Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Г. П. Солдатов, О движении газа под действием кратковременного импульса,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 96–103

https://www.mathnet.ru/ivm3293

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
24 апреля 2025 г., 03:45:22

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 517.544

Г. П. Солдатов

О ДВИЖЕНИИ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРАТКОВРЕМЕННОГО ИМПУЛЬСА

Изучается движение газа под действием удара поршня с учетом начального малого противодавления в случае, когда отношение удельных теплоемкостей газа равно 7/5. Неизвестные функции ищутся методом возмущения автомодельного решения (противодавление отсутствует [1]), развитого для задачи о точечном взрыве [2].

Задача сводится к решению уравнения, родственного гипергеометрическому уравнению. Исследуется вопрос о поведении давления, плотности и скорости в окрестности затухающей ударной волны. С помощью введения малых функций в основные уравнения задачи и сохранения членов одинакового порядка малости получены законы затухания волны в параметрическом виде.

1. В уравнения газодинамики, записанные в переменных m, t Лагранжа [1], $dm=\rho\, dr$, $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial m}=0$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial m}=0$; $\dfrac{\partial}{\partial t}\ln p\rho^{-\gamma}=0$ введем функции [2] $\eta=\dfrac{m}{M}$; $u=v_2F(\eta,\ q)$; $v_2=c$; $q=\dfrac{a_1^2}{c^2}$; $\rho=\rho_2 g(\eta,\ q)$; $\rho_2=\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}\rho_1$; $\rho_1=\text{const}$; $p=p_2h(\eta,\ q)$;

$p_2=\dfrac{2\gamma-(\gamma-1)q}{(\gamma+1)q}p_1$ и получим основные уравнения задачи об ударе поршня по газу

$$\begin{gathered}
-\eta\frac{\partial g}{\partial\eta}+M\frac{dq}{dM}\left(\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{2}{\gamma-1+2q}g\right)+\frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}g^2\frac{\partial F}{\partial\eta}=0,\\
-\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+M\frac{dq}{dM}\left(\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{F}{2q}\right)+\frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\partial h}{\partial\eta}=0,\\
-\eta\frac{\partial h}{\partial\eta}+M\frac{dq}{dM}\left(\frac{\partial h}{\partial q}-\frac{2\gamma}{q\,[2\gamma-(\gamma-1)q]}h\right)+\frac{\gamma(\gamma+1)}{\gamma-1+2q}gh\frac{\partial F}{\partial\eta}=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Граничные условия задачи представляют обычные условия на ударной волне

$$\eta=1;\quad F(1,\ q)=\frac{2(1-q)}{\gamma+1};\quad g(1,\ q)=1;\quad h(1,\ q)=1,\tag{2}$$

и начальные условия записываются через автомодельное решение $q=0$, $F=F_0$, $g=g_0$, $h=h_0$.

2. Сделаем замену $F = \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f$ и искомые функции представим в виде

$$f(\eta,\ q) = f_0(\eta) + qf_1(\eta) + \ldots, \quad g(\eta,\ q) = g_0(\eta) + qg_1(\eta) + \ldots, \tag{3}$$
$$h(\eta,\ q) = h_0(\eta) + qh_1(\eta) + \ldots, \quad M\frac{dq}{dM} = \sigma q + \tau q^2 + \ldots$$

Представление (3) подставим в (1) и соберем члены с одинаковыми степенями q. Члены при q^0 образуют автомодельную систему уравнений, из сравнения которой с системой из [3] следует совпадение коэффициента σ с показателем автомодельности $n = 4/3$ задачи об ударе поршня по холодному газу в случае $\gamma = 7/5$.

Для поправок f_1, g_1, h_1 получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
-\eta\frac{dg_1}{d\eta} + \left(\sigma + \frac{4}{\gamma-1}g_0\frac{df_0}{d\eta}\right)g_1 + \frac{2}{\gamma-1}g_0^2\frac{df_1}{d\eta} - \\
-\frac{2}{\gamma-1}g_0\left(\sigma + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}g_0\frac{df_0}{d\eta}\right) = 0, \\
-\eta\frac{df_1}{d\eta} + \frac{\sigma}{2}f_1 + \frac{dh_1}{d\eta} - \left(\sigma + \frac{\tau}{2}\right)f_0 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{dh_0}{d\eta} = 0, \\
-\eta\frac{dh_1}{d\eta} + \frac{2\gamma}{\gamma-1}g_0\frac{df_0}{d\eta}h_1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}g_0h_0\frac{df_1}{d\eta} + \frac{2\gamma}{\gamma-1}h_0\frac{df_0}{d\eta}g_1 - \\
-\left(\tau + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\sigma\right)h_0 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}g_0h_0\frac{df_0}{d\eta} = 0
\end{gathered} \tag{4}$$

с граничными условиями $\eta = 1,\quad f_1 = g_1 = h_1 = 0$.

3. Частное решение неоднородной системы (4) можно найти в виде

$$f_{11} = -\frac{C}{2}\left(\eta^{-\frac{2}{3}} - D\right); \quad g_{11} = B\eta^{\frac{5}{3}}; \quad h_{11} = A\eta. \tag{5}$$

Используя решение автомодельной системы

$$f_0 = -\frac{1}{2}\left(\eta^{-\frac{2}{3}} - 3\right); \quad g_0 = \eta^{\frac{5}{3}}; \quad h_0 = \eta; \ \gamma = 7/5, \quad n = \sigma = 4/3, \tag{5'}$$

для неизвестных A, B, C, D получим систему алгебраических уравнений:

$$C = \frac{3(2\sigma+\tau)}{4+3\sigma}; \quad B = \frac{-\frac{2}{3(\gamma-1)}C + \frac{2}{\gamma-1}\left(\sigma + \frac{\gamma+1}{3(\gamma-1)}\right)}{\sigma + \frac{4}{3(\gamma-1)} - \frac{5}{3}};$$

$$A = \frac{-\frac{2\gamma}{3(\gamma-1)}(C+B) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\sigma + \tau + \frac{2\gamma}{3(\gamma-1)}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{3(\gamma-1)} - 1}; \tag{6}$$

$$CD = \frac{4}{\sigma}\left[-A + \frac{3}{2}\left(\sigma + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\right].$$

4. Для нахождения решения однородной системы

$$-\eta\frac{dg_1}{d\eta}+\frac{2(\nu+1)}{3}g_1+(\nu-1)\eta^{\frac{10}{3}}\frac{df_1}{d\eta}=0,$$
$$-\eta\frac{df_1}{d\eta}+\frac{\nu-4}{3}f_1+\frac{dh_1}{d\eta}=0, \tag{7}$$
$$-\eta\frac{dh_1}{d\eta}+\frac{\nu+1}{3}h_1+(\nu+1)\eta^{\frac{8}{3}}\frac{df_1}{d\eta}+\frac{\nu+1}{3}\eta^{-\frac{2}{3}}g_1=0,$$

$\nu=(\gamma+1)/(\gamma-1)$, введем функции

$$g_1=\eta^{\alpha}G;\quad f_1=\eta^{\beta}F;\quad h_1=\eta^{\delta}H. \tag{8}$$

Пусть $\alpha=\frac{2}{3}+\delta$, $\beta=-\frac{5}{3}+\delta$, тогда удается найти первый интеграл (7) в виде

$$(\nu+1)G-(\nu-1)H=A\eta^{-\delta+\frac{\nu+1}{3}}, \tag{9}$$

с помощью которого (7) сводится к уравнениям $\mathrm{F}'=d\mathrm{F}/d\eta$,

$$\frac{2\nu}{3}\eta^{\frac{2}{3}}H=\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)\mathrm{F}\right]-$$
$$-(\nu+1)\eta^{\frac{2}{3}}\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{5}{3}\right)\mathrm{F}\right]-\frac{A}{3}\eta^{-\delta+\frac{\nu+3}{3}}, \tag{10}$$

$$\eta\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)\mathrm{F}\right]'+\left(\delta-\frac{2(\nu+1)}{3}\right)\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)\mathrm{F}\right]-$$
$$-(\nu+1)\left\{\eta\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{5}{3}\right)\mathrm{F}\right]'+\delta\left[\eta\mathrm{F}'+\left(\delta-\frac{5}{3}\right)\mathrm{F}\right]\right\}\eta^{\frac{2}{3}}-$$
$$-\frac{A}{3}\,\frac{\nu+1}{3}\,\eta^{-\delta+\frac{\nu+3}{3}}=0. \tag{11}$$

5. Введем замену переменных

$$(\nu+1)\eta^{2/3}=x. \tag{12}$$

В новых обозначениях уравнение для скорости (11) примет вид

$$x^2(x-1)\mathrm{F}''+\left\{x\left(3\delta-\frac{3}{2}\right)-\left(3\delta-\frac{3\nu+1}{2}\right)\right\}x\mathrm{F}'+$$
$$+\left\{x\frac{9}{4}\delta\left(\delta-\frac{5}{3}\right)-\frac{9}{4}\left(\delta-\frac{2(\nu+1)}{3}\right)\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)\right\}\mathrm{F}+$$
$$+\frac{A}{4}(\nu+1)^{\frac{3}{2}\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)}x^{\frac{3}{2}\left(-\delta+\frac{\nu+3}{3}\right)}=0. \tag{13}$$

В переменных же $z=1/x$ уравнение (11) будет таким:

$$z^2(z-1)\mathrm{F}''+\left\{z\left(-3\delta+\frac{3\nu+5}{2}\right)+\left(3\delta-\frac{7}{2}\right)\right\}z\mathrm{F}'+$$
$$+\left\{z\frac{9}{4}\left(\delta-\frac{2(\nu+1)}{3}\right)\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)-\frac{9}{4}\delta\left(\delta-\frac{5}{3}\right)\right\}\mathrm{F}-$$
$$-\frac{A}{4}(\nu+1)^{\frac{3}{2}\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)}z^{\frac{3}{2}\left(\delta-\frac{\nu+1}{3}\right)}=0. \tag{14}$$

Однородное уравнение (13), которое можно записать в виде $x^2(x-$

$-1)y''+[(a+b+1)x+(\alpha+\beta-1)]xy'+[abx-\alpha\beta]y=0; \quad a=3\delta/2;$ $b=(3/2)\left(\delta-\frac{5}{3}\right)$; $\alpha=-(3/2)(\delta-2(\nu+1)/3)$; $\beta=-(3/2)(\delta-(\nu+1)/3)$, является уравнением, родственным гипергеометрическому. Его решение записывается в форме $y_0=c_1x^\alpha Y(a+\alpha,\ b+\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ x)+$ $+c_2x^\beta Y(a+\beta,\ b+\beta,\ \beta-\alpha+1,\ x)$. Аналогично записывается решение однородного уравнения (14) $y_\infty=c_3z^a Y(\alpha+a,\ \beta+a,\ a-b+1, z)+$ $+c_4z^b Y(\alpha+b,\ \beta+b,\ b-a+1,\ z)$. С помощью аналитического продолжения решения y_∞ в решение y_0 можно получить формулы, выражающие коэффициенты c_1, c_2 через c_3, c_4: $c_1=[c_3A_1+c_4A_{11}]B_1-[c_3A_2+$ $+c_4A_{21}]B_{21}$, $c_2=[c_3A_1+c_4A_{11}]B_2-[c_3A_2+c_4A_{21}]B_{11}$, где коэффициенты A, B с соответствующими индексами — некоторые числа.

Решение неоднородного уравнения (13), а также неоднородного уравнения (14) ищется методом вариации произвольных постоянных c_i, $i=1-4$. В приводимых ниже формулах пользовались формулой $Y(a,\ b,\ c,\ x)=(1-x)^{c-a-b}Y(c-a,\ c-b,\ c,\ x)$ из теории гипергеометрических функций.

6. Решение уравнений (10), (11) разрывно в точке $x=z=1$. Поэтому решение состоит из двух частей, обозначаемых в дальнейшем индексами 0, ∞ и представляющих решение в окрестности нуля ($x=0$) и бесконечности ($z=0$).

Используя соотношения (8), (10), решение задачи (7) в окрестности точки $x=0$ представим в виде:

$$f_0=(\nu+1)^{\frac{5}{2}}\{(c_1+al_2)f_1+(c_2-al_1)f_2\};$$
$$\nu g_0=\frac{\nu-1}{\nu+1}\{(c_1+al_2)(h_1-xh_2)+(c_2-al_1)(h_3-xh_4)\}+\frac{2a}{\nu+1}x^{\frac{\nu+3}{2}};$$
$$\frac{\nu}{\nu+1}xh_0=(c_1+al_2)(h_1-xh_2)+(c_2-al_1)(h_3-xh_4)-\frac{2a}{\nu+1}x^{\frac{\nu+3}{2}};$$
$$f_1=x^{\frac{2\nu-3}{2}}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}};$$
$$f_2=x^{\frac{\nu-4}{2}}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\nu+\frac{5}{2},\ -\frac{\nu-1}{2},\ x\right);$$
$$h_1=\frac{\nu+1}{2}x^{\nu+1}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)x^{\nu+2}(1-x)^{1-\frac{3\nu}{2}};$$
$$h_2=\frac{2\nu-3}{2}x^{\nu+1}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)x^{\nu+2}(1-x)^{1-\frac{3\nu}{2}}; \qquad (15)$$
$$h_3=\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)x^{\frac{\nu+3}{2}}(1-x)^{1-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\nu+\frac{5}{2},\ -\frac{\nu-1}{2},\ x\right)+$$
$$+\frac{\nu(5-2\nu)}{\nu-1}x^{\frac{\nu+3}{2}}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu+1,\ -\nu+\frac{7}{2},\ -\frac{\nu-3}{2},\ x\right);$$
$$h_4=\frac{\nu-4}{2}x^{\frac{\nu+1}{2}}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\nu+\frac{5}{2},\ -\frac{\nu-1}{2},\ x\right)+$$
$$+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)x^{\frac{\nu+3}{2}}(1-x)^{1-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\nu+\frac{5}{2},\ -\frac{\nu-1}{2},\ x\right)+$$
$$+\frac{\nu(5-2\nu)}{\nu-1}x^{\frac{\nu+3}{2}}(1-x)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu+1,\ -\nu+\frac{7}{2},-\frac{\nu-3}{2},\ x\right).$$

В окрестности точки $z=0$ решение задачи (7) представляется в виде:

$$f_\infty=(\nu+1)^{\frac{5}{2}}\{(c_3-al_4)f_3+(c_4+al_3)f_4\};$$

$$\nu z g_\infty=\frac{\nu-1}{\nu+1}\{(c_3-al_4)(h_5-zh_6)+(c_4+al_3)(h_7-zh_8)\}+\frac{2a}{\nu+1}z^{-\frac{\nu+1}{2}};$$

$$\frac{\nu}{\nu+1}h_\infty=(c_3-al_4)(h_5-zh_6)+(c_4+al_3)(h_7-zh_8)-\frac{2a}{\nu+1}z^{-\frac{\nu+1}{2}};$$

$$f_3=z^{\frac{\;}{2}}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}};$$

$$f_4=(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\frac{\nu-1}{2},\ -\frac{3}{2},\ z\right);$$

$$h_5=\frac{5}{2}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)z(1-z)^{1-\frac{3\nu}{2}};$$

$$h_6=\frac{\nu+1}{2}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)z(1-z)^{1-\frac{3\nu}{2}}; \tag{16}$$

$$h_7=\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)z^{-\frac{3}{2}}(1-z)^{1-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\frac{\nu-1}{2},\ -\frac{3}{2},\ z\right)+$$
$$+\frac{\nu(1-\nu)}{3}z^{-\frac{3}{2}}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu+1,\ -\frac{\nu-3}{2},\ -\frac{1}{2},\ z\right);$$

$$h_8=\frac{\nu-4}{2}z^{-\frac{5}{2}}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\frac{\nu-1}{2},\ -\frac{3}{2},\ z\right)+$$
$$+\left(2-\frac{3\nu}{2}\right)z^{-\frac{3}{2}}(1-z)^{1-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu,\ -\frac{\nu-1}{2},\ -\frac{3}{2},\ z\right)+$$
$$+\frac{\nu(1-\nu)}{3}z^{-\frac{3}{2}}(1-z)^{2-\frac{3\nu}{2}}Y\left(-\nu+1,\ -\frac{\nu-3}{3},\ -\frac{1}{2},\ z\right).$$

Формулы (15), (16) содержат произвольные постоянные c_3, c_4, a и следующие интегралы:

$$l_1=\int\frac{x^2(1-x)^{\frac{3\nu}{2}-2}}{R(x)}dx;\quad l_2=\int\frac{(1-x)^{\frac{3\nu}{2}-2}}{x^{\frac{\nu-3}{2}}R(x)}dx;$$

$$l_3=\int\frac{(1-z)^{\frac{3\nu}{2}-2}}{S(z)}dz;\quad l_4=\int\frac{(1-z)^{\frac{3\nu}{2}-2}}{z^{\frac{\nu-1}{2}}S(z)}dz;$$

$$R(x)=-\frac{\nu+1}{2}Y\left(-\nu,\ -\nu+\frac{5}{2},\ -\frac{\nu-1}{2},\ x\right)+$$
$$+\frac{\nu(5-2\nu)}{\nu-1}xY\left(-\nu+1,\ -\nu+\frac{7}{2},\ -\frac{\nu-3}{2},\ x\right);$$

$$S(z)=-\frac{5}{2}Y\left(-\nu,\ -\frac{\nu-1}{2},\ -\frac{3}{2},\ z\right)+$$
$$+\frac{\nu(1-\nu)}{3}zY\left(-\nu+1,\ -\frac{\nu-3}{2},\ -\frac{1}{2},\ z\right). \tag{17}$$

7. Следовательно, общее решение задачи представляется в виде суммы частного решения (5) и соответствующего решения (15), (16) однородной системы (7). Произвольные постоянные c_3, c_4, a, τ можно найти из условий на ударной волне $\eta=1$, $f_1=g_1=h_1=0$. Однако, трех граничных условий недостаточно для нахождения четырех неизвестных.

Из энергетических соображений найти дополнительное условие не удается. Заметим, что в точке $x=0$ давление и плотность равны нулю при произвольном значении τ. Поэтому, представляя искомые функции в виде $\psi=\psi_1+\tau\psi_2$ и требуя $\psi(0)=\psi_1(0)+\tau\psi_2(0)=0$, найти τ нельзя, так как $\psi(0)=0$ выполняется за счет того, что $\psi_1(0)=\psi_2(0)=0$.

8. Для исследования системы (1), (2) введем функции $z=1-q$; $g=1+\bar{g}$; $h=1+\bar{h}$; $\eta=1+\bar{\eta}$ и предположим, что z, $\bar{\eta}$, F, $\bar{g}$, $\bar{h}$ — величины малые и $-M(dq/dM)=M(dz/dM)=Az+\ldots$ Тогда, собирая члены с одинаковым порядком малости, получим уравнения

$$-\frac{\partial g}{\partial\eta}+\frac{\partial F}{\partial\eta}=0;\qquad -\frac{\partial h}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial F}{\partial\eta}=0;$$
$$-\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+Az\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{\partial h}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial h}{\partial\eta}+\tag{18}$$
$$+Az\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)+\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}z+g+h\right)\frac{\partial F}{\partial\eta}=0$$

с граничными условиями на ударной волне

$$\eta=0,\quad F=\frac{2z}{1+\gamma},\quad g=0,\quad h=0,\tag{19}$$

где черточки для простоты опущены. Первые два уравнения (18) с учетом (19) интегрируются

$$g=F-\frac{2z}{\gamma+1};\quad h=\gamma\left(F-\frac{2z}{\gamma+1}\right),\tag{20}$$

и, подставляя (20) в последнее уравнение (18), получим

$$-\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+Az\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial\eta}\left\{z\frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2}+\gamma F-\frac{2\gamma^2 z}{(\gamma+1)^2}\right\}=0;\tag{21}$$
$$\eta=0,\quad F=\frac{2z}{1+\gamma}.$$

Пусть $F=z\mathrm{F}(\xi)$, $\xi=\eta/z$, тогда задача (21) в этих переменных примет вид

$$\left[\gamma\mathrm{F}-(A+1)\xi-\frac{2\gamma^2-\gamma+1}{(\gamma+1)^2}\right]\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}+A\mathrm{F}=0,\tag{22}$$
$$\xi=0,\quad \mathrm{F}=2/(\gamma+1).$$

Решение уравнения (22) задается формулами $\mathrm{F}=c_1\left(\frac{\gamma P-1}{P}\right)^A$; $\xi=\frac{1}{A+1}\left\{\left(\frac{A}{P}+\gamma\right)\mathrm{F}-\frac{2\gamma^2-\gamma+1}{(\gamma+1)^2}\right\}$; $c_1=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma P_0-1}{P_0}\right)^{-A}$; $P_0=-\frac{3\gamma-1}{2(\gamma+1)}\frac{1}{A}$; $A=-\frac{1}{2(\gamma+1)}$. Кроме того, введя формулы $g=zG(\xi)$, $h=zH(\xi)$ в (20), получим $G=\mathrm{F}-\frac{2}{\gamma+1}$; $H=\gamma\left(\mathrm{F}-\frac{2}{\gamma+1}\right)$.

9. Рассмотрим ударную волну, полученную в результате точечного взрыва в среде с начальной плотностью, изменяющейся по закону $\rho_1 = A\xi^{-\omega}$ [2]. Соответствующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
(F-\lambda)\frac{\partial g}{\partial \lambda} + r_2\frac{dz}{\partial r_2}\left[\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{2}{\gamma+1}\left(1-\frac{2}{\gamma+1}z\right)^{-1}g\right] + \\
+ g\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} + (\nu-1)\frac{F}{\lambda}\right) - \omega g = 0, \\
(F-\lambda)g\frac{\partial F}{\partial \lambda} + r_2\frac{dz}{dr_2}\left[\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{2}F(1-z)^{-1}\right] + \\
+ \frac{[(\gamma+1)-(\gamma-1)z][\gamma+1-2z]}{\gamma(\gamma+1)^2}\frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{\omega}{2}Fg = 0, \\
(F-\lambda)\frac{\partial h}{\partial \lambda} + r_2\frac{dz}{dr_2}\left[\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(1-z)^{-1}\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}z\right)^{-1}h\right] + \\
+ \gamma h\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} + (\nu-1)\frac{F}{\lambda}\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{23}
$$

характеризующие движение газа за ударной волной, с граничными условиями на ней $\lambda = 1$, $F = 2z/(\gamma+1)$, $g = 1$, $h = 1$, можно рассмотреть так же, как уравнения пункта 8.

В уравнения (23) введем функции $g = 1 + \overline{g}$, $h = 1 + \overline{h}$, $\lambda = 1 + \overline{\lambda}$ и предположим, что z, $\overline{\lambda}$, F, $\overline{g}$, $\overline{h}$ — малые величины и $r_2(dz/dr_2) = Az + \ldots$, и сохраним члены с одинаковым порядком малости:

$$
\begin{gathered}
\gamma F - h = \frac{2\gamma z}{\gamma+1}; \quad -\frac{\partial g}{\partial \lambda} - \omega + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \\
\left[(\gamma+1)(F-\lambda) + \gamma\left(\gamma F - \frac{2\gamma}{\gamma+1}z\right) - g + \frac{\gamma-3}{\gamma+1}z\right]\frac{\partial F}{\partial \lambda} + \\
+ A(\gamma+1)z\frac{\partial F}{\partial z} + \left[\gamma(\nu-1) + \frac{\omega}{2}\right]F = 0,
\end{gathered}
\tag{24}
$$

здесь черточки для простоты опущены.

Пусть $F = z\mathrm{F}(\xi)$, $g = zG(\xi)$, $h = zH(\xi)$, $\xi = \lambda/z$, тогда (24) примет вид:

$$
\begin{gathered}
\gamma\mathrm{F} - H = 2\gamma/(\gamma+1); \quad -\frac{dG}{d\xi} + \frac{d\mathrm{F}}{d\xi} - \omega = 0; \\
\left[(\gamma+1)(\mathrm{F}-\xi) + \gamma\left(\gamma\mathrm{F} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\right) - G + \frac{\gamma-3}{\gamma+1}\right]\frac{d\mathrm{F}}{d\xi} + \\
+ A(\gamma+1)\left(\mathrm{F} - \xi\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}\right) + \left[\frac{\omega}{2} + \gamma(\nu-1)\right]\mathrm{F} = 0,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

и граничные условия $\xi = 0$, $\mathrm{F} = 2/(\gamma+1)$, $G = 0$, $H = 0$. Решение задачи (25) представляется в параметрическом виде:

$$
\begin{gathered}
\gamma\mathrm{F} - H = 2\gamma/(\gamma+1); \quad -G + \mathrm{F} = \omega\xi + \frac{2}{\gamma+1}; \\
\mathrm{F} = c_1\left\{\frac{p}{\gamma(\gamma+1)p + \frac{3\omega}{2} - (\gamma+1) + \gamma(\nu-1)}\right\}^{\alpha}; \\
\xi = -\frac{1}{\omega - (\gamma+1)(A+1)}\left\{\left[A(\gamma+1) + \frac{\omega}{2} + \gamma(\nu-1)\right]\frac{\mathrm{F}}{p} + \right. \\
\left. + \gamma(\gamma+1)\mathrm{F} + \frac{-2\gamma^2 + \gamma - 1}{\gamma+1}\right\};
\end{gathered}
$$

$$c_1 = \frac{2}{\gamma+1}\left\{\frac{p_0}{\gamma(\gamma+1)p_0 + \frac{3\omega}{2} - (\gamma+1) + \gamma(\nu-1)}\right\}^{-\alpha};$$

$$p_0 = -\frac{2(\gamma+1)}{3\gamma-1}\left[A(\gamma+1) + \frac{\omega}{2} + \gamma(\nu-1)\right];$$

$$\alpha = \frac{A(\gamma+1) + \frac{\omega}{2} + \gamma(\nu-1)}{-(\gamma+1) + \frac{3\omega}{2} + \gamma(\nu-1)},$$

$$A = \begin{cases} -1/2, & \nu = 1, \text{ — плоский случай;} \\ -3/4, & \nu = 2, \text{ — цилиндрический случай;} \\ -\left[1 + \left(2\ln\frac{r_2}{r_*}\right)^{-1}\right], & \nu = 3, \text{ — сферический случай.} \end{cases}$$

В заключение автор выражает благодарность С. В. Фальковичу за полезные замечания и обсуждение данной работы.

г. Саратов

Поступило
24 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., „Наука“, 1966.

2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.

3. Жуков А. И., Каждан Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. журн., т. 2, вып. 4, 1956, с. 352.