



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. N. Zaporozhets, I. A. Ibragimov, On random surface area, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2010, Volume 384, 154–175

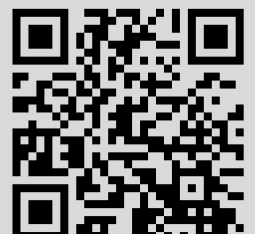
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

February 11, 2025, 22:31:56



Д. Н. Запорожец, И. А. Ибрагимов

О ПЛОЩАДИ СЛУЧАЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть задано некоторое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^d$ с границей ∂F конечной площади (определение площади см. ниже). Рассмотрим случайное гауссовское поле $G(x) : F \rightarrow \mathbb{R}$ с математическим ожиданием $m(x)$ и дисперсией $\sigma^2(x)$. Мы всегда будем предполагать, что $\sigma(x) > 0$ при всех $x \in F$ и с вероятностью единица $G \in C^1(F)$. Из теоремы о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [4, гл. IV, §5]) и суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см. [10]) следует, что $m, \sigma \in C^1(F)$. Обозначим G'_i, σ'_i частные производные G, σ по i -й координате. Символ ∇ означает градиент функции (вектор частных производных).

Рассмотрим множество нулей поля G

$$G^{-1}(0) = \{x \in F \mid G(x) = 0\}.$$

С вероятностью единица $G^{-1}(0)$ является $(d-1)$ -мерным гладким компактным подмногообразием в \mathbb{R}^d или, другими словами, гладкой компактной поверхностью.

Нас интересует вычисление средней площади поверхности $G^{-1}(0)$. Если мы заменим G на G/σ , поверхность $G^{-1}(0)$ не изменится, поэтому можно считать, что $\sigma \equiv 1$. Мы покажем, что

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-\frac{1}{2}m^2(x)} \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| dx. \quad (1)$$

Для этого нам понадобится вывести вспомогательную формулу, вычисляющую площадь поверхности, порожденной нулями неслучайного

Ключевые слова: случайное гауссовское поле, площадь поверхности, мера Фавара, формула коплощади, формула Райса.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 08-01-00692, 10-01-00242, РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ-4472.2010.1 и CRC 701 "Spectral Structures and Topological Methods in Mathematic".

гладкого поля $g(x) : F \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos[ug(x)] \|\nabla g(x)\| dx. \quad (2)$$

Прежде чем переходить к точной формулировке результатов, следует определить, что мы понимаем под площадью. Существует несколько широко известных определений площади $(d-1)$ -мерного подмногообразия в \mathbb{R}^d : поверхностная мера Лебега, мера Хаусдорфа, мера Фавара. Вообще говоря, они не эквивалентны, однако в случае C^1 -гладких компактных подмногообразий все они совпадают, поэтому мы можем выбрать любое из них. При доказательстве формулы (2) за λ_{d-1} удобнее всего принять меру Фавара (ее определение мы приводим в параграфе 3). В случае $d=1$ мера λ_0 означает число элементов множества (возможно бесконечное).

Напомним, от F мы требуем компактность и $\lambda_{d-1}[\partial F] < \infty$.

Теорема 1. Пусть $g \in C^1(F)$ и выполнены условия

- (a) $\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] < \infty$;
- (b) $\lambda_{d-1}[g^{-1}(0) \cap \partial F] = 0$.

Тогда верна формула (2).

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что условие (b) можно опустить, при этом (2) примет вид

$$\lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] - \frac{1}{2} \lambda_{d-1}[g^{-1}(0) \cap \partial F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos[ug(x)] \|\nabla g(x)\| dx.$$

В дальнейшем данное обобщение нам не понадобится.

Теорема 2. Пусть $G \in C^1(F)$ п.н. и выполнены условия

- (a') $\mathbf{E} \lambda_{d-1} \left[\left(\nabla \frac{G}{\sigma} \right)^{-1}(0) \right] < \infty$;
- (b') $\sigma(x) > 0$ при всех $x \in F$.

Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F \exp\left(-\frac{m^2(x)}{2\sigma^2(x)}\right) \mathbf{E} \left\| \nabla \frac{G(x)}{\sigma(x)} \right\| dx. \quad (3)$$

Доказательства теорем приведены в параграфе 4. Параграф 3 содержит вспомогательные утверждения технического характера. В параграфе 2 приведены примеры, которые можно вывести из теоремы 2.

2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 2

2.1. Формула коплощади.

Пример 1. Пусть функция g удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}[g^{-1}(u)] du = \int_F \|\nabla g(x)\| dx. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = g(x) - \xi$, где ξ – гауссовская с.в. с $\mathbf{E} \xi = 0$ и $\mathbf{D} \xi = \sigma^2$. В этом случае (3) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}[g^{-1}(u)] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-\frac{g^2(x)}{2\sigma^2}} \frac{\|\nabla g(x)\|}{\sigma} dx.$$

Чтобы получить (4), осталось домножить обе части на $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ и устремить σ к ∞ , применив теорему Леви о монотонной сходимости. \square

Соотношение (4), называемое “формулой коплощади”, было получено Г. Федерером в [7].

2.2. Центрированное гауссовское поле.

Обозначим \mathbb{S}^{d-1} единичную $(d-1)$ -мерную сферу со стандартной поверхностной мерой Лебега $\mu_{d-1}(ds)$.

Пример 2. Если $G(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $m(x) \equiv 0$, то

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top \Sigma(x) s} \mu_{d-1}(ds), \quad (5)$$

где $\Sigma(x)$ – ковариационная матрица $\nabla \frac{G(x)}{\sigma(x)}$.

Доказательство. Следует из леммы 7 (см. §3), примененной к (3). \square

Замечание. Соотношение (5) очевидным образом обобщается на случай $m(x) \equiv u$, $\sigma(x) \equiv 1$:

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F e^{-\frac{u^2}{2}} dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top \Sigma(x) s} \mu_{d-1}(ds). \quad (6)$$

Следствие. В условиях примера 2

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sigma^{-1} \left[\sum_{i,j=1}^d (\mathbf{E} G'_i G'_j - \sigma'_i \sigma'_j) s_i s_j \right]^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Следует из того, что Σ имеет вид

$$\Sigma = \left(\frac{\mathbf{E} G'_i G'_j - \sigma'_i \sigma'_j}{\sigma^2} \right)_{i,j=1}^d.$$

□

2.3. Линейное гауссовское поле.

Пример 3. Пусть $G(x) = \langle h(x), \xi \rangle$, где $h = (h^1, \dots, h^n)^\top : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ – векторная функция класса $C^1(F)$ и ξ – n -мерный центрированный гауссовский вектор с единичной ковариационной матрицей. Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \|J_h(x)s\| \mu_{d-1}(ds), \quad (8)$$

где J_h – матрица Якоби размера $n \times d$ отображения $h/\|h\|$.

Доказательство. Следует из (5), так как в этом случае $\Sigma = J_h^\top J_h$.
□

Замечание. Если рассмотреть центрированный гауссовский вектор ξ с произвольной ковариационной матрицей Λ , то $\Sigma = J_h^\top \Lambda J_h$ и (5) принимает вид

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top J_h^\top(x) \Lambda J_h(x) s} \mu_{d-1}(ds).$$

При $d = 1$ данная формула была получена А. Эдельманом и Э. Костланом в [6, теорема 3.1].

Следствие. Пусть в условиях примера 3 ранг J_h равен k . Обозначим $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ненулевые сингулярные числа матрицы J_h , т.е. положительные квадратные корни из собственных значений матрицы $J_h J_h^\top$. Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^k \sigma_j(x) s_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно (см., например, [5]), что матрица J_h может быть представлена в следующей сингулярной форме: $J_h = VQW$, где V, W – ортогональные матрицы размера $n \times n$ и $d \times d$. Матрица Q размера $n \times d$ является диагональной, причем на диагонали стоят сингулярные числа матрицы J_h . Имеем:

$$\|J_h s\| = \|VQW s\| = \|QW s\|.$$

Осталось подставить это в (8) и сделать ортогональную замену переменной $s' = Ws$. \square

Представим $\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)]$ в несколько иной форме, которая понадобится нам в дальнейшем.

Пример 4. В условиях примера 3 выполнено

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle}{\|h\|^4} s_i s_j \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$h'_i = \left(\frac{\partial h^1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial h^n}{\partial x_i} \right)^\top.$$

Доказательство. Имеем:

$$\sigma = \|h\|, \quad \mathbf{E} G'_i G'_j = \langle h'_i, h'_j \rangle, \quad \sigma'_i = \|h\|^{-1} \langle h, h'_i \rangle.$$

Осталось применить (7). \square

2.4. Нули случайного полинома.

Пример 5. Пусть $G(t) = \xi_n t^n + \dots + \xi_1 t + \xi_0$, $t \in F \subset \mathbb{R}$, где $\{\xi_i\}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\pi} \int_F \frac{[A_n(t)C_n(t) - B_n^2(t)]^{\frac{1}{2}}}{A_n(t)} dt,$$

где

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^n t^{2j}, \quad B_n(t) = \sum_{j=0}^n j t^{2j-1}, \quad C_n(t) = \sum_{j=0}^n j^2 t^{2j-2}.$$

Доказательство. Следует из (9). \square

Данная формула была получена М. Кацем в [8]. В качестве следствия он получил асимптотическое соотношение

$$\mathbf{E} \lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{2}{\pi} \log n \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

для $F = [-\infty, \infty]$.

2.5. Случайная алгебраическая поверхность.

Пример 6. Пусть $G(x) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} x^{\alpha}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — мультииндекс, суммирование ведется по всем α , таким что $0 \leq \alpha_j \leq n$, ξ_{α} — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{A_n(x_i)C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \|h(x)\|^2 &= \sum_{\alpha} x^{2\alpha} = \prod_{k=1}^d A_n(x_k), \\ \langle h(x), h'_i(x) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(x)\|^2 = B_n(x_i) \prod_{k \neq i} A_n(x_k) \end{aligned}$$

и

$$\langle h'_i(x), h'_j(x) \rangle = \sum_{\alpha} \alpha_i x^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_j x^{\alpha - \epsilon_j} = \begin{cases} B_n(x_i) B_n(x_j) \prod_{k \neq i, j} A_n(x_k) & \text{при } i \neq j, \\ C_n(x_i) \prod_{k \neq i} A_n(x_k) & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где ϵ_i – мультииндекс, у которого на i -м месте стоит единица, а на остальных – нули. Из этих равенств вытекает, что при $i \neq j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = 0$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = \|h\|^4 \frac{A_n(x_i) C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)}.$$

Осталось применить (9). \square

Формула (10) была получена И. А. Ибрагимовым и С. С. Подкрытовым в [2]. В качестве следствия они вывели асимптотическое соотношение

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\log n}{\pi} \lambda_{d-1}[F \cap \Gamma] \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^d \{x \mid |x_j| = 1\},$$

в предположении $\lambda_{d-1}[\partial F \cap \Gamma] = 0$.

2.6. Случайная поверхность Костлана–Шуба–Смейла.

Пример 7. Пусть $G(x) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} x^{\alpha}$, суммирование ведется по всем неотрицательным α , таким что $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq n$, ξ_{α} – независимые гауссовские случайные величины с $\mathbf{E} \xi_{\alpha} = 0$ и $\mathbf{D} \xi_{\alpha} = C_n^{\alpha}$, где

$$C_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_d! (n - \alpha_1 - \dots - \alpha_d)!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ &= \sqrt{n} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F \frac{dx}{1 + \|x\|^2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1 + \|x\|^2 - \langle x, s \rangle^2} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned}$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\|h(x)\|^2 = \sum_{\alpha} C_n^{\alpha} x^{2\alpha} = \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^n,$$

$$\langle h(x), h'_i(x) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(x)\|^2 = n x_i \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1}.$$

При $i \neq j$

$$\begin{aligned} & \langle h'_i(x), h'_j(x) \rangle \\ &= \sum_{\alpha} C_n^{\alpha} \alpha_i x^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_j x^{\alpha - \epsilon_j} = n(n-1) x_i x_j \sum_{\alpha} C_{n-2}^{\alpha - \epsilon_i - \epsilon_j} x^{2\alpha - 2\epsilon_i - 2\epsilon_j} \\ &= n(n-1) x_i x_j \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2} \end{aligned}$$

и при $i = j$

$$\begin{aligned} & \langle h'_i(x), h'_j(x) \rangle = \sum_{\alpha} C_n^{\alpha} \alpha_i x^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_i x^{\alpha - \epsilon_i} = \sum_{\alpha} C_n^{\alpha} \alpha_i x^{2\alpha - 2\epsilon_i} \\ &+ \sum_{\alpha} C_n^{\alpha} \alpha_i (\alpha_i - 1) x^{2\alpha - 2\epsilon_i} = n \sum_{\alpha} C_{n-1}^{\alpha - \epsilon_i} x^{2\alpha - 2\epsilon_i} \\ &+ n(n-1) x_i^2 \sum_{\alpha} C_{n-2}^{\alpha - 2\epsilon_i} x^{2\alpha - 4\epsilon_i} = n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1} \\ &+ n(n-1) x_i^2 \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что при $i \neq j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = -n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2} x_i x_j$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2} \left(1 + \sum_{k \neq i}^d x_k^2\right).$$

Следовательно, из (9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \sqrt{n} \int_F \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{-1} dx \\ &\times \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(-\sum_{i \neq j}^d x_i x_j s_i s_j + \sum_{i=1}^d \left(1 + \sum_{k \neq i}^d x_k^2\right) s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \sqrt{n} \int_F (1 + \|x\|^2)^{-1} dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1 + \|x\|^2 - \langle x, s \rangle^2} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned}$$

□

Замечание. Таким образом,

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = C_F \sqrt{n},$$

где C_F зависит только от F и d . В [13] М. Шуб и С. Смейл получили аналогичный результат для числа нулей системы из d полиномов.

Следствие. При $d = 1$ получаем

$$\mathbf{E} \lambda_0[G^{-1}(0)] = \sqrt{n} \int_F \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

Данное соотношение было получено Э. Костланом в [9].

2.7. Случайная тригонометрическая поверхность.

Обозначим $|F|$ объем множества F (т.е. меру Лебега в \mathbb{R}^d).

Пример 8. Пусть

$$G(x) = \sum_{\alpha} [\xi_{\alpha} \cos\langle \alpha, x \rangle + \eta_{\alpha} \sin\langle \alpha, x \rangle],$$

где суммирование ведется по всем α , таким что $0 \leq \alpha_j \leq n$, $\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = n \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} |F| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left((s_1 + \dots + s_d)^2 + \frac{n+2}{3n} \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\|h(x)\|^2 = (n+1)^d, \quad \langle h(x), h'_i(x) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(x)\|^2 = 0$$

и

$$\langle h'_i(x), h'_j(x) \rangle = \sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j = \begin{cases} (n+1)^{d-2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 & \text{при } i \neq j, \\ (n+1)^{d-1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Осталось применить (9). □

Следствие (1).

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = c_d |F| n \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где c_d зависит только от размерности d .

Следствие (2). При $d = 1$ получаем

$$\mathbf{E} \lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\pi} |F| \sqrt{\frac{n(2n+1)}{6}}.$$

Данная формула была получена К. Кволсом в [11].

2.8. Множества уровня однородного гауссовского поля.

Пример 9. Пусть $G(x)$ является однородным гауссовским полем со спектральной мерой ν и удовлетворяет условиям теоремы 1. Для простоты мы предполагаем $m(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) \equiv 1$. Тогда

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(u)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} |F| e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle s, z \rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. По теореме о спектральном представлении

$$\mathbf{E} G(x)G(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, z \rangle} \nu(dz).$$

Продифференцируем дважды и подставим $x = y = 0$:

$$\mathbf{E} G'_i(0)G'_j(0) = \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j \nu(dz).$$

Применяя (6) к $G(x) - u$, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(u)] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} e^{-\frac{u^2}{2}} |F| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^d s_i s_j \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} |F| e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle s, z \rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned}$$

Следствие (1). *Выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\pi} \gamma_1 e^{-\frac{u^2}{2}} |F| \leq \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \leq \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2})} \gamma_2 e^{-\frac{u^2}{2}} |F|,$$

где

$$\gamma_k = \left(\int_{\mathbb{R}} \|z\|^k \nu(dz) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Доказательство. Используя неравенство Йенсена, теорему Фубини и лемму 2 (см. §3), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle s, z \rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \geq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\mathbb{R}^d} |\langle s, z \rangle| \nu(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dz) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle s, z \rangle| \mu_{d-1}(ds) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \|z\| \nu(dz) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \gamma_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, по неравенству Коши $\|\langle s, z \rangle\| \leq \|s\| \|z\| = \|z\|$, поэтому

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle s, z \rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \leq \omega_{d-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|z\|^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \gamma_2.$$

□

Следствие (2). При $d = 1$ получаем

$$\mathbf{E} \lambda_0[G^{-1}(u)] = \frac{\gamma^2}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} |F|.$$

Данная формула была получена С. Райсом в [12].

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним, чтобы вычислить $(d - 1)$ -мерную меру Фавара множества A , надо спроектировать его на $(d - 1)$ -мерную линейную гиперплоскость, взять меру Лебега (с учетом кратности проекции) и усреднить по всем таким проекциям, нормировав соответствующим образом:

$$\lambda_{d-1}[A] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{s^\perp} \lambda_0[\{s_y^\perp\}^\perp \cap A] dy, \quad (11)$$

где s^\perp – линейная гиперплоскость, ортогональная единичному вектору $s \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\{s_y^\perp\}^\perp$ – прямая, ортогональная s^\perp и проходящая через точку $y \in s^\perp$.

Введем обозначения, которые нам понадобятся в данном параграфе. Пусть

$$M = \sup_{R>0} \left| \int_{-R}^R \frac{\sin u}{u} du \right|.$$

Из Леммы 1 (см. ниже) следует, что $M < \infty$. Обозначим ω_k площадь k -мерной сферы:

$$\omega_k = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}.$$

Предполагается, что функция g на протяжении всего параграфа удовлетворяет условиям теоремы 1. Обозначим g'_s частную производную g по направлению $s \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Лемма 1. Для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tu}{u} du = \text{sign } t. \quad (12)$$

Доказательство. См., например, [1, гл. XI, §2, п. 3]. □

Лемма 2. Для всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle x, s \rangle| \mu_{d-1}(ds) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \|x\|. \quad (13)$$

Доказательство. Содержательным является случай, когда $x \neq 0$. Рассмотрим произвольное борелевское множество A , лежащее в линейной гиперплоскости x^\perp , такое что $\lambda_{d-1}[A] = \|x\|$. Применим формулу (11). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение $\int_{s^\perp} \lambda_0[\{s_y^\perp\}^\perp \cap A] dy$ является площадью проекции множества A на линейную гиперплоскость s^\perp . С другой стороны, при проекции множества из одной гиперплоскости на другую его площадь умножается на модуль косинуса угла между гиперплоскостями, поэтому

$$\int_{s^\perp} \lambda_0[\{s_y^\perp\}^\perp \cap A] dy = \lambda_{d-1}[A] \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, s \right\rangle \right| = |\langle x, s \rangle|.$$

Подставляя данное равенство в (11) и заменяя $\lambda_{d-1}[A]$ на $\|x\|$, получаем (13). \square

Следующая лемма является результатом, сформулированным и доказанным М. Кацем (см., например, [3]).

Лемма 3. Пусть функция одной переменной $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число стационарных точек (где производная обращается в ноль). Тогда число нулей функции $f(t)$ на $[a, b]$ определяется формулой

$$\lambda_0[f^{-1}(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_a^b \cos[uf(t)] |f'(t)| dt. \quad (14)$$

При подсчете $\lambda_0[f^{-1}(0)]$ нуль, совпадающий с a или b , считается за “полнуля”.

Замечание. Данное утверждение очевидным образом распространяется на случай объединения конечного числа отрезков. В этом виде мы его будем использовать в дальнейшем.

Доказательство. Для удобства читателя мы приводим доказательство из [3]. Обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ стационарные точки f :

$$a = \alpha_0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq \alpha_{k+1} = b.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)| dt &= \sum_{j=0}^k \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos[uf(t)]|f'(t)| dt \\ &= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos[uf(t)]f'(t) dt \right\} = \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})] - \sin[uf(\alpha_j)]}{u} \right\}. \end{aligned}$$

Знак “+” выбирается для участков, где f возрастает, знак “-” — где f убывает. Таким образом, применяя (12), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)| dt \\ &= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})] - \sin[uf(\alpha_j)]}{u} du \right\} \\ &= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{\text{sign } f(\alpha_{j+1}) - \text{sign } f(\alpha_j)}{2} \right\} = \lambda_0[f^{-1}(0)]. \end{aligned}$$

□

Лемма 4. Пусть функция одной переменной $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет k стационарных точек. Тогда равномерно по $R > 0$

$$\left| \int_{-R}^{+R} du \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)| dt \right| \leq 2M(k+1).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 3 имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-R}^{+R} du \int_a^b \cos[uf(t)] |f'(t)| dt \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \int_{-R}^R \frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})] - \sin[uf(\alpha_j)]}{u} du \right\} \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^k \pm \left\{ \int_{-Rf(\alpha_{j+1})}^{+Rf(\alpha_{j+1})} \frac{\sin u}{u} du - \int_{-Rf(\alpha_j)}^{+Rf(\alpha_j)} \frac{\sin u}{u} du \right\} \right| \\
&\leq 2(k+1) \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{-t}^{+t} \frac{\sin u}{u} du \right| = 2M(k+1).
\end{aligned}$$

□

Следствие. Если $[a, b]$ заменить множеством H , состоящим из объединения l отрезков, то равномерно по $R > 0$

$$\left| \int_{-R}^{+R} du \int_H \cos[uf(t)] |f'(t)| dt \right| \leq 2M(k+l). \quad (15)$$

Лемма 5. Верно следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}[g'_s{}^{-1}(0)] \mu_{d-1}(ds) \leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2} |F|.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}[g'_s{}^{-1}(0)] \mu_{d-1}(ds) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_F \mathbf{1}\{g'_s(y) = 0\} \lambda_{d-1}(dy) \\
&\leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \mathbf{1}\{g'_s(y) = 0\} \lambda_{d-1}(dy).
\end{aligned}$$

Осталось оценить второе слагаемое. Если $\nabla g(y) \neq 0$, то множество $S(y) = \{s \in \mathbb{S}^{d-1} \mid g'_s(y) = 0\}$ лежит в единичной гиперсфере сферы

\mathbb{S}^{d-1} , ортогональной $\nabla g(y)$. Следовательно, $\lambda_{d-2}[S(y)] \leq \omega_{d-2}$ и, используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \mathbf{1}\{g'_s(y) = 0\} \lambda_{d-1}(dy) \\ &= \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}\{f'_s(x) = 0\} \mu_{d-2}(ds) \\ &= \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \lambda_{d-2}[S(y)] dx \leq \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \omega_{d-2} dx = \omega_{d-2}|F|. \end{aligned}$$

□

Лемма 6. При всех $R > 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Sd} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{(y,s)=0\}} dy \left| \int_{-R}^R du \int_{\{y+ts \in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)| dt \right| \right| \\ & \leq 2M \left(\omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F| + \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \lambda_{d-1}[\partial F] \right) \end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-R}^R du \int_F \cos[ug(x)] \|\nabla g(x)\| dx \right| \\ & \leq \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d-1}{2}}} M \left(\omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla f)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F| + \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \lambda_{d-1}[\partial F] \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $k(s, y)$ число нулей $g'_t(y+ts)$ (возможно бесконечное) на множестве $\{t \mid y+ts \in F\}$ и $l(s, y)$ – число отрезков, из которых состоит это множество (если множество не является объединением конечного числа отрезков, полагаем $l(s, y) = \infty$). Из (15) получаем

$$\left| \int_{-R}^R du \int_{\{t \mid y+ts \in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)| dt \right| \leq 2M (k(s, y) + l(s, y)). \tag{18}$$

Если мы спроектируем множество $g'_s{}^{-1}(0)$ на гиперплоскость $\{y \mid \langle y, s \rangle = 0\}$, то $k(s, y)$ будет равняться кратности полученной проекции в точке y . При проекции мера не увеличивается, поэтому

$$\int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} k(s, y) dy \leq \lambda_{d-1}[g'_s{}^{-1}(0)],$$

что по лемме 5 влечет

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} k(s, y) dy \leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F|. \quad (19)$$

Далее, применив определение меры Фавара к границе F , имеем

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} 2l(s, y) dy = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \lambda_{d-1}[\partial F]. \quad (20)$$

Объединение (18), (19) и (20) приводит к (16).

Докажем (17). Из (13) имеем

$$\|\nabla g(x)\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \nabla g(x), s \rangle| \mu_{d-1}(ds).$$

Следовательно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-R}^R du \int_F \cos[ug(x)] \|\nabla g(x)\| dx \right| \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \left| \int_{-R}^R du \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \cos[ug(x)] |\langle \nabla g(x), s \rangle| \mu_{d-1}(ds) \right| \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \left| \int_{S^d} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} dy \int_{-R}^R du \int_{\{x+ts \in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)| dt \right|. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось применить (16). \square

Лемма 7. Пусть дан n -мерный центрированный гауссовский вектор ξ с ковариационной матрицей Σ . Тогда

$$\mathbf{E} \|\xi\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{2}\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s\Sigma s^\top} \mu_{d-1}(ds)$$

Доказательство. Из (13) и теоремы Фубини имеем

$$\mathbf{E} \|\xi\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{E} |\langle \xi, s \rangle| \mu_{d-1}(ds).$$

Далее,

$$\mathbf{E} |\langle \xi, s \rangle| = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)| \sqrt{\mathbf{D}\langle \xi, s \rangle} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{s\Sigma s^\top},$$

что завершает доказательство. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Используя (11) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} dy \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\{y+ts \in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)| dt \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{\langle y, s \rangle = 0\}} dy \\ &\times \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\{y+ts \in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)| dt. \end{aligned}$$

Из (16), условия (b) и выбора F следует, что мы можем применить

теорему Лебега:

$$\begin{aligned} \lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{(x,s)=0\}} dy \\ &\times \int_{-R}^R du \int_{\{x+ts \in F\}} \cos[ug(x+ts)] |g'_t(x+ts)| dt. \end{aligned}$$

Так как все области интегрирования конечномерны, а интегрируемые функции ограничены, можно применить теорему Фубини:

$$\begin{aligned} \lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_{\{(x,s)=0\}} dy \\ &\times \int_{\{x+ts \in F\}} \cos[ug(x+ts)] |g'_t(x+ts)| dt \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_F \cos[ug(x)] |\langle \nabla g(x), s \rangle| dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int_F \cos[ug(x)] |\langle \nabla g(x), s \rangle| dx. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму 2. \square

Перейдем к доказательству второй теоремы.

Доказательство теоремы 2. Применим теорему 1. Для этого покажем, что с вероятностью единица для G выполнены условия (а) и (б). Из (а') очевидным образом следует, что (а) выполнено п.н. Далее, учитывая (б') и $\lambda_{d-1}[\partial F] < \infty$, по теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0) \cap \partial F] &= \mathbf{E} \int_{\partial F} \mathbf{1}\{G(y) = 0\} d\lambda_{d-1}(y) \\ &= \int_{\partial F} \mathbf{P}\{G(y) = 0\} d\lambda_{d-1}(y) = 0, \end{aligned}$$

что влечет выполнение (b) п.н.

Докажем сначала теорему для случая $\sigma \equiv 1$. Из (2) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \mathbf{E} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{E} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_F \cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\| dx. \end{aligned}$$

Из (17), условия (a') и выбора F следует, что применима теорема Лебега:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{-R}^R du \int_F \cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_F dx \int_{-R}^R \mathbf{E} \left\{ \cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\| \right\} du. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы применили теорему Фубини, что законно, так как выполнено

$$|\cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\|| \leq \|\nabla G(x)\| \leq \sum_{j=1}^d |G'_j(x)|$$

и

$$\mathbf{E} \int_{-R}^R du \int_F \sum_{j=1}^d |G'_j(x)| dx \leq 2R|F| \sum_{j=1}^d \mathbf{E} \sup_{x \in F} |G'_j(x)| < \infty.$$

Конечность правой части следует из суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см.[10]).

Продифференцировав $\sigma^2 \equiv 1$, получаем

$$\frac{\partial(\mathbf{E} G^2)}{\partial x_i} - 2\mathbf{E} G \frac{\partial(\mathbf{E} G)}{\partial x_i} = 0,$$

следовательно, по теореме о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [4, гл. IV, §5]) выполнено

$$\mathbf{E} G G'_i = \frac{1}{2} \mathbf{E} \frac{\partial G^2}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{E} G^2)}{\partial x_i} = \mathbf{E} G \frac{\partial(\mathbf{E} G)}{\partial x_i} = \mathbf{E} G \mathbf{E} G'_i,$$

т.е. G не коррелирует с компонентами вектора ∇G , что в гауссовском случае равносильно независимости. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \cos[uG(x)] \|\nabla G(x)\| \right\} &= \mathbf{E} \cos[uG(x)] \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} e^{iuG(x)} \right\} \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| = \operatorname{Re} \left\{ e^{i um(x) - \frac{u^2}{2}} \right\} \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| \\ &= \cos[um(x)] e^{-\frac{u^2}{2}} \mathbf{E} \|\nabla G(x)\|, \end{aligned}$$

что влечет

$$\mathbf{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_F \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| dx \int_{-R}^R \cos[um(x)] e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Используя теорему Лебега и формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos[um(x)] e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} e^{im(x)\mathcal{N}(0,1)} \right\} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{m^2(x)}{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_F \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| dx \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \cos[um(x)] e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-\frac{m^2(x)}{2}} \mathbf{E} \|\nabla G(x)\| dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Случай $\sigma \equiv 1$ разобран. Чтобы перейти к общему случаю, рассмотрим поле G/σ . Оно имеет единичную дисперсию, и множество его нулей совпадает с множеством нулей исходного, поэтому для завершения доказательства осталось применить (21) к G/σ . \square

5. БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны С. В. Иванову, А. И. Назарову, Е. М. Рудо и Д. С. Челкаку за полезные консультации.

Часть работы выполнена во время пребывания в Университете Билефельда. Авторы признательны Ф. Гетце и А. Кол за проявленное гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Ефимов, *Математический анализ (специальные разделы)*, Т. 1. Высшая школа (1980).
2. И. А. Ибрагимов, С. С. Подкорытов, *О случайных вещественных алгебраических поверхностях*. — Докл. Акад. Наук, **343** No. 6 (1995), 734–736.
3. М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*. Едиториал УРСС (2003).
4. А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*. ФАЗИС (1998).
5. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*. Мир (1989).
6. A. Edelman and E. Kostlan, *How many zeros of a random polynomial are real*. — Bull. Amer. Math. Soc., **32** No. 1 (1995), 1–37.
7. H. Federer, *Curvature measures*. — Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 418–491.
8. М. Кас, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*. — Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 314–320.
9. E. Kostlan, *On the distribution of roots of random polynomials*. — In: From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest, Springer (1993), pp. 419–431.
10. H. J. Landau and L. A. Shepp, *On the supremum of a Gaussian process*. — Sankhya Ser. A, **32** (1970), 369–378.
11. C. Qualls, *On the number of zeros of a stationary Gaussian random trigonometric polynomial*. — J. London Math. Soc., **2** No. 2 (1970), 216–220.
12. S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*. — Bell System Technical Journal, **24** (1945), 46–156.
13. M. Shub and S. Smale, *Complexity of Bézout's theorem II: volumes and probabilities*. — Computational Algebraic Geometry, **109** (1993), 267–285.

Zaporozhets D. N., Ibragimov I. A. On random surface area.

Consider a random smooth Gaussian field $G(x) : F \rightarrow \mathbb{R}$, where F is a compact in \mathbb{R}^d . We derive a formula for average area of a surface set by the equation $G(x) = 0$ and give some applications. As an auxiliary result we obtain an integral expression for area of a surface induced by zeros of any *non-random* smooth field.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонганка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: zap1979@gmail.com
ibr32@pdmi.ras.ru

Поступило 10 ноября 2010 г.