В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина, Об алгебраически замкнутых группах,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 3, 49–51

https://www.mathnet.ru/cheb288

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

75-летию Альфреда Львовича
Шмелькина посвящается

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05+512.543.72

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫХ ГРУППАХ

В. Г. Дурнев (Ярославль), О. В. Зеткина (Ярославль),
А. И. Зеткина (Ярославль)

Аннотация

Устанавливается разрешимость в любой алгебраически замкнутой группе G каждого уравнения вида

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — непустое несократимое групповое слово от неизвестных x_1, …, x_n, а g — произвольный элемент группы G.

Ключевые слова: группа, алгебраически замкнутая группа, уравнение над группой

Библиография: 4 названия.

AN ALGEBRAICALLY CLOSED GROUPS

V. G. Durnev (Yaroslavl), O. V. Zetkina (Yaroslavl),
A. I. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

Establish the solubility in any algebraically closed group G of each equation of the form

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

where $w(x_1, \ldots, x_n)$ – nonempty irreducible group word unknown x_1, ..., x_n, and g – arbitrary element of group G.

Keywords: group, algebraically closed group, equation over group

Bibliography: 4 titles.

Напомним, что группа G называется *алгебраически замкнутой*, если любая система уравнений и неравенств над этой группой

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_n,g_1,\ldots,g_k) = 1 \,\&\, \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(x_1,\ldots,x_n,g_1,\ldots,g_k) \neq 1,$$

где $w_i(x_1,\ldots,x_n,g_1,\ldots,g_k)$ $(i=1,\ldots,m)$ и $u_j(x_1,\ldots,x_n,g_1,\ldots,g_k)$ $(j = 1, \ldots, p)$ — групповые слова от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и произвольных элементов $g_1, \ldots, g_k$ группы G, имеющая решение в некотором расширении этой группы, имеет решение уже в самой группе G.

Изучение алгебраически замкнутых групп было начато в работах У. Скотта [1] и Б. Неймана [2]. Особую роль в этих исследованиях сыграла работа А. Макинтайра [3]. Еще в работе Б. Неймана было установлено, что любая алгебраически замкнутая группа является *простой*, поэтому, в частности, *любая нетривиальная вербальная подгруппа алгебраически замкнутой группы совпадает со всей группой.*

Хорошо известно, что любая алгебраически замкнутая группа является *полной*, т.е. для любого ее элемента g и произвольного натурального числа n уравнение $x^n = g$ разрешимо в этой группе.

Нетрудно показать, что для произвольного элемента g любой алгебраически замкнутой группы в этой группе разрешимо уравнение $[x, y] = g$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y, т.е. любой элемент алгебраически замкнутой группы является коммутатором. Нам не встречались явные упоминания этого факта в доступной литературе.

Следующая теорема существенно усиливает эти утверждения.

Теорема 1. *В любой алгебраически замкнутой группе G каждое уравнение вида*

$$w(x_1,\ldots,x_n) = g, \tag{1}$$

где $w(x_1,\ldots,x_n)$ — непустое несократимое групповое слово от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, а g — произвольный элемент группы G, имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

1) g — элемент бесконечного порядка алгебраически замкнутой группы G.

В этом случае $w(x_1,\ldots,x_n)$ и g — элементы бесконечного порядка группы $G * \langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$. Поэтому группа G является подгруппой HNN-расширения

$$\langle\langle\, G * \langle\langle\, x_1,\ldots,x_n \,\rangle\rangle, t \mid tw(x_1,\ldots,x_n)t^{-1} = g \,\rangle\rangle,$$

в котором выполняется равенство $w(tx_1t^{-1},\ldots,tx_nt^{-1}) = g$. Поэтому уравнение (1) разрешимо в группе G.

2) g — элемент конечного порядка m алгебраически замкнутой группы G.

В свободной группе $\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ элемент $w(x_1,\ldots,x_n)$ равен элементу вида $u^k(x_1,\ldots,x_n)$, где k — натуральное число, а $u(x_1,\ldots,x_n)$ не является собственной степенью в этой группе. Тогда $u(x_1,\ldots,x_n)$ — элемент порядка km [4]

в группе

$$\langle\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \rangle\rangle.$$

Поэтому $u^k(x_1, \ldots, x_n)$ и g — элементы порядка m в группе

$$G * \langle\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \rangle\rangle.$$

Значит группа G является подгруппой группы

$$\langle\langle\, G * \langle\langle\, x_1, \ldots, x_n \,|\, u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \rangle\rangle,\, t \,|\, tu^k(x_1, \ldots, x_n)t^{-1} = g,$$

в которой выполняется равенство $w(tx_1t^{-1}, \ldots, tx_nt^{-1}) = g$. Поэтому уравнение (1) разрешимо в группе G. □

Доказанная теорема означает, что в алгебраически замкнутой группе ширина любой вербальной подгруппы равна единице.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott W. R. Algebraically closed groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2. P. 118—121.

2. Neumann B. H. A note on algebraically closed groups // J. London. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 227—242.

3. Macintyre A. On algebraically closed groups // Ann. of Math. 1972. Vol. 96. P. 53—97.

4. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Поступило 18.09.2013