О ГАМИЛЬТОНОВОЙ СТРУКТУРЕ ЭВОЛЮЦИИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ x ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

О. И. Мохов

В данной заметке найдено явно каноническое гамильтоново представление уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) для эволюции по x, определяемое скобкой Пуассона, задаваемой простейшей бесконечномерной алгеброй Каца — Муди $\widehat{\mathrm{sl}}\,(2)$ и гамильтонианом, квадратичным по каноническим переменным. Этот результат дает, в частности, непосредственную возможность сопоставить уравнение КдФ с системой трехволнового взаимодействия, для которой, как отмечено в [1], аналогичное гамильтоново представление (с другим квадратичным гамильтонианом) возникает в естественных физических переменных.

Теорема. *Гамильтонова структура уравнения КдФ для эволюции по x порождается алгеброй Ли* $\mathrm{sl}\,(2, \mathbb{R})$ *и метрикой Киллинга на ней. Вторая гамильтонова структура порождается трехмерной нильпотентной алгеброй Ли, 2-коциклом и инвариантной вырожденной метрикой на ней.*

В [2] показано, что уравнение КдФ $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, рассматриваемое как эволюционная система по x: $u^1_x = u^2$, $u^2_x = u^3$, $u^3_x = -u^1_t + 6u^1u^2$,— является гамильтоновой системой по отношению к неоднородным одномерным скобкам Пуассона гидродинамического типа (или типа Дубровина — Новикова (ДН-скобки),— см. [1, 3, 4]), получаемым пересчетом из скобок Магри и Гарднера — Захарова — Фаддеева:

$$u^i_x = \{u^i, H\}, \quad H = \int h\,(u)dt,$$

$$\{u^i\,(t),\ u^j\,(\tau)\} = g^{ij}\,(u)\,\delta_t\,(t-\tau) + (b^{ij}_k\,(u)\,u^k_t + c^{ij}\,(u))\delta\,(t-\tau),$$

причем для ДН-скобки, получаемой из скобки Магри, метрика $g^{ij}\,(u)$ невырождена (см. [2]). По классификационной теореме Дубровина — Новикова ([1], см. также [3, 4]), если метрика $g^{ij}\,(u)$, $i, j = 1, \ldots, N$, невырождена, то локальным преобразованием координат $u = u\,(w)$ неоднородная одномерная ДН-скобка приводится к виду

$$\{w^i\,(t),\ w^j\,(\tau)\} = \tilde{g}^{ij}\delta_t\,(t-\tau) + [c^{ij}_k w^k + d^{ij}]\delta\,(t-\tau), \tag{1}$$

где коэффициенты $\tilde{g}^{ij}$, c^{ij}_k, d^{ij} постоянны; c^{ij}_k — структурные константы алгебры Ли, d^{ij} — произвольный 2-коцикл на этой алгебре Ли: $d^{ij} = -d^{ji}$, $\bigcup\limits_{(i,\,j,\,k)} c^{ij}_s d^{sk} = 0$, $\tilde{g}^{ij}$ — произвольная инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма на этой же алгебре Ли. Для всякой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ метрика Киллинга $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ задает на соответствующей алгебре токов $\mathfrak{g}^{S^1}$ некогомологичный нулю 2-коцикл

$$\omega\,(\varphi, \psi) = \int\limits_{S^1} \langle\varphi\,(x),\ \psi'\,(x)\rangle_K\,dx,$$

порождающий нетривиальное центральное расширение алгебры токов $\mathfrak{g}^{S^1}$. Очевидно, что все получаемые таким образом расширенные алгебры, являющиеся в этом случае бесконечномерными алгебрами Каца — Муди ([5]), задают скобки Пуассона вида (1) при известном сопоставлении скобок Пуассона, линейно зависящих от полей, и бесконечномерных алгебр Ли с 2-коциклами (см. [6]).

Предложение. *Скобка Пуассона, задающая каноническую гамильтонову структуру КдФ для эволюции по x, соответствует, в точности, простейшей бесконечномерной алгебре Каца — Муди* $\widehat{\mathrm{sl}}\,(2)$.

Рассмотрим локальную квадратичную унимодулярную замену переменных: $u^1 = (w^1 - w^3)/\sqrt{2}$, $u^2 = w^2$, $u^3 = (w^1 + w^3)/\sqrt{2} + (w^1 - w^3)^2$. Уравнение КдФ в новых переменных приобретает канонический вид:

$$w^i_x = L^{ij}_1\,(t)\,\frac{\delta H_1}{\delta w^j},\ (L^{ij}_1\,(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & -2w^3 & 2w^2 \\ 2w^3 & 0 & 2w^1 \\ -2w^2 & -2w^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

— гамильтонов оператор, порождаемый алгеброй Ли $\mathrm{sl}\,(2, \mathbb{R})$ и метрикой Киллинга на ней,

$$H_1 = -\frac{1}{4}\int [(w^1 - w^3)^2 - \sqrt{2}\,(w^1 + w^3)]\,dt.$$

Система уравнений трех волн записывается в каноническом виде (2) в физических переменных с квадратичным гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}\int [v_1 (w^1)^2 - v_2 (w^2)^2 - v_3 (w^3)^2]\, dx,$$

$$v_i = -\frac{b_i - b_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}, \quad a_i,\ b_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3 \,(\mathrm{mod}\ 3),$$

$$w_t^i = L_1^{ij}(x)\frac{\delta H}{\delta w^j}$$

(см. [1]). В частности, для вещественной системы уравнений «точного резонанса» при параметрическом взаимодействии трех волновых пакетов в нелинейной оптике (см. [7]) $w^i = \frac{1}{2}\varepsilon u^i / \sqrt{(v_{i-1} - v_i)(v_i - v_{i+1})}$, $\varepsilon = \varepsilon(a_i, b_i) = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$ (mod 3).

Для второй гамильтоновой структуры КдФ, ассоциированной со скобкой Гарднера — Захарова — Фаддеева (см. [2]), получаем:

$$(3) \qquad (L_2^{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt} + (w^1 - w^3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = -\frac{1}{2}\int [(w^1)^2 - (w^2)^2 - (w^3)^2]\, dt = -\frac{1}{2}\int \langle w, w\rangle_K dt.$$

Отметим, что гамильтонианы H_1 и H_2 являются для КдФ единственными интегралами гидродинамического типа, т. е. вида $H = \int h(w)dt$. Вторая ДН-скобка для КдФ также имеет в канонических переменных вид (1), но с вырожденной метрикой $\tilde{g}^{ij}$. Очевидно, что и в этом случае скобка Пуассона порождается алгеброй Ли.

Предложение (см. также [1]). *Произвольная конечномерная алгебра Ли со структурными константами* c_k^{ij}, *произвольный 2-коцикл* d^{ij} *на этой алгебре Ли и произвольная инвариантная симметрическая билинейная форма* $\tilde{g}^{ij}$ *на этой же алгебре Ли* ($\langle \mathrm{ad}\, X(Y), Z\rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}\, X(Z)\rangle$) *определяют скобку Пуассона вида* (1), *причем таким способом получаются все скобки Пуассона вида* (1) (*невырожденность формы* $\tilde{g}^{ij}$ *здесь не предполагается*).

В частности, в (3) L_2^{ij} — гамильтонов оператор, порождаемый трехмерной нильпотентной неабелевой алгеброй Ли ϱ_0 (алгебра Ли типа II по классификации Бьянки, см. [3]). Отметим, что всякая нильпотентная неабелева алгебра Ли содержит подалгебру, изоморфную ϱ_0.

Задача. *Классифицировать все интегрируемые канонические гамильтоновы системы вида* (2) *с квадратичными гамильтонианами* (*гидродинамические системы типа КдФ и трехволнового взаимодействия*). *Провести полный групповой анализ системы вида* (2) *с общим квадратичным гамильтонианом.*

[1] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // ДАН СССР.— 1984.— Т. 279, № 2.— С. 294—297. [2] Царев С. П. // Мат. заметки.— 1989.— Т. 46, вып. 1.— С. 105—111. [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения.— М.: Наука, 1986. [4] Новиков С. П. // УМН.— 1985.— Т. 40, вып. 4.— С. 79—89. [5] Кац В. Г. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— Т. 32, № 6.— С. 1323—1367. [6] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. // Функцион. анализ. и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 3.— С. 23—40. [7] Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступило в Правление общества 14 сентября 1989 г.