

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНЫХ СИСТЕМ

В. Б. БАЛАКИН

(Москва)

Статья посвящена вопросу о численном решении задачи Коши для дивергентных гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial x} = \psi(u, x, t), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

где u, φ, ψ — векторы n измерений. Несущественно ограничивая общность, мы сосредоточим внимание на однородных системах вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Как обычно, ищутся обобщенные решения задачи (3), (2), т. е. кусочно-непрерывные функции $u(x, t)$, удовлетворяющие начальному условию (2) и системе интегральных законов сохранения:

$$\oint_C u dx - \varphi(u) dt = 0, \tag{4}$$

являющейся следствием системы (3) и эквивалентной ей в классе гладких функций (C — произвольный кусочно-гладкий контур в плоскости (x, t)).

Предлагаемый метод заключается в сведении задачи (4), (2) к задаче с начальными данными для некоторой системы уравнений, называемых далее уравнениями, содержащими плотность траекторий. Численный счет состоит в приближенном построении траекторий и вычислении значений функции $u(x, t)$ вдоль них.

Удовлетворительные результаты численных экспериментов указывают на возможность применения метода для сквозного счета через линии разрыва решения.

В настоящее время метод нельзя считать достаточно теоретически обоснованным: нет доказательств существования и единственности решения основной задачи, не полностью решены вопросы, связанные с переходом от задачи (3), (2) к новой задаче. Цель данной работы — осветить идейную сторону метода и выдвинуть некоторые соображения в его пользу.

1. Задача с начальными данными для уравнений, содержащих плотность траекторий

Пусть в плоскости (x, t) или ее части через каждую точку (ξ, τ) проходит единственная траектория каждого из n семейств траекторий, описываемых уравнениями $x_i = x_i(t; \xi, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем функции x_i однозначны по t и имеют кусочно-непрерывную производную по ξ . Пусть также на оси x заданы n кусочно-непрерывных функций $u_{0i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые назовем начальными плотностями траекторий соответствующих семейств. Тогда плотность траекторий i -го семейства в точке (ξ, τ) определяется соотношением

$$u_i(\xi, \tau) = u_{0i}(x_i(0; \xi, \tau)) x_{i\xi}(0; \xi, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

«Физический смысл» этого выражения: начальная плотность, взятая в точке, в которой траектория, проходящая через (ξ, τ) , пересекает ось x , умножается на коэффициент локального сжатия «среды».

Поле траекторий, состоящее из n семейств, может быть определено, например, с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Уравнения, содержащие плотность траекторий, формально могут быть получе-

ны из (6) добавлением функций $u_i(x, t)$ в качестве аргументов в правой части:

$$x_i' = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n, x_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нас будет интересовать более узкий класс этих уравнений:

$$x_i' = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Задача с начальными данными для системы уравнений, содержащих плотность траекторий, формулируется следующим образом: по заданным на оси x начальным функциям $u_{0i}(x)$ найти функции $x_i(t; \xi, \tau)$, удовлетворяющие уравнениям (7), в которых $u_i(x, t)$ определяются соотношениями (5).

В рассматриваемых далее случаях мы будем предполагать существование и единственность устойчивого решения задачи (7), (5).

З а м е ч а н и е. Отметим, что траектории (7), (5) суть не что иное, как линии уровня векторного потенциала

$$\Phi(x, t) = \int_0^x u(s, t) ds.$$

Для проверки достаточно проинтегрировать соотношение (5) по ξ . Речь идет, таким образом, о счете вдоль линий уровня потенциала.

2. О связи между задачей Коши (4), (2) и задачей с начальными данными (7), (5)

Примем в (7) $f_i(u) = \varphi_i(u)/u_i$. Предположим, что в некоторой области плоскости x, t , примыкающей к оси x , решения обеих задач (4), (2) и (7), (5) существуют и обладают желательными нам свойствами, содержание которых ясно из дальнейшего.

Покажем, что любое решение задачи (4), (2) является решением задачи (7), (5). Выберем для этого в качестве контура C_i в (4) криволинейную трапецию с прямолинейными основаниями:

$$\begin{aligned} a) & [\xi - h, \tau; \xi + h, \tau]; \\ b) & [x_i(0; \xi - h, \tau), 0; x_i(0; \xi + h, \tau), 0] \end{aligned}$$

и определенными по (7) непараллельными сторонами:

$$\begin{aligned} c) & x_i = x_i(t; \xi - h, \tau); \\ d) & x_i = x_i(t; \xi + h, \tau) \quad (0 \leq t \leq \tau). \end{aligned}$$

(Здесь h — малое положительное число.) Подынтегральное выражение в (4) на линиях c) и d) равно нулю, поэтому с учетом (2) получаем

$$\int_{x_i(0; \xi-h, \tau)}^{x_i(0; \xi+h, \tau)} u_{0i}(x) dx - \int_{\xi-h}^{\xi+h} u_i(x, \tau) dx = 0, \quad (8)$$

откуда при $h \rightarrow 0$ следует (5).

С другой стороны, любое решение задачи (7), (5) удовлетворяет уравнениям (4), так как произвольный кусочно-гладкий контур может быть аппроксимирован контуром, состоящим из дуг траекторий и отрезков, параллельных оси x . Оно удовлетворяет и начальным условиям (2), так как $x_{i\xi}(0; \xi, 0) = 1$.

Таким образом, в области, в которой существуют решения обеих задач (4), (2) и (7), (5), имеет место их эквивалентность (в указанном выше смысле).

3. О прохождении траекторий через линии разрыва

Если решение $u(x, t)$ задачи (4), (2) претерпевает на некоторой кусочно-гладкой линии разрыв, то тангенс D угла наклона касательной к линии разрыва удовлетво-

ряет соотношениям Гюгонио:

$$D = \frac{\Phi_i^+ - \Phi_i^-}{u_i^+ - u_i^-}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где плюс означает величины справа (при больших x), а минус — слева (при меньших x) от разрыва. Введем обозначение $d_i = dx_i/dt$, и покажем, что траектории всегда проходят через линии разрыва, лишь преломляясь на них. Это выгодное свойство траекторий и используется в дальнейшем при применении вычислительных схем для сквозного счета.

Будем считать, что ни одна из компонент вектора u не обращается в нуль. Выберем рассматриваемую точку линии разрыва в качестве начала системы координат, в которой $D = 0$. Тогда из (9) следует соотношение

$$\left(1 - \frac{u_i^+}{u_i^-}\right) d_i^+ = \left(\frac{u_i^-}{u_i^+} - 1\right) d_i^-, \quad (10)$$

откуда видно, что величины d_i^+ и d_i^- имеют один и тот же знак, т. е. одновременно обе больше или меньше D .

Кроме того, справедливо неравенство

$$1 - \frac{u_i^+}{u_i^-} < \frac{u_i^-}{u_i^+} - 1.$$

Отсюда получаем дополнительно, что при $u_i \Phi_i \geq 0$

$$\text{либо } d_i^- \geq d_i^+ \geq D, \text{ либо } d_i^+ \geq d_i^- \geq D, \quad (11)$$

а при $u_i \Phi_i < 0$

$$\text{либо } D > d_i^+ > d_i^-, \text{ либо } D > d_i^- > d_i^+. \quad (12)$$

Как обычно, в (11), (12) одна из двух ударных волн является устойчивой, а другая неустойчивой. Конкретно, устойчивой является волна, для которой $d_i^- \geq d_i^+$.

4. Применение к уравнениям газовой динамики

Частный случай системы (3) представляет собой система уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \rho v^2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial [(e + p) v]}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

(Здесь ρ — плотность газа, v — скорость, p — давление, $e = \rho v^2/2 + p/(\gamma - 1)$, γ — отношение коэффициентов теплоемкости.) Она эквивалентна следующей системе уравнений, содержащих плотность траекторий:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{u_2}{u_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{u_2}{u_1} + \frac{p}{u_2}, & \frac{dx_3}{dt} &= \frac{u_2}{u_1} \left(1 + \frac{p}{u_3}\right), \\ p &= (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $u_1 = \rho$, $u_2 = \rho v$, $u_3 = e$ (плотность вещества, плотность потока, плотность энергии соответственно). Легко видеть, что при $v > 0$ dx_1/dt всегда меньше dx_2/dt , и dx_3/dt , а производные dx_2/dt и dx_3/dt могут быть как равны между собой, так и одна превышать другую. Для возможности счета необходимо, чтобы в рассматриваемой области $v \neq 0$.

Приведем также уравнения траекторий для двумерного стационарного потока.

Обычная запись системы в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial[(e + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(e + p)v]}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения траекторий в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{u_3}{u_2 - p}, & \frac{dy_2}{dx} &= \frac{u_3}{u_2}, \\ \frac{dy_3}{dx} &= \frac{u_3}{u_2 - p} + \frac{p}{u_3}, & \frac{dy_4}{dx} &= \frac{u_3}{u_2 - p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho u, & u_2 &= p + \rho u^2, & u_3 &= \rho uv, & u_4 &= (e + p)u, \\ e &= \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, & p &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[u_2 + \sqrt{\gamma^2 u_2^2 + (\gamma^2 - 1)(u_3^2 - 2u_1 u_4)} \right]. \end{aligned}$$

Расчет выполним в областях, где $u \neq 0$, $v \neq 0$. Из (16) следует, что первое и четвертое семейства траекторий совпадают и проходят между вторым и третьим.

5. Вычислительные схемы метода

Построение вычислительных схем основано на аппроксимации уравнений (7), (5). Если траектории, задаваемые уравнением (7), заменять ломаными Эйлера, то получаются схемы первого порядка точности, отличающиеся одна от другой способом аппроксимации x_E в формуле (5).

Пусть в плоскости $(x; t)$ задана прямоугольная сетка с шагом h по оси x и шагом τ по оси t . Выпустим из точек начального слоя пучок касательных к траекториям; они пересекут следующий слой в точках

$$x'_k = x_k + \tau f(u_k), \quad (17)$$

где k — номер узла в слое. Заменяв величину x_E , входящую в (5), центральной разделенной разностью, получим приближенно

$$u'_k = u_k \frac{2h}{x'_{k+1} - x'_{k-1}}. \quad (18)$$

Здесь величина u'_k относится к точке с абсциссой $x = x'_k$. Для получения значений неизвестной функции в узлах счетного слоя применяется линейная интерполяция; последняя возможна при условии $\kappa = \tau/h \leq 1/M$, где M — максимум модуля правой части (7). Постановка выражений (17) и (18) в интерполяционную формулу в случае $f \geq 0$ приводит к вычислительной схеме

$$u^k = \frac{\alpha_k u_k}{1 + \frac{\kappa}{2}(f_{k+1} - f_{k-1})} + \frac{\beta_k u_{k-1}}{1 + \frac{\kappa}{2}(f_k - f_{k-2})}, \quad (19)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1 - \kappa f_{k-1}}{1 + \kappa(f_k - f_{k-1})}, \quad \beta_k = \frac{\kappa f_k}{1 + \kappa(f_k - f_{k-1})}.$$

Указанное выше ограничение на шаг не является единственным. Кроме того, должно выполняться условие правильной передачи схемой возмущений в решении (условие областей зависимости), нарушение которого и здесь приводит к неустойчивости счета.

Применяя в (18) по очереди левую и правую разности, получим, соответственно, схемы

$$u^k = \frac{\alpha_k u_k}{1 + \kappa (f_k - f_{k-1})} + \frac{\beta_k u_{k-1}}{1 + \kappa (f_{k-1} - f_{k-2})}, \quad (20)$$

$$u^k = \frac{\alpha_k u_k}{1 + \kappa (f_{k+1} - f_k)} + \frac{\beta_k u_{k-1}}{1 + \kappa (f_k - f_{k-1})}. \quad (21)$$

Наиболее компактная трехточечная схема получается при использовании правой разности для вычисления u_{k-1} и левой — для вычисления u_k :

$$u^k = \frac{\alpha_k u_k + \beta_k u_{k-1}}{1 + \kappa (f_k - f_{k-1})}. \quad (22)$$

С целью проверки пригодности схем для сквозного счета разрывов выполнена серия расчетов по решению задач для одного квазилинейного уравнения и систем (13), (15). В качестве примера на рисунке приводится результат решения по компактной схеме (22) задачи о движении ударной волны (система (13)) при $t = 100 \tau$ и $t = 200 \tau$ при $\gamma = 2$, $\kappa = 0.05$.

6. Отдельные замечания

1. Пусть для системы вида (2) поставлена задача Коши с начальными данными на отрезке оси x . Известно, что тогда решение имеет смысл только в области X , ограниченной двумя характеристиками (с наибольшим и наименьшим наклоном), выпущенными из концов отрезка. Заменяя систему (2) системой вида (7), мы получаем решение в области T , ограниченной двумя траекториями, исходящими из концов того же отрезка. На вопрос, в какой области может быть решена задача (2), (4) по методу траекторий, представляется правильным такой ответ: в пересечении областей $X \cap T$.

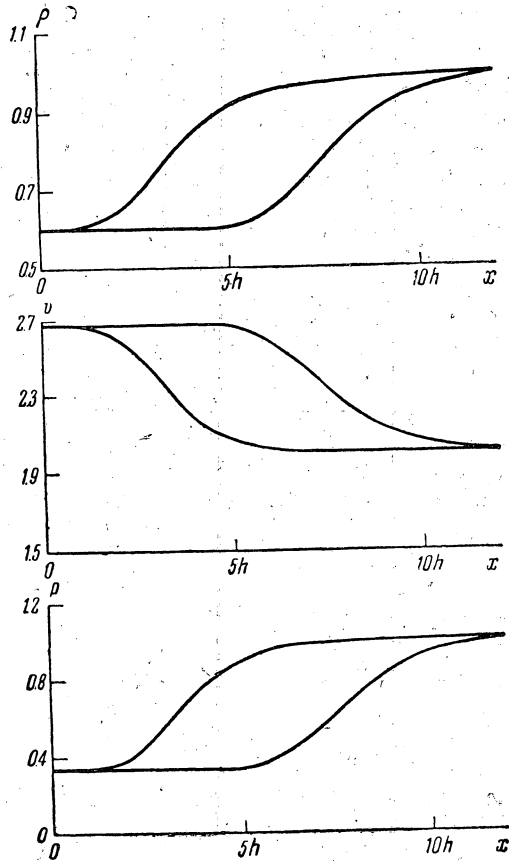
2. Прибавление константы под знаком производной, не изменяющее решения задачи Коши для уравнений в частных производных, изменяет вид соответствующих уравнений траекторий и, очевидно, поле траекторий. Важно установить, меняется ли при таком изменении плотность траекторий $u(x, t)$ или для всех уравнений получаемого таким образом семейства она одна и та же.

Простые примеры свидетельствуют в пользу последнего вывода. Приведем один из них. Задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u + c)}{\partial x} = 0, \quad c = c(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

заменяется, соответственно, задачей для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{c(t)}{u(x, t)},$$



где $u(x, t)$ — плотность траекторий. Ищем решение последнего уравнения в виде функции от $x - t$: $u = u(x - t)$. Интегрируя уравнение траекторий, имеем

$$\int_{\xi - \tau}^{x-t} u(s) ds = \int_{\tau}^t c(s) ds.$$

Дифференцируя по ξ ; получаем

$$x_{\xi} = \frac{u(\xi - \tau)}{u(x - t)}.$$

В соответствии с (5) приходим к функциональному уравнению для $u(x, t)$:

$$u(\xi - \tau) = \varphi(x_0) \frac{u(\xi - \tau)}{u(x_0)},$$

откуда $u(x - t) = \varphi(x - t)$. Это и означает независимость плотности траекторий от выбора $c(t)$.

3. Условие необращения в нуль компонент вектора $u(x, t)$ неудобно для счета и кажется весьма искусственным. Однако необходимость в этом условии легко понять, вспомнив, что траектории являются линиями уровня потенциала. Эти линии однозначны по t лишь при условии, что потенциал — монотонная по x функция.

Автор благодарен К. А. Семендяеву, В. В. Русанову, С. К. Годунову, В. С. Рябенюку за полезное обсуждение работы.

Поступила в редакцию
3.03.1962

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТИПА АДАМСА

А. Н. ТИХОНОВ, А. Д. ГОРБУНОВ

(Москва)

1. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b, \quad (1)$$

где $y(x) = \{y^{(1)}(x), \dots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция от x , $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), \dots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от x и $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$.

Пусть для приближенного решения этой задачи применяется устойчивая неявная разностная схема типа Адамса, использующая $n + 1$ точку (n — четное):

$$L(y_k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i y_{k-i} - h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k-i} = 0, \quad f_j = f(x_j, y_j) \quad (2)$$

($x_j = a + jh$; $h > 0$) при соответствующих начальных условиях.

Известно [1], что для погрешности метода, определяемого формулой (2), при достаточной гладкости вектор-функции f имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\delta_k = y_k - y(x_k) = h^s \frac{K_1}{B_0} \int_a^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \frac{d^{s+1} y(\xi)}{d\xi^{s+1}} d\xi + O(h^{s+1}), \quad (3)$$

где $y(x)$ — точное решение задачи (1), Ω — матрицант матрицы $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)}$, y_k — точное решение уравнения (2) при соответствующих начальных условиях, s — сте-