ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 349, № 6, с. 743–746

МАТЕМАТИКА

УДК 511.9+514.174

ЖЕНЕРАТРИССА. ЗАДАЧИ МАКСВЕЛЛА И ВОРОНОГО

© 1996 г. С. С. Рышков, К. А. Рыбников (мл.)

Представлено академиком С.П. Новиковым 16.11.94 г.

Поступило 21.11.94 г.

1.1. В 1864 г. Д.К. Максвелл [1, 2] с помощью геометрических методов изучал распределение напряжений в металлических фермах. Это привело его к выявлению условий, при которых заданное разбиение плоскости на конечное число выпуклых многоугольников имеет дуальное разбиение на выпуклые многоугольники. Оказалось, что это бывает тогда и только тогда, когда заданное разбиение есть проекция выпуклой полиэдральной поверхности – "Maxwell polyhedral bowl".

В 1908 г. Г.Ф. Вороной [3] исследовал разбиения пространства на параллелоэдры. Для любого разбиения n-мерного евклидова пространства E^n на примитивные параллелоэдры он, в частности, доказал существование выпуклой полиэдральной поверхности, дающей в проекции это разбиение. Функция, задающая упомянутую поверхность, была названа им женератриссой, так как она полностью определяет разбиение. Легко видеть, что как Максвелл, так и Вороной изучали один и тот же круг проблем (дальнейшую литературу см. в [4]). Предлагаемая заметка посвящена ряду новых результатов в этом же круге проблем.

1.2. Через $\mathfrak{T}$ всюду здесь обозначается произвольное фиксированное локально-конечное нормальное (т.е. "грань в грань", см. также [5]) разбиение пространства E^n на выпуклые, быть может бесконечные, n-мерные многогранники. Грани этих многогранников мы называем гранями разбиения $\mathfrak{T}$.

Назовем i-*короной* многогранника $T \in \mathfrak{T}$ объединение $K_i(T)$ всех многогранников $T' \in \mathfrak{T}$, имеющих с T хотя бы одну общую i-мерную грань. Следуя П. Энгелю, сохраним за $(n-1)$-короной название *корона*, а 0-корону будем, как обычно, именовать *окружением многогранника*.

Мы здесь будем называть *звездой* k-*мерной грани* f^k разбиения $\mathfrak{T}$ объединение $S(f^k)$ всех граней и многогранников разбиения, содержащих грань f^k. Такие грани (многогранники) мы будем называть *гранями* (*многогранниками*) *звезды*.

Многогранник $T \in \mathfrak{T}$ назовем k-*примитивным в* $\mathfrak{T}$ (k-примитивно вложенным в $\mathfrak{T}$), если звезда каждой его k-мерной грани содержит $n-k+1$ многогранников разбиения $\mathfrak{T}$. Разбиение $\mathfrak{T}$ назовем k-*примитивным*, если в нем k-примитивен каждый многогранник.

2.1. Пусть n-мерный замкнутый (размерностно-однородный) подкомплекс $U \subseteq \mathfrak{T}$ сильно связен. Мы будем называть *женератриссой Вороного*, или просто *женератриссой* подкомплекса U, такую непрерывную локально-выпуклую функцию (поверхность) над U, которая представима над каждым многогранником $T \in U$ линейной функцией, причем над различными многогранниками различными функциями.

Будем называть i-чашей (а если $i = 0$, то просто *чашей*) над T каждую женератриссу i-короны многогранника $T \in \mathfrak{T}$. (Крапо [6] называет чашу многоугольника *calotte* – небольшой головной убор католического священнослужителя, имеющий форму сегмента шаровой поверхности и носимый на макушке.) Если у $T \in \mathfrak{T}$ существует i-чаша, то из нее естественно выделяются чаши для всех больших индексов – чаши, "подчиненные" нашей чаше. Заметим, что даже $(n-2)$-чаша многогранника $T \in \mathfrak{T}$ существует не всегда.

Все женератриссы подкомплекса U естественно разбиваются на классы эквивалентности по отношению к операциям сложения с линейной функцией и умножения на положительную константу.

Рассмотрим звезду $S(f^k) = S$ грани f^k. Пусть для каждого многогранника $T \in S$ фиксирована i-чаша, скажем, $C_i(T)$. Если при этом существует такая женератрисса $V(S)$ звезды S, что для каждого многогранника $T \in S$ найдется i-чаша, эквивалентная $C_i(T)$ и совпадающая над $K_i(T) \cap S$ с женератриссой $V(S)$, то будем говорить, что все эти фиксированные чаши согласованы над звездой f^k.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Пусть любой набор i-чаш, чьи многогранники смежны по какой-либо k-мерной грани, согласован над звездой этой грани. Тогда будем говорить, что наши i-чаши k-согласованы на всем разбиении.

Теорема 1. *Пусть для разбиения $\mathfrak{T}$ существует женератрисса. Тогда для всех $T \in \mathfrak{T}$ найдутся такие* 0-*чаши, что все подчиненные им i-чаши k-согласованы для любых i и k.*

В то время как эта теорема фактически является прямым следствием определений, обратная теорема уже достаточно трудна. Однако верна и следующая теорема, гораздо более сильная, чем обратная.

Теорема 2. *Пусть для каждого многогранника разбиения $\mathfrak{T}$ зафиксирована $(n-1)$-чаша, и эти чаши $(n-2)$-согласованы на всем разбиении. Тогда для разбиения $\mathfrak{T}$ существует женератрисса.*

Назовем паучком $(n-2)$-чаши многогранника $T \in \mathfrak{T}$ в окрестности его $(n-2)$-мерной грани f^{n-2} проекцию всех плоскостей пересечения граней нашей чаши, сходящихся в f^{n-2}, на диск, ортогональный f^{n-2}, с центром на f^{n-2}.

Теорема 3. *Пусть $(n-2)$-чаши всех многогранников $T \in S(f^{n-2})$ существуют и имеют один и тот же паучок. Тогда существуют и $(n-2)$-чаши этих многогранников, согласованные над звездой $S(f^{n-2})$.*

Теорема 4. *Пусть разбиение $\mathfrak{T}$ $(n-2)$-примитивно и для каждого его многогранника существует $(n-2)$-чаша. Тогда женератрисса разбиения $\mathfrak{T}$ существует.*

2.2. Пусть для фиксированного многогранника $T \in \mathfrak{T}$ в пространстве E^n существует выпуклый многогранник $\mathbf{T}$, принадлежащий внутренности окружения $K_0(T)$ многогранника $\mathbf{T}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $T \subset \mathbf{T}$ (включение строгое).

2) Каждая $(n-1)$-мерная грань $f^{n-1} \in \mathbf{T}$ есть пересечение границы многогранника $\mathbf{T}$ с многогранником разбиения $\mathfrak{T}$, лежащим в $K_0(T)\backslash T$. Этот многогранник называется высекающим для f^{n-1}.

3) Каждая $(n-1)$-мерная грань $\mathbf{T}$ параллельна всем граням, по которым ее высекающий многогранник граничит с T.

Такой многогранник $\mathbf{T}$ называется параллельным многограннику T.

Теорема 5 (критерий существования чаши). *Чаша над окружением многогранника $T \in \mathfrak{T}$ существует тогда и только тогда, когда для многогранника T можно построить параллельный.*

Отметим, что, заменив понятие параллельного многогранника менее естественным образованием, легко получить критерий существования k-чаши для любого k.

Отметим также, что после того, как критерий был найден авторами, им сообщили, что для $n = 2$ и случая примитивных схождений этот критерий был известен как отдельный факт М.И. Штогрину, но нигде им, к сожалению, не был опубликован.

Пусть $n = 2$. Рассмотрим ограниченный многоугольник $T \in \mathfrak{T}$, примитивный в $\mathfrak{T}$. Будем называть внешним углом многоугольника T в его вершине V угол между стороной многоугольника T, содержащей вершину V, и выходящим из вершины V ребром разбиения $\mathfrak{T}$, не принадлежащим T. Обходя T по периметру, будем считать первый встреченный в вершине внешний угол нечетным, а второй – четным.

Теорема 6. *Для произвольного ограниченного примитивного в $\mathfrak{T}$ многоугольника $T \in \mathfrak{T}$ параллельный многоугольник и, тем самым, чаша существует тогда и только тогда, когда произведение синусов четных внешних углов равно произведению синусов нечетных внешних углов.*

Следствие. *Пусть многоугольник T ограничен и примитивен в $\mathfrak{T}$. Если многоугольник T и его корона (как комплекс) центрально-симметричны, то чаша многоугольника $T \in \mathfrak{T}$ существует.*

3.1. Будем говорить, что звезда $S(f^k)$ грани f^k разбиения $\mathfrak{T}$ задана в канонической форме, если уравнения несущих плоскостей всех ее $(n-1)$-мерных граней таковы, что существует выпуклый $(n-k)$-мерный дуальный к звезде многогранник D, т.е. многогранник, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Пусть $k \le m \le n$. Тогда m-мерные грани звезды и $(n-m)$-мерные грани многогранника D находятся во взаимно однозначном соответствии.

2) Каждая грань звезды ортогональна соответствующей ей грани многогранника D.

3) Длины ребер многогранника D равны длинам векторов нормалей, соответствующих уравнениям несущих плоскостей $(n-1)$-мерных граней звезды.

Назовем граф $\mathfrak{G}$, вложенный в E^n, дуальным графом к разбиению $\mathfrak{T}$, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют взаимно однозначные соответствия между вершинами графа $\mathfrak{G}$ и многогранниками разбиения, а также между ребрами графа $\mathfrak{G}$ и $(n-1)$-мерными гранями разбиения, причем эти соответствия естественным образом согласованы и ребра графа ортогональны соответствующим граням разбиения;

2) в указанных соответствиях каждой $(n-2)$-мерной грани разбиения отвечает цикл графа $\mathfrak{G}$, являющийся границей выпуклого многоугольника.

В работе [1] Максвелл изучал плоские фермы с попарно непересекающимися ребрами. Пусть такая ферма находится в статическом равновесии под воздействием набора внешних сил. Эту ситуацию можно геометрически изобразить, построив расширенный граф, т.е. граф фермы с пририсованными уходящими на бесконечность ребрами, отвечающими за направления действия внешних сил. Максвелл показал, что если этот расширенный граф не имеет самопересечений и дает разбиение плоскости на выпуклые многоугольники, то существует взаимный (ортогональный) ему граф, возможно, самопересекающийся. Кроме того, Максвелл доказал теорему, что этот граф является одномерным остовом дуального разбиения на выпуклые многоугольники – "convex reciprocal figure" – тогда и только тогда, когда расширенный граф является проекцией одномерного остова выпуклой полиэдральной поверхности. (О современной теории ферм и механизмов и ее связях с выпуклыми поверхностями см. [7].)

3.2. Справедливы следующие две теоремы, прямо обобщающие теорему Максвелла на n-мерный случай.

Теорема 7 ("прямая теорема Максвелла"). *Пусть разбиение $\mathfrak{T}$ имеет женератриссу; тогда для него существует дуальное разбиение на выпуклые многогранники и тем самым дуальный граф.*

Теорема 8 ("обратная теорема Максвелла"). *Пусть для разбиения $\mathfrak{T}$ существует дуальное разбиение на выпуклые многогранники; тогда разбиение $\mathfrak{T}$ имеет женератриссу.*

Такие условия существования женератриссы могут быть существенно ослаблены (теоремы 9 и 10).

Теорема 9. *Пусть разбиение $\mathfrak{T}$ имеет дуальный граф; тогда разбиение $\mathfrak{T}$ имеет и женератриссу.*

Теорема 10. *Пусть для звезды каждой $(n-3)$-мерной грани, $n > 2$, разбиения $\mathfrak{T}$ существует дуальный многогранник, все грани которого – треугольники. Тогда разбиение $\mathfrak{T}$ имеет женератриссу.*

4.1. Основы техники построения женератриссы. Для построения женератриссы мы использовали основную идею Вороного [3] переноса женератриссы по цепочке смежных по $(n-1)$-мерной грани многогранников разбиения. Такой процесс переноса женератриссы по чашам или по дуальным векторам заведомо не приводит к противоречию, если для разбиения $\mathfrak{T}$ выполнены условия одной из теорем 2, 4, 8, 9 или 10. При доказательстве последнего используется односвязность множества, полученного из n-мерного куба вычитанием достаточно малой окрестности $(n-3)$-мерного полиэдра, а также применяются идея лебегова числа покрытия и идея Ампера о доказательстве какого-либо свойства большого контура через представление его в виде суммы маленьких, для которых требуемое средство уже выполнено.

4.2. Назовем женератриссу параболической, если она описана вокруг эллиптического параболоида. Заметим, что разбиение $\mathfrak{T}$ может иметь не одну женератриссу, даже если их рассматривать лишь с точностью до эквивалентности. Например, нормальное разбиение n-мерного пространства на параллелепипеды имеет $(n-1)$-параметрическое семейство попарно неэквивалентных параболических женератрисс. Мы не знаем, может ли разбиение n-мерного пространства на выпуклые многогранники иметь более чем $(n-1)$-параметрическое семейство попарно неэквивалентных параболических женератрисс.

Знаменитые теоремы Вороного [3] и Житомирского [8], утверждающие аффинную эквивалентность некоторых разбиений пространства E^n на параллелоэдры разбиениям Вороного–Дирихле решеток, фактически являются теоремами существования для этих разбиений параболических женератрисс, с дальнейшим использованием многомерного аналога теоремы Лейбница о проекции пересечения двух касательных к параболоиду. Доказательства теорем состоят из двух частей. Главные части, посвященные построению женератриссы, различны в [3] и в [8]. Доказательства параболичности женератрисс в [3] и [8] одинаковы и лежат совсем в другом круге идей.

В качестве примера применения нашей теории покажем, как в ней доказывается существование женератриссы в случаях, рассмотренных Вороным и Житомирским.

Вороной [3] построил женератриссу для разбиения на примитивные (0-примитивные) параллелоэдры. В этом случае для звезды каждой вершины разбиения имеется дуальный симплекс. Следовательно, при $n > 2$ выполняются условия теоремы 10. Если же $n = 2$, то здесь, как известно, каждый примитивный параллелоэдр есть центрально-симметричный шестиугольник, и, применив следствие теоремы 6, мы получим существование чаши для каждого параллелоэдра. Далее, используя теорему 4, получим существование женератриссы для всего разбиения.

Житомирский [8] усилил теорему Вороного, потребовав от разбиения лишь $(n-2)$-примитивности. Здесь, как следует из работы Делоне [9], возможны лишь два типа схождений в $(n-3)$-мерных гранях: схождение, дуальное симплексу, и схождение, дуальное центрально-симметричному октаэдру. Далее, как и в отмеченном Житомирским случае $(n-3)$-примитивности, мы применяем теорему 10.

4.3. Рассмотрим еще один п р и м е р. Пусть имеется стандартное разбиение n-мерного пространства на кубы. Построим внутри каждого куба другой, гомотетичный ему с коэффициентом $0 < k < 1$ куб с тем же центром. Далее разобьем наш исходный куб на $2n + 1$ частей: центральный куб и $2n$ усеченных пирамид, основаниями каждой из которых служат $(n - 1)$-мерные грани большого и малого куба. Рассмотрим теперь разбиение $\mathfrak{T}$, элементами которого выступают малые кубы и многогранники, каждый из которых склеен из двух построенных пирамид, примыкающих друг к другу по общей $(n - 1)$-мерной грани большого куба. Покажем, как с помощью наших методов доказывается существование женератриссы для $\mathfrak{T}$. Соединим центр каждого многогранника $T \in \mathfrak{T}$ с центрами всех многогранников, граничащих с ним по $(n - 1)$-мерным граням. Легко видеть, что получившийся граф является дуальным к нашему разбиению. Согласно теореме 9 женератрисса разбиения $\mathfrak{T}$ существует. В случае, когда $k = 0.5$, очевидно, существует и параболическая женератрисса, а при других k нет. Заметим, что построенный нами граф является одномерным остовом разбиения пространства на многогранники двух сортов: симплексы и кубы с обрезанными углами (от каждой вершины отрезается симплекс с длинами ребер в половину длины ребра куба). Это разбиение дуально разбиению $\mathfrak{T}$.

5.1. Легко видеть, что проективное преобразование, переводящее сферу $(z - 1)^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$ в параболоид $z = x_1^2 + ... + x_n^2$ и оставляющее неподвижной плоскость $z = 0$, переводит выпуклый многогранник – полиэдральный шар (polyhedral bowl), описанный вокруг сферы, в выпуклую полиэдральную поверхность – "чашу" (polyhedral bowl), описанную вокруг параболоида. При этом преобразовании отображение проектирования поверхности полиэдрального шара на плоскость $z = 0$ из точки $(0, ..., 0, 1)$ переходит в отображение, осуществляющее вертикальное проектирование чаши на плоскость $z = 0$. Это замечание связывает лежащие в исследуемом направлении работы [10] и [11], в которых авторы использовали оценки сложности алгоритмов построения выпуклых оболочек в евклидовом пространстве для оценки сложности алгоритмов построения L-разбиений и разбиений Вороного–Дирихле.

6.1. Эта работа неоднократно обсуждалась на семинаре С.С. Рышкова по дискретной и наглядной геометрии в Московском университете. Авторы благодарны всем участникам этих обсуждений, а также Е.П. Барановскому за полезные советы и критические замечания.

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 93–01–168) и Международным научным фондом (грант № МЗД 000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell J.C.* // Phil. Mag. 1864. Ser. 4. № 27. P. 250–261.
2. *Maxwell J.C.* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1869–1872. № 26. P. 1–40.
3. *Вороной Г.Ф.* Собр. соч. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. Т. 2. С. 239–358.
4. *Ash P. et al.* In: Shaping Space: a Polyhedral Approach. Birkhunser Publ. House: Boston, Basic, 1988. P. 231–250.
5. *Gruber P.M., Ryskov (Ryshkov) S.S.* // Europ. J. Combinatorics. 1989. V. 10. P. 83–84.
6. *Crapo H., Ryan J.* // Structural topology. 1986. № 13. P. 33–68.
7. *Ковалев М.Д.* // Изв. АН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.
8. *Житомирский О.К.* // Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва. 1929. Т. 2. В. 2. С. 131–151.
9. *Delaunay B.* // Изв. АН. Сер. VII. Отд. физ.-мат. наук. 1929. С. 110–147.
10. *Brown K.Q.* // Inform. Proc. Lett. 1979. № 9. P. 223–228.
11. *Edelsbrunner H., Seidel R.* // Discrete and Comput Geometry. 1986. № 1. P. 25–44.