ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 551–552

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.957

ВИБРОКОРРЕКТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ*)

© 2005 г. К. К. Гасанов, Х. Т. Гусейнова

В работе введено понятие виброкорректности и получены условия, при выполнении которых система уравнений в частных производных первого порядка с обобщенными воздействиями является виброкорректной.

Пусть требуется найти решение системы

$$x_t = f_1(x,y,u,v,t,s) + \varphi_1(x,u,t,s)\dot{u}(t), \quad y_s = f_2(x,y,u,v,t,s) + \varphi_2(y,v,s,t)\dot{v}(s) \tag{1}$$

в прямоугольнике $G = [t_0,t_1] \times [s_0,s_1]$, удовлетворяющее условиям

$$x(t_0,s) = \psi_1(s), \quad s \in S = [s_0,s_1], \quad y(s_0,t) = \psi_2(t), \quad t \in T = [t_0,t_1], \tag{2}$$

где производные понимаются в смысле теории обобщенных функций, f_i, ψ_i – n_i-мерные функции, φ_i – $n_i \times m_i$-матрицы, $i = 1,2$, $(u(t),v(s))$ – (m_1+m_2)-мерная функция ограниченной вариации, $(\dot{u}(t),\dot{v}(s))$ – распределения нулевого порядка [1, с. 203–208].

Для абсолютно непрерывной функции $(u(t),v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$ функция $(x(t,s),y(s,t)) \in C(T,L^{n_1}(S)) \times C(S,L^{n_2}(T))$ называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет почти всюду в G системе интегральных уравнений

$$x(t,s) = \psi_1(s) + \int\limits_{t_0}^{t} [f_1(x(\tau,s),y(s,\tau),u(\tau),v(s),\tau,s) + \varphi_1(x(\tau,s),u(\tau),\tau,s)\dot{u}(\tau)]\,d\tau,$$

$$y(s,t) = \psi_2(t) + \int\limits_{s_0}^{s} [f_2(x(t,\sigma),y(\sigma,t),u(t),v(\sigma),t,\sigma) + \varphi_2(y(\sigma,t),v(\sigma),\sigma,t)\dot{v}(\sigma)]d\sigma,$$

где $C(T,L^n(S))$ – пространство непрерывных отображений $T \to L^n(S)$.

В случае, когда хотя бы одна из функций $u(t)$, $v(s)$ является функцией ограниченной вариации, возникают трудности, связанные с доопределением операции умножения сингулярной обобщенной функции на разрывную функцию. Для этого случая определим решение следующим образом.

Пусть последовательности $(u_k(t),v_k(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$, $k = 1,2,\ldots$, в слабой топологии пространства $VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ сходятся к функции $(u(t),v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$. Обозначим через $(x_k(t,s),y_k(s,t)) \in C(T,L^{n_1}(S)) \times C(S,L^{n_2}(T))$ решение задачи (1), (2), соответствующее функциям $(u_k(t),v_k(s))$, $k = 1,2,\ldots$ Задача (1), (2) называется виброкорректной на входе ограниченной вариации, если последовательность $(x_k(t,s),y_k(s,t))$ в слабой топологии пространства $VB(T,L^{n_1}(S)) \times VB(S,L^{n_2}(T))$ сходится к некоторой вполне определенной функции $(x(t,s),y(s,t)) \in VB(T,L^{n_1}(S)) \times VB(S,L^{n_2}(T))$ и предел не зависит от выбора последовательности $(u_k(t),v_k(s))$, $k = 1,2,\ldots$ Предел $(x(t,s),y(s,t))$ называется виброрешением задачи (1), (2), отвечающим входным функциям $(u(t),v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ [2, с. 36–57].

Пусть выполняются условия:

a) $\psi_1(s) \in L^{n_1}(S)$, $\psi_2(t) \in L^{n_2}(T)$;

b) вектор-функции $f_i(x,y,u,v,t,s)$, $i = 1,2$, непрерывны по $(x,y,u,v) \in R^{n_1+n_2+m_1+m_2}$ для п.в. $(t,s) \in G$, измеримы по (t,s) для всех (x,y,u,v); кроме того, $\|f_i(x(t,s),y(s,t),u(t),v(s),t,s)\| \le m_i(t,s)$, $i = 1,2$, и

$$\|f_i(\tilde{x}(\tau,\sigma),\tilde{y}(\sigma,\tau),u(\tau),v(\sigma),\tau,\sigma) - f_i(x(\tau,\sigma),y(\sigma,\tau),u(\tau),v(\sigma),\tau,\sigma)\|_{L^{n_i}(G_{ts})} \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_i(u(\tau),\tau)\|\tilde{x}(\tau,\cdot) - x(\tau,\cdot)\|_{L^{n_1}(s_0,s_1)}\,d\tau + \int\limits_{s_0}^{s} \rho_i(v(\sigma),\sigma)\|\tilde{y}(\sigma,\cdot) - y(\sigma,\cdot)\|_{L^{n_2}(t_0,t)}\,d\sigma,$$

*) Рукопись полностью депонирована в ВИНИТИ 19.12.2003. № 2209-В2003.

где $(x(t,s),y(s,t)) \in S_R(G) = \{(x,y) \in C(T,L^{n_1}(S)) \times C(S,L^{n_2}(T)) : \ \|x-\psi_1(s)\|_{L^{n_1}(S)} \le R, \ t \in T;$ $\|y-\psi_2(t)\|_{L^{n_2}(T)} \le R, \ s \in S, \ R > 0\}$, $m_i(t,s) \in L(G)$, $\gamma_i(u(t),t) \in L(T)$; $\rho_i(v(s),s) \in L(S)$, $i = 1,2$;

c) функции $f_i(x,y,u,v,t,s)$, $i=1,2$, $\varphi_1(x,u,t,s)$, $\varphi_2(y,v,s,t)$ удовлетворяют по x, y условию роста

$$\|f_i(x,y,u,v,t,s)\| \le M_{f_i}(u,t)\|x\| + N_{f_i}(v,s)\|y\| + C_{f_i}(u,v,t,s),$$

$$\|\varphi_1(x,u,t,s)\| \le M_{\varphi_1}(u,t)\|x\| + C_{\varphi_1}(u,t,s), \quad \|\varphi_2(y,v,s,t)\| \le M_{\varphi_2}(v,s)\|y\| + C_{\varphi_2}(v,s,t),$$

где для любых $(u(t),v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$

$$M_{f_i}(u(t),t) \in L(T), \quad N_{f_i}(v(s),s) \in L(S), \quad M_{\varphi_1}(u(t),t) \in L_\infty(T),$$

$$M_{\varphi_2}(v(s),s) \in L_\infty(S), \quad C_{f_i}(u(t),v(s),t,s) \in L(G),$$

$$C_{\varphi_1}(u(t),t,s) \in L_\infty(T,L(S)), \quad C_{\varphi_2}(v(s),s,t) \in L_\infty(S,L(T));$$

d) функции $\varphi_1(x,u,t,s)$ и $\varphi_2(y,v,s,t)$ непрерывны вместе с частными производными φ_{1x}, φ_{1t} и φ_{2y}, φ_{2s} при $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $u \in R^{m_1}$, $v \in R^{m_2}$, $t \in T$, $s \in S$. Кроме того, функции $\varphi_1(x,u,t,s)$, $\varphi_{1x}(x,u,t,s)$, $\varphi_{1t}(x,u,t,s)$ и $\varphi_2(y,v,s,t)$, $\varphi_{2y}(y,v,s,t)$, $\varphi_{2s}(y,v,s,t)$ локально удовлетворяют условию Липшица по x и по y соответственно;

e) уравнения в полных дифференциалах

$$dk/dp = \varphi_1(k,p,\tau,\sigma), \quad k(u) = \xi, \quad dh/dq = \varphi_2(h,q,\sigma,\tau), \quad h(v) = \eta, \tag{3}$$

локально разрешимы для $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$, $p,u \in R^{m_1}$, $q,v \in R^{m_2}$, $\tau \in T$, $\sigma \in S$, где τ, s играют роль параметров.

По теореме о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений от начальных условий и параметров [3] решения задачи (3) $k(\xi,p,u,\tau,\sigma)$, $h(\eta,q,v,\sigma,\tau)$ и их производные k_ξ, k_τ, h_η, h_σ непрерывны по совокупности переменных и локально удовлетворяют условию Липшица по ξ и η соответственно.

Пусть $(x(t,s),y(s,t))$ – решение задачи (1), (2) при $(u(t),v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$, тогда

$$z(t,s) = k(x(t,s),u^0,u(t),t,s), \quad \omega(s,t) = h(y(s,t),v^0,v(s),s,t)$$

являются решениями системы

$$z_t = \Psi_1(z,\omega,u,v,u^0,v^0,t,s), \quad \omega_s = \Psi_2(z,\omega,u,v,u^0,v^0,t,s) \tag{4}$$

и удовлетворяют условиям

$$z(t_0,s) = \psi_1(s), \quad s \in S, \quad \omega(s_0,t) = \psi_2(t), \quad t \in T, \tag{5}$$

где

$$u^0 = u(t_0), \quad v^0 = v(s_0),$$

$$\Psi_1(z,\omega,u,v,u^0,v^0,t,s) = k_\xi(k(z,u,u^0,t,s),u^0,u,t,s)f_1(k(z,u,u^0,t,s),h(\omega,v,v^0,s,t),u,v,t,s) + \\ + k_\tau(k(z,u,u^0,t,s),u^0,u,t,s),$$

$$\Psi_2(z,\omega,u,v,u^0,v^0,t,s) = h_\eta(h(\omega,v,v^0,s,t),v^0,v,s,t)f_2(k(z,u,u^0,t,s),h(\omega,v,v^0,s,t),u,v,t,s) + \\ + h_\sigma(h(\omega,v,v^0,s,t),v^0,v,s,t).$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $(u(t),v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ *такой, что*

$$\|u(t)-u^0\| \le r, \quad t \in T, \quad \|v(s)-v^0\| \le r, \quad s \in S,$$

существует локальное единственное решение $(z(t,s),\omega(s,t))$ *задачи (4), (5).*

Теорема 2. *Пусть 1) системы (3) глобально разрешимы для всех* $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$, $\rho,u \in R^{m_1}$, $q,v \in R^{m_2}$, $\tau \in T$, $\sigma \in S$; *2) задача (4), (5) имеет единственное решение* $(z(t,s),\omega(s,t))$ *для произвольной функции* $(u(t),v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$. *Тогда задача (1), (2) виброкорректна на входах ограниченной вариации в целом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1978.
2. *Орлов Ю.В.* Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. М., 1988.
3. *Благодатских В.И.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2136–2140.

Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию
29.01.2002 г.