^\infty(\bar{D})$, $1 \leq j \leq s$, столбцы которых удовлетворяют уравнению (1), что любое решение этого уравнения единственным образом представимо в виде

$$u = \operatorname{Re} B\phi + \sum_{j=1}^s u_j \xi_j, \quad \phi(0) = 0, \quad (11)$$

с некоторыми $\xi_j \in \mathbb{R}^l$. Решение задачи Дирихле (1), (2) будем искать в классе функций этого вида, где $\phi \in C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$, $0 < |\lambda| < 1$.

Обозначим через m_λ число точек $\tau \in F$, для которых $\lambda_\tau > 0$, случай $\lambda < 0$ не исключается и соответствует $m_\lambda = 0$. Нетрудно видеть, что любая J -аналитическая функция $\phi \in C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$ единственным образом представима в виде

$$\phi = \phi_0 + \sum_{j=1}^{m_\lambda} z_j^j \eta_j, \quad \phi_0(0) = 0,$$

с некоторыми $\eta_j \in \mathbb{C}^l$. Подстановка этого выражения в (11) дает аналогичное представление в классе $\phi \in C_\lambda^\mu$ с той разницей, что s нужно заменить на $s + m_\lambda$. В свою очередь подстановка последнего представления в условие (2) редуцирует задачу Дирихле к эквивалентной краевой задаче

$$\operatorname{Re} B\phi^+ + \sum_{j=1}^{s+m_\lambda} b_j \xi_j = f, \quad \phi(0) = 0, \quad (12)$$

для J -аналитической функции $\phi \in C_{\lambda}^{\mu}(\bar{D}, F)$ и $\xi_j \in \mathbb{R}^l$, где положено $b_j = u_j|_{\Gamma}$. Поскольку $u_j \in C^1(\bar{D})$ и контур Γ не содержит точек возврата, матрицы-функции b_j удовлетворяют условию Липшица на Γ и, следовательно, принадлежат классу $C_{(\lambda)}^{\mu}(\Gamma, F)$, $\lambda < 1$. Ясно также, что оператор умножения $\varphi \rightarrow b_j\varphi$ ограничен в $C_{(\lambda)}^{\mu}$.

Выберем скалярную функцию $\chi_{\tau} \in C^{\infty}$, которая тождественно равна единице в окрестности τ и нулю в окрестности $F \setminus \tau$. Тогда оператор

$$Pf = f - \sum_{\tau, \lambda_{\tau} > 0} \chi_{\tau} f(\tau)$$

проектирует пространство $C_{(\lambda)}^{\mu}$ на C_{λ}^{μ} и задачу (12) можем переписать в форме системы

$$\operatorname{Re} B\phi^+ + \sum_{j=1}^{s+m_{\lambda}} (Pb_j)\xi_j = Pf, \quad \phi(0) = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{s+m_{\lambda}} b_j(\tau)\xi_j = f(\tau), \quad \lambda_{\tau} > 0.$$

3. Основные результаты. Оператор системы (13) действует из $C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F) \times (\mathbb{R}^l)^{s+m_{\lambda}} \rightarrow C_{(\lambda)}^{\mu}(\Gamma, F) \times (\mathbb{R}^l)^{m_{\lambda}}$, т.е. эта система является конечномерным расширением задачи Римана-Гильберта

$$\operatorname{Re} B\phi^+ = f^0 \tag{13^0}$$

в классе J -аналитических функций $\phi \in C_{\lambda}^{\mu}$. Последняя задача подробно изучена в работе [12] и ее результаты можем переформулировать применительно к (13), т.е. к исходной задаче Дирихле (1), (2).

При достаточно малом $r > 0$ область $D_{\tau} = D \cap \{|z - \tau| < r\}$ является криволинейным сектором с вершиной τ , раствор которого обозначим через θ_{τ} . По условию вершина τ не является точкой возврата контура Γ , что выражается неравенством $0 < \theta_{\tau} < 2\pi$. Кривая $\Gamma_{\tau} = \Gamma \cap \{|z - \tau| < r\}$ состоит из двух гладких дуг $\Gamma_{\tau \pm 0}$, являющихся боковыми сторонами сектора D_{τ} . Их обозначение таково, что переход из $\Gamma_{\tau-0}$ в $\Gamma_{\tau+0}$ через вершину τ осуществляется в положительном направлении контура Γ , т.е. в направлении, оставляющем область D слева. Пусть $q_{\tau \pm 0} \in \mathbb{C}$ есть единичный касательный вектор к дуге $\Gamma_{\tau \pm 0}$ в точке τ , направленный от τ к другому концу этой дуги, так что

$$q_{\tau} = q_{\tau-0}q_{\tau+0}^{-1} = e^{i\theta_{\tau}}. \tag{14}$$

В соответствии с обозначением (6) рассмотрим матрицу

$$Q_{\tau} = q_{\tau-0,J}q_{\tau+0,J}^{-1}, \tag{15}$$

с учетом (3) ее собственными значениями являются комплексные числа

$$q_{\tau(\nu)} = q_{\tau-0,\nu}q_{\tau+0,\nu}^{-1} = \rho_{\tau(\nu)}e^{i\theta_{\tau(\nu)}}, \quad \nu \in \sigma, \tag{16}$$

кратности l_{ν} . Здесь аналогично (6) под $(\alpha + i\beta)_{\nu}$ понимается комплексное число $\alpha + \nu\beta$.

Поскольку точки $\nu \in \sigma$ лежат в верхней полуплоскости, аффинное преобразование $z \rightarrow z_{\nu}$ инвариантно в этой полуплоскости и оставляет точки вещественной прямой неподвижными. В частности, оно не меняет ориентации плоскости. Поэтому аналогично (14) величина $\theta_{\tau(\nu)}$ есть раствор криволинейного сектора $D_{\tau(\nu)}$, в который переходит D_{τ} при этом преобразовании. Заметим, что соотношения $0 < \theta_{\tau(\nu)} < \pi$, $\theta_{\tau(\nu)} = \pi$, $\pi < \theta_{\tau(\nu)} < 2\pi$ равносильны соответственно $0 < \theta_{\tau} < \pi$, $\theta_{\tau} = \pi$, $\pi < \theta_{\tau} < 2\pi$. В этом легко убедиться, варьируя ν вдоль отрезка, соединяющего ν с мнимой единицей i .

С матрицей Q_τ свяжем комплексные степени $Q_\tau^\zeta = e^{\zeta \ln Q_\tau}$, $\overline{Q}_\tau^\zeta = e^{\zeta \overline{\ln Q_\tau}}$, которые понимаются в смысле функций от матриц. Черта в правой части второго равенства означает комплексное сопряжение. С помощью этих степеней введем семейство целых матриц-функций

$$X_\tau(\zeta) = \zeta^{-1}[Q_\tau^\zeta(B^{-1}\overline{B}) - (B^{-1}\overline{B})\overline{Q}_\tau^\zeta], \quad X_\tau^0(\zeta) = \zeta^{-1}(Q_\tau^\zeta - \overline{Q}_\tau^\zeta). \tag{17}$$

Согласно (14), собственными значениями матрицы $X_\tau^0(\zeta)$ являются $\zeta^{-1}(q_{\tau(\nu)}^\zeta - \overline{q}_{\tau(\nu)}^\zeta)$ кратности l_ν , $\nu \in \sigma$. Поэтому

$$\det X_\tau^0(\zeta) = \zeta^{-l} \prod_{\nu \in \sigma} (q_{\tau(\nu)}^\zeta - \overline{q}_{\tau(\nu)}^\zeta)^{l_\nu} = (2i)^l \prod_{\nu \in \sigma} \left[\frac{\sin \theta_{\tau(\nu)} \zeta}{\zeta} \right]^{l_\nu}. \tag{18}$$

В частности, $\det X_\tau^0(\zeta) \neq 0$ в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$.

В каждой полосе $\alpha_1 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \alpha_2$ матрица-функция $X_\tau(\zeta)(X_\tau^0)^{-1}(\zeta) \rightarrow B^{-1}\overline{B}$ при $\operatorname{Im} \zeta \rightarrow \infty$ равномерно по $\operatorname{Re} \zeta$. Поэтому в этой полосе определитель $\det X_\tau(\zeta)$ имеет конечное число нулей. Число этих нулей, взятое с учетом кратности, в открытой полосе между прямыми $\operatorname{Re} \zeta = 0$ и $\operatorname{Re} \zeta = \alpha$, $\alpha \neq 0$, обозначим через $n_\tau(\alpha)$. Аналогичный смысл имеет число n_τ^0 по отношению к прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$. Выберем далее число $\delta > 0$ столь малым, что $n_\tau(\delta) = n_\tau(-\delta) = 0$ для всех τ , и введем целые числа

$$\Delta_\tau^\pm = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arg} \left(\frac{\det X_\tau}{\det X_\tau^0} \right) \Big|_{\pm\delta - i\infty}^{\pm\delta + i\infty}. \tag{19}$$

Заметим, что по теореме Руше

$$\Delta_\tau^+ - \Delta_\tau^- = n_\tau^0. \tag{20}$$

Теорема 1. *Задача Дирихле (1), (2) фредгольмова в классе C_λ^μ , $0 < |\lambda| < 1$, тогда и только тогда, когда*

$$\det X_\tau(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_\tau, \quad \tau \in F, \tag{21}$$

и ее индекс задается формулой

$$\kappa = - \sum_{\tau \in F} [\Delta_\tau^\pm \pm n_\tau(\lambda_\tau)], \tag{22}$$

где знак \pm совпадает со знаком $\operatorname{sgn} \lambda_\tau$.

Доказательство. Очевидно, операторы задач (13) и (13⁰) фредгольмова эквивалентны и их индексы κ и κ^0 связаны соотношением

$$\kappa = \kappa^0 + (s - 2)l, \tag{23}$$

где учтено условие $\phi(0) = 0$ в задаче (13).

С другой стороны, критерий фредгольмовости задачи (13⁰) и ее индекс даны в [12]. Пусть m – число элементов множества F . Согласно [12], концевой символ задачи (13⁰) представляет собой блочно-диагональную $m \times m$ -матрицу, составленную из диагональных блоков

$$X(\zeta; \tau) = \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BQ_\tau^\zeta & \overline{B}\overline{Q}_\tau^\zeta \end{pmatrix}, \tag{24}$$

рассматриваемых на прямых $\operatorname{Re} \zeta = \lambda_\tau$. Аналогичный смысл имеет матрица $X^0(\zeta; \tau)$ с заменой B единичной матрицей. В этих обозначениях критерий фредгольмовости задачи (13⁰) в пространстве C_λ^μ выражается неравенством

$$\det X(\zeta; \tau) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_\tau, \quad \tau \in F, \tag{25}$$

а ее индекс $\kappa^0(\lambda)$ при $1/2 \leq \lambda < 0$ задается формулой

$$\kappa^0(\lambda) = - \sum_{\tau} \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\det X(\zeta; \tau)}{\det X^0(\zeta; \tau)} \Big|_{\lambda_{\tau-i\infty}}^{\lambda_{\tau+i\infty}} + l(2-s). \tag{26}$$

В общем случае произвольного весового порядка λ эту формулу нужно дополнить соотношением

$$\kappa^0(\lambda') - \kappa^0(\lambda'') = \sum_{\tau} k_{\tau}, \tag{27}$$

где k_{τ} – число нулей функции $\det X(\zeta; \tau)$ в полосе между прямыми $\operatorname{Re} \zeta = \lambda'_{\tau}$ и $\operatorname{Re} \zeta = \lambda''_{\tau}$, взятое со знаком “+”, если $\lambda'_{\tau} \leq \lambda''_{\tau}$, и с противоположным знаком в противном случае.

Из сравнения матриц (17) с (24) видно, что

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Q_{\tau}^{\zeta} B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} X(\zeta; \tau) = \begin{pmatrix} 1 & B^{-1} \bar{B} \\ 0 & \zeta X_{\tau}(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Полагая здесь $B = 1$, аналогичное равенство можно записать по отношению к матрицам $X^0(\zeta; \tau_0)$ и $X_{\tau}^0(\zeta)$. Поэтому условия (21) и (25) равносильны, а формулу (26) для $\lambda = -\delta$ в обозначениях (19) можно переписать в форме

$$\kappa^0(-\delta) = - \sum_{\tau} \Delta_{\tau}^{-} + l(2-s).$$

Из этих же соображений соотношение (27), примененное к весовым порядкам $\lambda' = \lambda$ и $\lambda'' = -\delta$, приводит к равенству

$$\kappa^0(\lambda) - \kappa^0(-\delta) = \sum_{\tau} k_{\tau}, \quad k_{\tau} = \begin{cases} n_{\tau}(\lambda_{\tau}), & \lambda_{\tau} < 0, \\ -n_{\tau}(\lambda_{\tau}) - n_{\tau}^0, & \lambda_{\tau} > 0. \end{cases}$$

Объединяя последние два соотношения с (20) и (23), в результате придем к формуле (22), завершающей доказательство теоремы.

Заметим, что целые числа (19), а значит, и индекс (22) задачи Дирихле вычисляются более явно, если функция $\zeta^l \det X_{\tau}(\zeta)$ четна. Тогда, согласно равенству (18), четно и отношение $\det X / \det X^0$, и потому величины (19) противоположны по знаку. Отсюда, согласно (20), получаем

$$\Delta_{\tau}^{\pm} = \pm \frac{1}{2} n_{\tau}^0. \tag{29}$$

Из тех же соображений следует, что $n_{\tau}(\alpha) = -n_{\tau}(-\alpha)$, поэтому с учетом (22) индексы задачи Дирихле в классах $C_{(\pm\lambda)}^{\mu}$ противоположны по знаку.

Как и в [12], теорему 1 дополним соответствующим результатом о гладкости и асимптотике решения задачи Дирихле.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 функция $u \in C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ является решением задачи Дирихле с правой частью $f \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\Gamma, F)$, то $u \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\bar{D}, F)$.

Доказательство. Как отмечено выше, матрицы-функции b_j принадлежат классу $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\Gamma, F)$. Следовательно, для функции $\phi \in C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ в задаче (13) правая часть $f^0 = Pf - \sum (Pb_j)\xi_j$ задачи (13⁰) принадлежит классу $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\Gamma, F)$. Поэтому остается к этой задаче применить соответствующий результат [12] о гладкости ее решения.

Семейство пространств $C_{(\lambda)}^{\mu}$ монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров μ и λ_{τ} , $\tau \in F$. Соответственно этому можем ввести классы

$$C_{(\lambda+0)}^{\mu} = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{(\lambda+\varepsilon)}^{\mu}, \quad C_{(\lambda-0)}^{\mu} = \bigcap_{\varepsilon>0} C_{(\lambda-\varepsilon)}^{\mu}.$$

При $\lambda = 0$ их обозначаем кратко $C_{(+0)}^\mu$ и $C_{(-0)}^\mu$. В качестве примера аналогично комплексным степеням Q_τ^ζ , содержащимся в (17), рассмотрим в криволинейном секторе D_τ матрицы-функции $\ln(z - \tau)_J$ и $(z - \tau)_J^{\zeta_0}$. Как легко видеть, функции $(z - \tau)_J^{\zeta_0} [\ln(z - \tau)_J]^j \in C_{(\alpha-0)}^\mu$, $\operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha$, $j = 0, 1, \dots$

Пусть точка ζ_0 является нулем функции $\det X_\tau(\zeta)$, так что матрица-функция $X_\tau^{-1}(\zeta)$ имеет в этой точке полюс некоторого порядка $r(\zeta_0) \geq 1$. Заметим, что $r(\zeta_0)$ не превосходит кратности нуля ζ_0 функции $\det X_\tau(\zeta)$. Для описания асимптотического поведения решения $u(z)$ в секторе D_τ при $z \rightarrow \tau$ с каждым числом $\alpha \in \mathbb{R}$ свяжем J -аналитическую функцию $\phi_\tau(z; \alpha) \in C_{(\alpha-0)}^\mu$ вида

$$\phi_\tau(z; \alpha) = \sum_{\operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z - \tau)_J^{\zeta_0} [\ln(z - \tau)_J]^j c_j(\zeta_0) \tag{30}$$

с некоторыми коэффициентами $c_j(\zeta_0) \in \mathbb{C}^J$, где суммирование ведется по всем нулям ζ_0 функции $\det X_\tau(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha$. Строго говоря, это выражение используем только при $\alpha \neq 0$. В случае $\alpha = 0$ к точкам ζ_0 причисляем и $\zeta_0 = 0$, считая $r(0) = 0$ при $\det X_\tau(0) \neq 0$. В этом случае полагаем

$$\phi_\tau(z; 0) = \sum_{\operatorname{Re} \zeta_0 = 0, \zeta_0 \neq 0} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z - \tau)_J^{\zeta_0} [\ln(z - \tau)_J]^j c_j(\zeta_0) + \sum_{j=0}^{r(0)} [\ln(z - \tau)_J]^j c_j(0). \tag{30^0}$$

Заметим, что в обоих случаях производная $\phi'_\tau(z) \in C_{\alpha-1}^\mu(D_\tau, \tau)$.

В следующей теореме условие (21) уже не предполагается выполненным.

Теорема 3. Пусть задано решение u задачи Дирихле в классе $C_{(\lambda-0)}^\mu(\overline{D}, F)$ (более точно, в представлении (12) этому классу принадлежит функция ϕ) и пусть для некоторого $\tau \in F$ правая часть f этой задачи на боковой границе Γ_τ сектора D_τ принадлежит классу $C_{(\lambda_\tau+0)}^\mu(\Gamma_\tau, \tau)$. Тогда найдется такая функция $\phi_\tau(z; \lambda_\tau)$ вида (30) или (30⁰) в зависимости от значения λ_τ , что разность

$$u_\tau = u - \operatorname{Re} B\phi_\tau \in C_{\lambda_\tau+0}^\mu(\overline{D}_\tau, \tau). \tag{31}$$

Если дополнительно $f \in C_{(\lambda_\tau+0)}^{1,\mu}(\Gamma_\tau, \tau)$, то и $u_\tau \in C_{(\lambda_\tau+0)}^{1,\mu}(\overline{D}_\tau, \tau)$.

Доказательство. Как и в теореме 2, рассмотрим задачу (13⁰) с правой частью $f^0 \in C_{\lambda_\tau+0}^\mu(\Gamma_\tau, \tau)$. Для ее решения ϕ можем воспользоваться соответствующим результатом [12] об асимптотике. Он формулируется аналогично доказываемой теореме с той разницей, что $r(\zeta_0)$ в (30) следует заменить порядком полюса $\tilde{r}(\zeta_0)$ функции $X^{-1}(\zeta; \tau)$ в точке ζ_0 . При этом различие между случаями $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ здесь отсутствует. Из равенства (28) видно, что величины $r(\zeta_0)$ и $\tilde{r}(\zeta_0)$ связаны соотношением $\tilde{r}(\zeta_0) = r(\zeta_0) + (1 - \operatorname{sgn} |\zeta_0|)$. В результате приходим к справедливости всех утверждений теоремы.

Следствие. Пусть $n_\tau^0 = 0$, т.е. $\det X_\tau(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Re} \zeta = 0$. Тогда любое решение $u \in C_{-0}^\mu$ задачи Дирихле, правая часть которой $f \in C_{(+0)}^\mu(\Gamma_\tau, \tau)$, также принадлежит классу $C_{(+0)}^\mu(\overline{D}_\tau, \tau)$ в секторе D_τ .

4. Самосопряженные эллиптические системы. Полученные результаты применим к самосопряженной по Лагранжу эллиптической системе

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad A_{ij}^T = A_{ji}, \tag{32}$$

где положено $x_1 = x$, $x_2 = y$ и символ T означает матричное транспонирование. Задачу Дирихле (2) для этой системы рассмотрим в классах $C_{-0}^\mu = C_{(-0)}^\mu$ и $C_{(+0)}^\mu$. Согласно теоремам 1 и 2, класс $V^\pm \subseteq C_{(\pm 0)}^\mu$ решений однородной задачи конечномерен и содержится в $C_{(\pm 0)}^{1,\mu}$.

В частности, для $v \in V^\pm$ конормальная производная

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^2 n_i A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{33}$$

где n_1, n_2 – компоненты внешней нормали, принадлежит классу $C_{-1\pm 0}^\mu(\Gamma, F)$. Поэтому ее произведение с функцией из $C_{(\mp 0)}^\mu$ принадлежит классу $C_{-1+0}^\mu(\Gamma, F)$ и, значит, интегрируемо. Под произведением uv двух l -векторов здесь и ниже понимается скалярное произведение $u_1v_1 + \dots + u_lv_l$.

Теорема 4. Пусть система (32) слабо связана и выполнено соотношение (29) для всех $\tau \in F$. Тогда условия

$$\int_{\Gamma} f \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0, \quad v \in V^\mp, \tag{34^\pm}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи в классе $C_{(\pm 0)}^\mu$. Соответственно индекс κ^\pm задачи в этом классе определяется равенством

$$\kappa^\pm = \dim V^\pm - \dim V^\mp = \mp \frac{1}{2} \sum_{\tau} n_{\tau}^0. \tag{35}$$

Доказательство. В силу самосопряженности системы (32) для любых ее решений u, v справедливо тождество

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v - u \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] = 0.$$

Следовательно, если $u, v \in C_{(\mp 0)}^{1,\mu}$, то выражение в квадратных скобках этого тождества принадлежит классу C_{-1+0}^μ . Поэтому можно воспользоваться формулой Грина, согласно которой в обозначениях (33) имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] ds = 0.$$

В частности, условия (34 $^\pm$) необходимы для разрешимости задачи (2), (32) в классе $C_{(\pm 0)}^{1,\mu}$. В силу соображений плотности этот факт остается справедливым и по отношению к классу $C_{(\pm 0)}^\mu$.

Убедимся далее, что число линейно независимых условий (34 $^\pm$) совпадает с размерностью $\dim V^\mp$. Другими словами, в классе $V = V^-$ линейная операция $v \rightarrow \partial v / \partial \nu$ взаимно однозначна.

В самом деле, пусть $\partial v / \partial \nu = 0$ на Γ для некоторой функции $v \in V$. Тогда с учетом (34) и равенства $v|_{\Gamma} = 0$ для частных производных v_x, v_y на Γ имеем однородную систему линейных уравнений

$$(n_1 A_{11} + n_2 A_{21})v_x + (n_1 A_{12} + n_2 A_{22})v_y = 0, \quad -n_2 v_x + n_1 v_y = 0. \tag{36}$$

Для матрицы коэффициентов этой системы имеем соотношение

$$\begin{pmatrix} \sum_i n_i A_{i1} & \sum_i n_i A_{i2} \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где для краткости положено $Q_1 = \sum_{i,j} n_i n_j A_{ij}$, $Q_2 = \sum_i n_i (n_1 A_{i2} - n_2 A_{i1})$. Совместно с условием эллиптичности $\det Q_1 \neq 0$ уравнения (32) из этого соотношения следует, что система (36) имеет только нулевое решение, т.е. $v_x = v_y = 0$ на Γ . Запишем для v представление (9), в котором, согласно (10), производная ϕ' обращается в нуль на Γ . По теореме Коши отсюда вытекает, что $\phi' \equiv 0$ в области D и, значит, $v \equiv 0$.

Итак, соотношения (34 $^\pm$) определяют $\dim V^\mp$ линейно независимых условий ортогональности. С учетом (29) из теоремы 1 следует, что индекс $\kappa^\pm = \dim V^\pm - k^\pm$ задачи в классе $C_{(\pm)}^\mu$ определяется правой частью равенства (35). При этом в силу сказанного выше для числа k^\pm линейно независимых условий разрешимости задачи имеем оценку снизу $k^\pm \geq \dim V^\mp$. Таким образом, $0 = \kappa^+ - \kappa^- = (\dim V^+ - k^-) + (\dim V^- - k^+)$, что возможно только при $k^\pm = \dim V^\mp$. Отсюда все утверждения теоремы получаются непосредственно.

По абсолютной величине индексы (35) совпадают с размерностью пространства V^0 в разложении $V^- = V^0 \oplus V^+$. По теореме 3 каждая из функций, образующих базис пространства V^0 , допускает в точках $\tau \in F$ асимптотику (31) с функциями ϕ_τ вида (30 0), отличными от нуля по крайней мере для одного τ . Ясно, что удвоенная размерность пространства V^0 равна сумме $\sum_\tau n_\tau^0$.

Как отмечено выше, соотношение (29) автоматически выполняется в случае четной функции $\zeta^l \det X_\tau(\zeta)$. В этом случае в предположении (25) индексы κ^\pm задачи в пространствах $C_{(\pm\lambda)}^\mu$ также противоположны. Если $V^\pm \subseteq C_{(\pm\lambda)}^\mu$ по-прежнему означают классы решений однородной задачи, то по теоремам 2, 3 имеем соотношения $V^+ \subseteq C_{(\lambda+0)}^{1,\mu}$, $V^- \subseteq C_{(\lambda-0)}^{1,\mu}$, из которых видно, что условия разрешимости (34 $^\pm$) имеют смысл и в этом случае. С помощью тех же рассуждений убеждаемся в том, что теорема 4 справедлива и в пространствах $C_{(\pm\lambda)}^\mu$.

5. Системы двух уравнений. В случае $l = 2$ вычисление определителя матриц X_τ можно осуществить явно. Положим

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{pmatrix} = (\det B) B^{-1}. \quad (37)$$

В этих обозначениях

$$B^* \bar{B} = \begin{pmatrix} r & -2ip_2 \\ 2ip_1 & \bar{r} \end{pmatrix}, \quad r = B_{22} \bar{B}_{11} - B_{12} \bar{B}_{21}, \quad p_j = \text{Im}(B_{1j} \bar{B}_{2j}), \quad j = 1, 2, \quad (38)$$

$$|\det B|^2 = \det B^* \det \bar{B} = |r|^2 - 4p_1 p_2.$$

Согласно (37), в определении (15) матрицы X_τ можно B^{-1} заменить матрицей B^* , что и будет предполагаться ниже. Таким образом, имеем

$$\zeta X_\tau(\zeta) = Q_\tau^\zeta (B^* \bar{B}) - (B^* \bar{B}) \bar{Q}_\tau^\zeta. \quad (39)$$

Как указано в п. 1, матрицу J в соотношениях (3), (4) можно брать в жордановой форме. Для нее возможны только следующие три случая:

$$J_I = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 \neq \nu_2; \quad J_{II} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}; \quad J_{III} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В последнем случае $J = J_{III}$ матрицы Q^ζ и \bar{Q}^ζ скалярны и (39) сводится к равенству $X_\tau(\zeta) = \zeta^{-1} (Q_\tau^\zeta - \bar{Q}_\tau^\zeta) (B^* \bar{B}) = X_\tau^0(\zeta) (B^* \bar{B})$. В частности, определители матриц X и X^0 отличаются постоянным множителем, так что $\Delta_\tau^\pm = 0$. Заметим, что в этом случае система (1) сводится к одному скалярному уравнению. Таким образом, в дальнейших рассмотрениях можем ограничиться первыми двумя случаями в (40).

Пусть сначала $J = J_I$. В этом случае матрица Q_τ в (15) диагональна с элементами (16) вдоль диагонали. Положим для краткости $q_j = q_\tau(\nu_j)$, $j = 1, 2$, и аналогично запишем

$q_j = \rho_j e^{i\theta_j}$. Тогда $q_j^\zeta = \rho_j^\zeta e^{i\theta_j \zeta}$, $\bar{q}_j^\zeta = \rho_j^\zeta e^{-i\theta_j \zeta}$ и $Q_\tau^\zeta = \text{diag}(q_1^\zeta, q_2^\zeta)$, $\bar{Q}_\tau^\zeta = \text{diag}(\bar{q}_1^\zeta, \bar{q}_2^\zeta)$. С учетом (38), (39) отсюда вытекает, что

$$\zeta X_\tau(\zeta) = \begin{pmatrix} r(q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) & -2ip_2(q_1^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) \\ 2ip_1(q_2^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) & \bar{r}(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 \det X_\tau(\zeta) &= |r|^2(q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) - 4p_1p_2(q_1^\zeta - \bar{q}_2^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) = \\ &= |\det B|^2(q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) - 4p_1p_2(q_1^\zeta \bar{q}_2^\zeta + q_2^\zeta \bar{q}_1^\zeta - q_1^\zeta \bar{q}_1^\zeta - q_2^\zeta \bar{q}_2^\zeta). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно записать и для X^0 с $r = \det B = 1$ и $p_j = 0$. После элементарных преобразований имеем

$$-\frac{\zeta^2 \det X_\tau(\zeta)}{4|\det B|^2 \rho_1^\zeta \rho_2^\zeta} = \sin \theta_1 \zeta \sin \theta_2 \zeta - \beta \left[\left(\frac{\rho_1^\zeta}{\rho_2^\zeta} - \frac{\rho_2^\zeta}{\rho_1^\zeta} \right)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \zeta \right], \tag{41_I}$$

$$\beta = \frac{p_1 p_2}{|\det B|^2} = \frac{\text{Im}(B_{11} \bar{B}_{21}) \text{Im}(B_{12} \bar{B}_{22})}{|\det B|^2}.$$

Заметим, что величина $\beta = \beta(B)$ здесь является инвариантом системы (1), т.е. не зависит от выбора матрицы B в соотношениях (3), (4) для $J = J_I$. В самом деле, согласно [13], любая другая матрица \tilde{B} этого типа связана с B соотношением $\tilde{B}_{ij} = \lambda_j B_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, с некоторыми $\lambda_j \neq 0$. Отсюда следует, что $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 p_1 p_2$ и $|\det \tilde{B}|^2 = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\det B|^2$, так что $\beta(\tilde{B}) = \beta(B)$. В [13] также указано выражение для определителя блочной матрицы, содержащейся в (3). В принятых обозначениях

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BJ & \bar{B} \bar{J} \end{pmatrix} = |\nu_1 - \nu_2|^2 |\det B|^2 \left(\beta - \frac{\text{Im } \nu_1 \text{Im } \nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2} \right).$$

Поэтому условие (3) равносильно условию

$$\beta \neq \frac{\text{Im } \nu_1 \text{Im } \nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2}. \tag{42_I}$$

Для заданного числа $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего этому условию, можно выбрать обратимую матрицу B , связанную с β соответствующим соотношением (41_I). В свою очередь, согласно [13], эта матрица определяет единственную эллиптическую систему (1), для которой выполнены соотношения (3), (4). В явном виде коэффициенты A_0, A_1 этой системы находятся из матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BJ & \bar{B} \bar{J} \\ BJ^2 & \bar{B} \bar{J}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BJ & \bar{B} \bar{J} \end{pmatrix}^{-1}, \quad J = J_I.$$

Обратимся к случаю $J = J_{II}$ в (40). В этом случае для матриц $q_{\tau \pm 0, J}$ в (15) имеем выражение

$$q_J = q_\nu \begin{pmatrix} 1 & q_\nu^{-1} \text{Im } q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q_\tau = q_{\tau(\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \delta_\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_\tau = \frac{\text{Im } q_{\tau-0}}{q_{\tau-0}} - \frac{\text{Im } q_{\tau+0}}{q_{\tau+0}}.$$

В обозначениях (14) комплексное число δ_τ можно также записать в форме

$$\delta_\tau = (\sin \theta_\tau) / (q_{\tau-0, \nu})(q_{\tau-0, \nu}). \tag{43}$$

Таким образом,

$$Q_\tau^\zeta = q_{\tau(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \delta_\tau \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_\tau^\zeta = \bar{q}_{\tau(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \bar{\delta}_\tau \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом (38), (39) отсюда получаем

$$\zeta X(\zeta) = \begin{pmatrix} r(q^\zeta - \bar{q}^\zeta) + 2ip_1 \delta \zeta q^\zeta & -2ip_2(q^\zeta - \bar{q}^\zeta) + \zeta(\bar{r} \delta q^\zeta - r \bar{\delta} \bar{q}^\zeta) \\ 2ip_1(q^\zeta - \bar{q}^\zeta) & \bar{r}(q^\zeta - \bar{q}^\zeta) - 2ip_1 \bar{\delta} \zeta \bar{q}^\zeta \end{pmatrix},$$

где для краткости положено $q = q_{\tau(\nu)}$, $\delta = \delta_\tau$. Аналогичное выражение имеем и для матрицы X^0 с $r = 1$ и $p_j = 0$. После элементарных преобразований приходим к равенству

$$-\frac{\zeta^2 \det X_\tau(\zeta)}{4|\det B|^2 \rho^2 \zeta} = \sin^2 \theta \zeta - \beta |\delta|^2 \zeta^2, \quad \beta = \frac{p_1^2}{|\det B|^2}. \quad (41_{II})$$

Согласно [13], две матрицы \tilde{B} и B в (3), (4) связаны соотношением $\tilde{B}_{i1} = \lambda_1 B_{i1}$, $\tilde{B}_{i2} = \lambda_2 B_{i1} + \lambda_1 B_{i2}$ с некоторыми скалярами $\lambda_1 \neq 0$ и λ_2 . Поэтому, как и в случае J_I , легко проверяется, что величина β является инвариантом системы (1). Из [13] также выводим, что в рассматриваемом случае

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BJ & \bar{B} \bar{J} \end{pmatrix} = |\det B|^2 (\beta - \text{Im}^2 \nu),$$

поэтому условие (3) сводится к

$$\beta \neq \text{Im}^2 \nu. \quad (42_{II})$$

Если заданное число β удовлетворяет условию (42_{II}) и обратимая матрица B связана с ним соответствующим соотношением (41_{II}), то, как и выше, убеждаемся в том, что эта матрица определяет единственную эллиптическую систему со свойствами (3), (4), где $J = J_{II}$.

Для определителя матрицы X^0 справедливы аналогичные выражения (41) с $\det B = 1$ и $\beta = 0$. Эти выражения показывают, что функция $\det X(\zeta)$ четна, так что имеют место соотношения (29). В этой связи особое значение приобретает задача вычисления числа n_τ^0 нулей функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\text{Re} \zeta = 0$. Согласно (41), эти нули совпадают с нулями функции

$$|\det B|^{-2} \frac{\det X_\tau}{\det X_\tau^0} = 1 - \beta h, \quad (44)$$

где соответственно двум случаям положено

$$h_I(\zeta) = \frac{4}{(\sin \theta_1 \zeta)(\sin \theta_2 \zeta)} \left[\text{sh}^2 \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \zeta + \sin^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \zeta \right], \quad h_{II}(\zeta) = \frac{|\delta_\tau|^2 \zeta^2}{\sin^2 \theta_{\tau(\nu)} \zeta}$$

(напомним, $\rho_j = \rho_{\tau(\nu_j)}$, $\theta_j = \theta_{\tau(\nu_j)}$). На мнимой оси

$$h_I(it) = \frac{4}{(\text{sh } t \theta_1)(\text{sh } t \theta_2)} \left[\text{sh}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) t - \sin^2 \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) t \right], \quad h_{II}(it) = \frac{|\delta_\tau|^2 t^2}{\text{sh}^2 t \theta_{\tau(\nu)}}$$

и, в частности,

$$h_I(0) = \frac{4}{\theta_1 \theta_2} \left[\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^2 - \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right], \quad h_{II}(0) = \frac{|\delta_\tau|^2}{\theta_{\tau(\nu)}^2}. \quad (45)$$

Поскольку $h(it) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то заключаем, что уравнение $1 - \beta h(it) = 0$ при $\beta h(0) \geq 1$ имеет на полуоси $t \geq 0$ по крайней мере один корень. Таким образом, $n_\tau^0 \geq 2$ при $\beta h(0) \geq 1$. Этот факт можно несколько уточнить.

Лемма 1. Если $J = J_{II}$, то

$$n_{\tau}^0 = \begin{cases} 2, & \beta h(0) \geq 1, \\ 0, & \beta h(0) < 1. \end{cases} \quad (46)$$

Аналогичное утверждение справедливо и в случае $J = J_I$ при дополнительном предположении

$$\rho_{\tau(\nu_1)} = \rho_{\tau(\nu_2)}, \quad \theta_{\tau(\nu_1)} = 3\theta_{\tau(\nu_2)}. \quad (47)$$

Доказательство. На полуоси $[0, \infty)$ функция $g(x) = x^2 / \operatorname{sh}^2 x$ строго монотонно убывает от 1 до 0. Поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t)$, отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть $J = J_I$ и выполнены соотношения (46), т.е. $\rho_1 = \rho_2$, $\theta_1 = 3\theta_2$. Тогда

$$h(it) = \frac{4 \operatorname{sh} t\theta_1}{\operatorname{sh} 3t\theta_1} = \frac{4}{3 + 4 \operatorname{sh}^2 t\theta_1}.$$

На полуоси $[0, \infty)$ функция $g(x) = 1/(1 + 3 \operatorname{sh}^2 x)$ строго монотонно убывает от 1 до 0. Поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t\theta_1)$, отсюда следует второе утверждение леммы.

Заметим, что в предположении (46) легко описать и распределение нулей функции $\det X_{\tau}(\zeta)$ на всей плоскости и, в частности, получить явное выражение для целочисленной характеристики $n_{\tau}(\alpha)$. В самом деле, в этом случае выражение (44_I) сильно упрощается:

$$\zeta^2 X_{\tau}(\zeta) = 4 |\det B|^2 \rho_1^{2\zeta} \rho_2^{2\zeta} (\sin^2 \theta_1 \zeta) (4 \sin^2 \theta_1 \zeta + 4\beta \sin \theta_1 \zeta - 3).$$

Возникает вопрос, когда выполнены соотношения (47), т.е. когда существуют единичные векторы $q_{\tau \pm 0}$, для которых справедливы эти соотношения. Ответ на этот вопрос удается дать только частично.

Лемма 2. Для заданных $\nu_1 \neq \nu_2$ существуют единичные векторы $q_{\tau \pm 0} \in \mathbb{C}$, для которых выполнено первое соотношение (47).

Доказательство. Запишем $q_{\tau \pm 0} = q_{\tau \pm 0}^1 + iq_{\tau \pm 0}^2$, $q_{\tau \pm 0}^j \in \mathbb{R}$. Тогда

$$q_k = \frac{q_{\tau-0}^1 + \nu_k q_{\tau-0}^2}{q_{\tau+0}^1 + \nu_k q_{\tau+0}^2}, \quad k = 1, 2.$$

Требуется подобрать $q_{\tau \pm 0}$ так, чтобы $|q_1| = |q_2|$. Это требование равносильно выполнению равенства

$$\frac{q_{\tau-0}^1 + \nu_1 q_{\tau-0}^2}{q_{\tau-0}^1 + \nu_2 q_{\tau-0}^2} = \frac{q_{\tau+0}^1 + \nu_1 q_{\tau+0}^2}{q_{\tau+0}^1 + \nu_2 q_{\tau+0}^2}$$

или

$$\frac{1 + \nu_1 t_-}{1 + \nu_2 t_-} = \frac{1 + \nu_1 t_+}{1 + \nu_2 t_+}, \quad t_{\pm} = \frac{q_{\tau}^2 \pm 0}{q_{\tau}^1 \pm 0}. \quad (48)$$

Рассмотрим на плоскости w образ L вещественной прямой \mathbb{R} при дробно-линейном преобразовании

$$w = \frac{1 + \nu_1 t}{1 + \nu_2 t}. \quad (49)$$

Очевидно, L является окружностью, проходящей через точки $w = 1$ и $w = \nu_1/\nu_2$. Точка $w = 0$ лежит вне этой окружности, поскольку точки $t = -1/\nu_j$, $j = 1, 2$, лежат в верхней полуплоскости, т.е. по одну сторону от прямой \mathbb{R} . Не ограничивая общности, нумерацию ν_j можно выбрать так, чтобы $\operatorname{Im}(\nu_1/\nu_2) > 0$. При

$$R_0 < R < R_1; \quad R_0 = \min_L |w|, \quad R_1 = \max_L |w|,$$

окружность $|w| = R$ пересекает L в двух точках w_{\pm} . Если t_{\pm} соответствует w_{\pm} при преобразовании (49), то формула (48) определяет единичные векторы $q_{\tau\pm 0}$ с требуемым свойством.

Условимся жорданову матрицу J в соотношениях (3), (4) называть жордановой формой системы (1).

Теорема 5. Для заданной матрицы $J = J_I$ или $J = J_{II}$ в (40) найдутся такой контур Γ с единственной угловой точкой τ и эллиптическая система (1) жордановой формы J , что индекс задачи Дирихле (1), (2) в классе $C_{(+0)}^{\mu}$ отрицателен.

Доказательство. Из теоремы 1 и четности функции $\det X_{\tau}(\zeta)$ следует, что индекс \varkappa^+ задачи Дирихле в классе $C_{(+0)}^{\mu}$ равен $-n_{\tau}^0/2$.

Пусть сначала $J = J_{II}$. В этом случае величина $h(0)$ в (45) положительна и можно выбрать число $\beta > 0$ по условиям (42_{II}) и $\beta h(0) \geq 1$. Пусть матрица B обратима и связана с β соотношением из (41_{II}). Тогда эллиптическая система, отвечающая этой матрице, будет искомой.

В случае $J = J_I$ выберем $q_{\tau\pm 0}$, как в лемме 2, и рассмотрим контур Γ , для которого эти векторы касательны в точке τ к боковым сторонам сектора D_{τ} . Тогда, согласно (45), величина $h(0)$ положительна и остается повторить предыдущие рассуждения.

Заметим, что в случае $J = J_{II}$ контур Γ можно выбирать произвольно. Отрицательность индекса \varkappa^+ в теореме означает, что в случае единственности решения задачи Дирихле ее существование возможно только при выполнении дополнительных условий ортогональности на правую часть f краевого условия (2). Этот эффект имеет место только в случае угловой точки. Если точка τ регулярна, т.е. $q_{\tau-0} = -q_{\tau+0}$, то в обозначениях (41) имеем соотношения $\rho_1 = \rho_2$, $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi$ в случае $J = J_I$ и $\delta_{\tau} = 0$ в случае $J = J_{II}$. В обоих случаях второе слагаемое в правой части равенства (41) тождественно равно нулю и, следовательно, индекс $\varkappa^+ = 0$.

6. Система Ламе с отрицательным параметром. Рассмотрим систему (32) с коэффициентами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

При положительном λ она является системой Ламе плоской изотропной теории упругости. Однако ее можно рассматривать и при отрицательном значении параметра λ . Характеристический многочлен этой системы равен $(\lambda + 2)(1 + z^2)^2$, так что условие эллиптичности сводится к неравенству $\lambda \neq -2$. В случае $\lambda = -1$ система переходит в уравнение Лапласа, так что этот случай можно исключить из рассмотрения. При $\lambda \neq -1$ соотношениям (3), (4) удовлетворяют матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\varkappa \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}.$$

В частности, при $\lambda = -3$ рассматриваемая система сильно связана. Таким образом, условия на параметр λ сводятся к неравенствам

$$\lambda \neq -1, -2, -3. \quad (51)$$

В этом случае условия (42_{II}), (43_{II}) можно объединить в одно вида $\beta = 1/\varkappa^2 \neq 1$. Справедливость неравенства здесь обеспечивается условием $\lambda \neq -2$. В рассматриваемом случае соотношения (43) и (45_{II}) принимают следующий вид:

$$h(0) = \frac{|\delta_{\tau}|^2}{\theta_{\tau}^2}, \quad \delta_{\tau} = \frac{\sin \theta_{\tau}}{q_{\tau-0} q_{\tau+0}},$$

где учтено, что при $\nu = i$ преобразование $z \rightarrow z_{\nu}$ тождественно. Таким образом, $h(0) = (\sin \theta_{\tau})^2 / \theta_{\tau}^2$ и выражение (46) сводится к соотношению

$$n_{\tau}^0 = \begin{cases} 2, & |\sin \theta_{\tau}| \geq |\varkappa| \theta_{\tau}, \\ 0, & |\sin \theta_{\tau}| < |\varkappa| \theta_{\tau}. \end{cases}$$

Неравенство $|\sin \theta_\tau| \geq |\varkappa| \theta_\tau$, т.е. неравенство

$$\left| \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1} \right| \leq \frac{|\sin \theta_\tau|}{\theta_\tau}, \quad 0 < \theta_\tau < 2\pi, \quad \theta_\tau \neq \pi, \quad (52)$$

совместно с (51) выделяет два непересекающихся интервала

$$-3 \leq \lambda < \lambda_\tau^0, \quad \lambda_\tau^1 \leq \lambda < -2 \quad (53)$$

изменения параметра λ , в которых $n_\tau^0 = 2$. Для остальных значений λ величина $n_\tau^0 = 0$. Применяя к системе (32), (50) теорему 4, приходим к следующему результату.

Теорема 6. Пусть V^\pm есть класс всех решений $v \in C_{(\pm 0)}^\mu$ однородной задачи Дирихле для системы (32), (50). Тогда условия (34 $^\pm$) необходимы и достаточны для разрешимости задачи в классе $C_{(\pm 0)}^\mu$, а ее индекс \varkappa^\pm определяется равенством

$$\varkappa^\pm = \mp \sum_\tau \chi \left(\frac{|\sin \theta_\tau|}{\theta_\tau} - \left| \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1} \right| \right), \quad \chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Заметим, что система (32), (50) при $\lambda > -2$ сильно эллиптична. В этом случае, согласно (53), неравенство (52) нарушено и, значит, $\varkappa^+ = \varkappa^- = 0$. Другими словами, отрицательный индекс \varkappa^+ может появиться только при $\lambda < -2$. Более точно, если контур Γ имеет единственную угловую точку τ и $\lambda_\tau^0 \leq \lambda < -2$, то $\varkappa^- = \dim V^- - \dim V^+ = 1$. Следовательно, с точностью до пропорциональности существует ровно одно решение однородной задачи Дирихле, которое допускает в точке τ асимптотику (31) с ненулевой функцией ϕ_τ вида (30 0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966.
2. Товмасьян Н.Е. // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 1. С. 3–23; № 2. С. 163–171.
3. Вольперт А.И. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 41–87.
4. Сиражудинов М.М. // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 5. С. 137–176.
5. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев, 2002.
6. Солдатов А.П. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 674–686.
7. Кондратьев В.А. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 202–292.
8. Кондратьев В.А., Олейник О.А. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 3–76.
9. Dauge M., Steux J.L. // J. Differ. Equat. 1987. V. 70. № 1. P. 93–113.
10. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., 1991.
11. Солдатов А.П. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 6. С. 825–838.
12. Солдатов А.П. // Изв. РАН. 1992. Т. 56. № 3. С. 566–604.
13. Солдатов А.П. // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 15. С. 142–199.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
25.05.2005 г.