Математические заметки

том 49 выпуск 1 январь 1991

О ЧИСЛЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ МОДУЛЕЙ ОСОБЕННОСТЕЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И РЕАЛИЗАЦИЙ МАТРОИДОВ

В. А. Васильев, В. В. Серганова

Естественным разбиением пространства ростков гладких функций в точке является их разбиение на страты $\mu = \mathrm{const}$: это дискретная классификация, вдоль классов которой сохраняются многие важные топологические характеристики ростков (см. [1—3]). Параметры, различающие попарно не эквивалентные точки страта $\mu = \mathrm{const}$, называются модулями: они обобщают двойное отношение четверки прямых и модулярную кривую эллиптических кривых (и совпадают с ними в случае особенностей X_9 и P_8). Для всех известных ранее вещественных особенностей число их модулей равняется числу комплексных модулей их комплексификаций; мы доказываем, что это выполнено не всегда. Одновременно мы даем новый пример негладкого страта $\mu = \mathrm{const}$ (ср. [4]). Настоящая работа является, по-видимому, первым приложением к теории особенностей теории матроидов (см. [5, 6]).

1. Формулировки результатов. Обозначим через $\mathfrak{M}^2$ пространство всех ростков гладких функций $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, имеющих в 0 особенность. Пусть $f \in \mathfrak{M}^2$ — изолированная особенность, т. е. ее число Милнора $\mu(f)$ конечно (см. [1]). Рассмотрим множество всех ростков из $\mathfrak{M}^2$, имеющих то же число Милнора, что и f. Стратом $\mu = \mathrm{const}$ функции f называется связная компонента этого множества, содержащая f. На пространстве $\mathfrak{M}^2$ естественно действует группа D_0 ростков диффеоморфизмов $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$. D_0 — орбита функции f принадлежит ее страту $\mu = \mathrm{const}$, коразмерность орбиты в $\mathfrak{M}^2$ равна $\mu(f) - 1$ (см. [1]).

Собственной модальностью (*с. м.*) функции f называется коразмерность ее D_0-орбиты в страте $\mu = \mathrm{const}$, или, что то же самое, размерность пересечения страта $\mu = \mathrm{const}$ с произвольной $(\mu - 1)$-мерной трансверсалью к орбите в $\mathfrak{M}^2$.

Аналогичные понятия имеются для вещественных особенностей, вещественные аналоги пространства $\mathfrak{M}^2$ и группы D_0 обозначим $\mathfrak{M}^2_{\mathbf{R}}$, D_0^R. Таким образом, для аналитической особенности f: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ с $\mu(f) < \infty$ определены два числа — ее с. м. и с. м. ее комплексификации $f_{\mathbf{C}}$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Эти два числа

© В. А. Васильев, В. В. Серганова, 1991

называются соответственно вещественной и комплексной с. м. особенности f.

Вещественная с. м. не превосходит комплексной: это следует из того, что пространство $\mathfrak{M}^2_{\mathbf{R}}$ вещественных особенностей естественно вложено в $\mathfrak{M}^2$, и вблизи точки $f \in \mathfrak{M}^2_{\mathbf{R}}$ ее вещественный страт $\mu = \mathrm{const}$ — это пересечение комплексного страта $\mu = \mathrm{const}$ с плоскостью $\mathfrak{M}^2_{\mathbf{R}} \subset \mathfrak{M}^2$.

Для всех особенностей вещественных функций в пределах классификационных таблиц (см., например, [1]) эти два числа совпадают; согласно [7] то же верно для всех особенностей функций от $\leqslant 2$ переменных. Ниже мы приведем пример, доказывающий следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют вещественные особенности функций от* 3 *переменных, вещественные с. м. которых строго меньше комплексных.*

Еще одним важным показателем особенности f является ее модальность, т. е. локальная (вблизи точки $f \in \mathfrak{M}^2$) размерность пространства орбит действия группы D_0 на $\mathfrak{M}^2$ (см. [1]). У вещественных особенностей этот показатель вновь имеет вещественную и комплексную ипостаси. Вещественная модальность не превосходит комплексной, и в пределах таблиц [1] они совпадают. Проблема № 2 из известного вопросника [8] состоит в том, верно ли это всегда. Согласно [9], комплексная модальность совпадает с комплексной с. м., поэтому из нашего примера вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Либо комплексная модальность может быть строго больше вещественной, либо вещественная модальность может быть больше вещественной собственной модальности.*

Совпадение вещественной модальности и вещественной с. м. аналогично [9] следовало бы из полунепрерывности вещественной с. м., поэтому получаем еще следующую альтернативу.

Следствие 2. *Либо комплексная модальность вещественной особенности может быть строго больше вещественной, либо вещественная с. м. не полунепрерывна.*

Мы полагаем, что в нашем случае имеет место первое.

Замечание. Наш пример одновременно дает отрицательный ответ на вопрос № 1 из [8] (о гладкости страта $\mu = \mathrm{const}$, первый контрпример к этой проблеме был построен в [4]). Это следует из того, что у вещественного (т. е. сохраняемого комплексным сопряжением) алгебраического подмножества в $\mathbf{C}^{\mu-1}$ вблизи неособых вещественных точек совпадают комплексная размерность и размерность пересечения с $\mathbf{R}^{\mu-1}$.

Для любой из табличных комплексных особенностей существует вещественная особенность, лежащая в том же страте $\mu = \mathrm{const}$ в $\mathfrak{M}^2$; согласно [10, 11] то же верно для всех особенностей от $\leqslant 2$ переменных.

ТЕОРЕМА 2. *Существует комплексная особенность функции от* 3 *переменных, страт* $\mu = \mathrm{const}$ *которой не пересекается с* $\mathfrak{M}^2_{\mathbf{R}}$.

2. Матроиды. Примеры, доказывающие обе наши теоремы, основаны на понятии матроида, обобщающем теорию линейной зависимости.

Определение (см. [5, 6]). Матроидом называется конечное множество I, снабженное целочисленной функцией r (функцией ранга) на множестве 2^I всех подмножеств I такой, что $0 \leqslant r(J) \leqslant$ (мощность подмножества J) для всех $J \subset I$; $r(J_1) \leqslant r(J_2)$ при $J_1 \subset J_2$; $r(J_1 \cap J_2) + r(J_1 \cup J_2) \leqslant r(J_1) + r(J_2)$ для всех $J_1, J_2 \subset I$. Максимальное значение $r(I)$ функции r называется рангом матроида.

Основной запас матроидов получается следующим образом. Пусть F — поле и $e_1, \ldots, e_d$ — конечное множество прямых (или, в двойственном описании, гиперплоскостей) в F^n. Значение функции ранга на любом подмножестве прямых (гиперплоскостей) равно размерности их линейной оболочки (соответственно, коразмерности их пересечения). Матроид ранга n называется *представимым* над F, если существует система прямых (гиперплоскостей) в F^n, реализующая матроид, изоморфный данному.

Оба наши примера основаны на алгебраической теории матроидов, в частности, на реализации алгебраических уравнений посредством матроидов (ср. [12]). Так, пример к теореме 2 реализует уравнение $x^2 = -1$, а пример к теореме 1 — уравнение $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0$.

Переход от матроидов к функциям задается следующей конструкцией. Пусть фиксирован матроид A ранга 3, реализуемый наборами из d плоскостей в $\mathbf{C}^3$.

Определение. Функция $f\colon (\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ принадлежит матроиду A, если она имеет вид $f = \varphi_d + \varphi_{d+1} + \varphi_{>d+1}$, причем однородная форма φ_d является произведением линейных форм, ядра которых реализуют матроид A, множество нулей формы φ_{d+1} в $\mathbf{C}P^2$ не содержит кратных точек множества $\{\varphi_d = 0\}$, а $\varphi_{>d+1}$ — сумма мономов степени $> (d+1)$.

3. Пример для теоремы 2.

Предложение 1 (см. [13]). *Существует матроид ранга* 3, *представимый над* $\mathbf{C}$, *но не представимый над* $\mathbf{R}$.

Реализуем такой матроид системой плоскостей в $\mathbf{C}^3$ (или, что то же самое, системой прямых в $\mathbf{CP}^2$). В описании матроида мы будем упоминать только все наборы из 3 или более прямых, пересекающихся в одной точке; матроид ранга 3 этим полностью определяется.

Первые четыре прямые находятся в общем положении, а следовательно, фиксируют аффинную систему координат в $\mathbf{C}P^2$ такую, что e_1 — это несобственная прямая, e_2 — ось $x = 0$, e_3 — $\{y = 0\}$, а e_4 проходит через точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$, e_5 проходит через точку $(1, 0)$, обозначим через α значение координаты y в точке ее пересечения с осью $x = 0$. Прямая e_6 проходит через эту точку $(0, \alpha)$ и параллельна e_4 (на языке матроидов, это означает, что $r(e_6, e_2, e_5) = r(e_6, e_1, e_4) = 2$). $e_7 \ni (\alpha, 0)$ и $e_7 \parallel e_5$, т. е. $r(e_7, e_6, e_3) = r(e_7, e_1, e_5) = 2$. Следовательно, $e_7 \cap e_2 =$

$= (0, \alpha^2)$. $e_8 \ni (0, \alpha^2)$ и $e_8 \parallel e_4 \parallel e_6$, т. е. $r(e_8, e_7, e_2) = r(e_8, e_4, e_6, e_1) = 2$; $e_9 \ni (1, 0)$ и $e_9 \ni (0, \alpha^2)$, т. е. $r(e_9, e_3, e_4, e_5) = r(e_9, e_2, e_7, e_8) = 2$; $e_{10} \ni (0, 1)$ и $e_{10} \ni (\alpha^2, 0)$, т. е. $r(e_{10}, e_2, e_4) = r(e_{10}, e_3, e_8) = 2$. Наконец, потребуем, чтобы прямые e_9 и e_{10} были параллельны, т. е. $r(e_9, e_{10}, e_1) = 2$. Это требование эквивалентно условию $\alpha^4 = 1$. Но, поскольку $e_5 \neq e_4$ и $e_7 \neq e_4$, то $\alpha^2 \neq 1$, и следовательно, $\alpha^2 = -1$, т. е. точка пересечения прямых e_2, e_5 не может быть вещественной одновременно с точками $e_2 \cap e_3$, $e_2 \cap e_4$, $e_3 \cap e_4$, и предложение доказано.

Отметим, что функция, принадлежащая построенному матроиду A, может оказаться вещественной, так как A можно реализовать системой плоскостей в $\mathbf{C}^3 \supset \mathbf{R}^3$ такой, что комплексное сопряжение сохраняет их объединение (не сохраняя каждую прямую в отдельности).

Определение. Матроид (I, r) не имеет кратных элементов, если для любых $i \neq j \in I$, $r(i \cup j) = 2$.

Предложение 2. *Существует представимый над* $\mathbf{C}$ *матроид ранга* 3 *без кратных элементов, который нельзя реализовать набором плоскостей в* $\mathbf{C}^3$, *объединение которых сохраняется комплексным сопряжением.*

Пусть A — матроид из доказательства предложения 1. Система прямых в $\mathbf{C}P^2$, реализующая A, имеет ровно три четырехкратные точки: в наших координатах это точки $(1, 0)$, $(0, \alpha^2)$ и несобственная точка $(1:-1) \in e_1$.

ЛЕММА. *Матроид A нельзя реализовать системой прямых в* $\mathbf{C}P^2$, *объединение которых сохраняется комплексным сопряжением, а все три четырехкратные точки лежат в* $\mathbf{R}P^2$.

Действительно, пусть такая реализация существует. Тогда прямые e_4, e_8, e_9, содержащие по две из этих точек, также вещественны. Из наших 10 прямых лишь одна e_{10} не содержит ни одной из этих точек, следовательно, и она вещественна. Вещественность e_{10} и e_8 влечет вещественность точки (e_3, e_8, e_{10}), а следовательно, и прямой e_3. Рассуждая далее аналогично, в конце получаем, что все прямые $e_1, \ldots, e_{10}$ вещественны вопреки предложению 1.

Теперь добавим к матроиду A три прямые, из которых одна проходит через одну из наших четверных точек, а две остальные — через другую (так что делают эти точки соответственно пятикратной и шестикратной), с остальными же прямыми вновь добавленные имеют пересечения лишь в некратных точках. Допустим, что объединение полученных 13 прямых сохраняется комплексным сопряжением. При этом три точки старших кратностей (4, 5 и 6) переходят сами в себя, а следовательно, вещественны. Легко видеть, что сопряжение не может переставить какую-либо из трех добавленных прямых с одной из старых десяти, и предложение 2 вытекает из леммы 1.

Теперь теорема 2 приобретает следующую конкретизацию.

Предложение 3. *Если матроид ранга* 3 *удовлетворяет условиям предложения* 2, *то любая принадлежащая ему функция удовлетворяет утверждению теоремы* 2.

Доказательство этого предложения находится в п. 5.

4. Пример для теоремы 1. Пусть фиксирован d — элементный матроид A ранга n и F — поле. Обозначим через (A, F) множество всевозможных наборов из d гиперплоскостей в F^n, реализующих A. Группа $\mathrm{GL}(n, F)$ естественно действует на (A, F). Аналогично предыдущему, собственной модальностью точки $\lambda \in (A, F)$ называется коразмерность ее орбиты в ее связной компоненте иножества (A, F). Если $F = R$, то определены как ее с. м., так м с. м. ее комплексификации $\lambda_{\mathbf{C}} \in (A, \mathbf{C})$; эти числа будем называть вещественной и комплексной с. м. точки λ.

ТЕОРЕМА 3. *Существует матроид A ранга 3 без кратных элементов, представимый над* $\mathbf{R}$ *и такой, что*

а) *у всех наборов плоскостей в* $\mathbf{R}^3$, *реализующих матроид A, их вещественные с. м. меньше комплексных и* $\dim_{\mathbf{R}}(A, \mathbf{R}) < \dim_{\mathbf{C}}(A, \mathbf{C})$;

б) *если некоторый набор плоскостей в* $\mathbf{C}^3$ *реализует матроид A и комплексное сопряжение σ сохраняет объединение этих плоскостей, то σ сохраняет и каждую из этих плоскостей в отдельности.*

В нашем примере пространством модулей множества $(A, \mathbf{C})$ относительно действия $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ является некоторое открытое по Зарисскому подмножество Λ множества $\{x = (x_1, \ldots, x_9) \in \mathbf{C}^9 \mid (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 0\}$, причем $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ — орбита, соответствующая точке $t \in \Lambda$, содержит набор плоскостей, являющихся комплексификациями вещественных, тогда и только тогда, когда t принадлежит множеству $\Lambda \cap \mathbf{R}^9$; это множество непусто. Этот пример принадлежит В. В. Сергановой.

При описании матроида нам будет удобно пользоваться его двойственной реализацией: элементам матроида будут соответствовать точки в $\mathbf{C}P^2$, а множествам ранга 2 — прямые. Элементы матроида обозначаются O, $a_1, \ldots, a_8$, $b_1, \ldots, b_7$, $c_1, \ldots, c_6$, $d_1, \ldots, d_8$, $e_1, f_1, \ldots, f_5$, $\theta_1, \ldots, \theta_{23}$. Особой прямой (о. п.) назовем любое максимальное множество элементов, имеющее ранг 2 и содержащее не менее 3 элементов. Для задания матроида ранга 3 достаточно перечислить все о. п. Вот они:

$$\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_{23}\},\ a = \{\theta_2, O, a_1, \ldots, a_8\},\ b = \{\theta_1, O, b_1, \ldots, b_7\},$$
$$c = \{\theta_1, c_1, \ldots, c_6\},\ d = \{\theta_1, d_1, \ldots, d_8\},\ f = \{\theta_2, f_1, \ldots, f_5\},$$
$$\{\theta_2, c_3, e_1\},\ \{\theta_3, a_2, b_1\},\ \{\theta_3, a_3, b_4\},\ \{\theta_3, a_4, b_5\},$$
$$\{\theta_3, a_7, b_7\},\ \{\theta_3, c_4, e_1\},\ \{\theta_4, b_1, a_3\},\ \{\theta_4, b_4, a_5\},$$
$$\{\theta_5, b_1, a_4\},\ \{\theta_5, b_5, a_6\},\ \{\theta_6, O, f_1\},\ \{\theta_6, a_5, f_2\},$$
$$\{\theta_6, a_7, f_3\},\ \{\theta_7, O, f_2\},\ \{\theta_7, a_6, f_5\},\ \{\theta_8, O, f_3\},$$
$$\{\theta_8, a_4, f_4\},\ \{\theta_9, O, f_4\},\ \{\theta_9, a_4, f_5\},\ \{\theta_{10}, O, d_4\},$$
$$\{\theta_{10}, b_6, d_6\},\ \{\theta_{11}, O, d_6\},\ \{\theta_{11}, b_6, d_8\},\ \{\theta_{12}, O, d_2\},$$
$$\{\theta_{12}, b_4, d_3\},\ \{\theta_{13}, O, d_1\},\ \{\theta_{13}, b_5, d_2\},\ \{\theta_{13}, b_7, d_4\},$$
$$\{\theta_{14}, b_2, c_3\},\ \{\theta_{14}, b_3, c_4\},\ \{\theta_{15}, O, c_1\},\ \{\theta_{15}, b_1, c_2\},$$

$\{\theta_{16}, c_1, b_1\}$, $\{\theta_{16}, c_2, b_2\}$, $\{\theta_{17}, O, c_3\}$, $\{\theta_{17}, a_1, e_1\}$,
$\{\theta_{18}, c_1, d_1\}$, $\{\theta_{18}, c_5, d_3\}$, $\{\theta_{18}, c_6, d_5\}$, $\{\theta_{19}, c_1, d_3\}$,
$\{\theta_{19}, c_5, d_5\}$, $\{\theta_{20}, c_1, d_5\}$, $\{\theta_{20}, c_6, d_7\}$, $\{\theta_{21}, c_1, d_7\}$,
$\{\theta_{21}, c_6, d_8\}$, $\{\theta_{22}, a_1, b_3\}$, $\{\theta_{22}, a_8, b_6\}$, $\{\theta_{23}, a_1, b_1\}$,
$\{\theta_{23}, a_2, b_2\}$, $\{\theta_3, a_8, b_3\}$.

Пусть мы имеем некоторую реализацию этого матроида A набором точек в $\mathbf{C}P^2$. Тогда проективным преобразованием можно перевести прямую θ в несобственную прямую, а точки o, a_2 и b_1 в точки с аффинными координатами (0, 0), (0, 1) и (1, 0). Наша реализация матроида A следующим образом определяет набор чисел $x_1, \ldots, x_9$: в нашей системе координат $a_3 = (0, x_1)$, $a_4 = (0, x_2)$, $c_1 = (x_3, x_4)$, $c_3 = (x_5, x_4)$, $d_1 = (x_6, x_7)$, $f_1 = (x_8, x_9)$. Тогда координаты остальных точек имеют следующий вид:

$$a_1 = (0, 1/2),\ a_5 = (0, x_1^2),\ a_6 = (0, x_2^2),$$
$$a_7 = (0, x_1^2 + x_2^2 - 2x_2),\ a_8 = (0, 5/2),$$
$$b_2 = (2, 0),\ b_3 = (5/2, 0),\ b_4 = (x_1, 0),$$
$$b_5 = (x_2, 0),\ b_6 = (25/2, 0),\ b_7 = (6x_1 + 6x_2 - 25,\ 0),$$
$$c_2 = (x_3 + 1, x_4),\ c_4 = (x_5 + 1/2, x_4),$$
$$c_5 = (x_1 + x_2 + x_3, x_4),\ c_6 = (2(x_1 + x_2) + x_3, x_4),$$
$$e_1 = (x_5, x_4 + 1/2),\ d_2 = (x_2 + x_6, x_7),$$
$$d_3 = (x_2 + x_1 + x_6, x_7),\ d_4 = (x_6 + 6x_2 + 6x_1 - 25, x_7),$$
$$d_5 = (x_6 + 2x_2 + 2x_1, x_7),$$
$$d_7 = (x_6 + 4x_2 + 4x_1, x_7),$$
$$d_6 = (x_6 + 6(x_2 + x_1) - 25/2, x_7),$$
$$d_8 = (x_6 + 6(x_2 + x_1), x_7),$$
$$f_2 = (x_8, x_9 + x_1^2),\ f_3 = (x_8, x_9 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2),$$
$$f_4 = (x_8, x_9 + x_1^2 + x_2^2 - x_2),$$
$$f_5 = (x_8, x_9 + x_1^2 + x_2^2).$$

Однородные координаты точек θ_i немедленно получаются отсюда и из списка о. п.: например, $\theta_1 \in b \ni \{O, b_1\}$, следовательно, $\theta_1 = (1 : 0)$.

Поскольку прямая $\{\theta_3, a_7, b_7\}$ параллельна прямой $\{\theta_3, a_2, b_1\}$, имеем $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 6(x_1 + x_2) - 25$ или, эквивалентно, $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 0$. Это единственное соотношение: любой набор таких параметров x по только что выписанным формулам определяет набор точек, удовлетворяющий нашим условиям линейной зависимости, причем при общих значениях x — только этим условиям.

Для доказательства утверждения а) теоремы остается показать, что при общих $x_3, \ldots, x_9$ и $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ не возникает

новых о. п. и никакие из уже перечисленных о. п. не захватывают точек, не предусмотренных в списке. Последнее проверяется непосредственно: достаточно положить $x_5 = \pi$, $x_3 = \pi \cdot \sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{3}$, $x_6 = \sqrt{5}$, $x_7 = \sqrt{7}$, $x_8 = \pi^2$, $x_9 = \pi^3$. Допустим, что какие-то три точки z_1, z_2, z_3 из нашего набора образовали новую о. п. Тогда либо одна из них — это e_1, либо эти три точки лежат на 6 прямых θ, a, b, c, d, f. Пусть $z_1 = e_1$. Параметр x_5 влияет на положение лишь трех точек: e_1, c_3, c_4. Поэтому если $z_2 \cup z_3 \neq c_3 \cup c_4$, то при общих значениях x_5 точки e_1, c_3, c_4 не лежат на одной прямой. Но $z_2 \cup z_3 \neq c_3 \cup c_4$, так как через любые две из точек e_1, c_3, c_4 уже проходит о. п. Следовательно, случай $z_1 = e_1$ нам не страшен. Пусть теперь z_1, z_2, z_3 лежат на прямых θ, a, b, c, d, f. Но $a \parallel f$, $b \parallel c \parallel d$ и расстояния между a и f, b и c, c и d находятся в нашем распоряжении. Следовательно, все три точки z_1, z_2, z_3 не могут при всех $x \in \Lambda$ лежать лишь на этих пяти прямых, и одна из них (скажем, z_1) лежит на прямой θ, а остальные две — не лежат. Тогда прямая (z_2, z_3) параллельна одной из перечисленных о. п. Непосредственный перебор вариантов показывает, что при всех $x \in \Lambda$ такого не может быть. Утверждение б) теоремы 3 доказывается точно так же, как лемма 1 выше. Теорема доказана.

Предложение 4. *Если матроид ранга* 3 *удовлетворяет условиям из теоремы* 3, *то любая принадлежащая ему функция удовлетворяет утверждению теоремы* 1.

5. Предложения 3, 4 немедленно вытекают из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть A — матроид ранга* 3 *без кратных элементов. Тогда*

а) *все особенности* $(\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, *принадлежащие A, имеют одно и то же число Милнора*;

б) *страт* $\mu = \mathrm{const}$ *любой такой особенности лежит в замыкании множества особенностей, принадлежащих A.*

Замечание. В действительности, в п. б) можно заменить «лежит в замыкании множества» на «состоит лишь из», но доказательство этого чуть сложнее и не приводится.

Утверждение а) леммы 2 является частным случаем следующего.

ЛЕММА 3. *Пусть функция f:* $(\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *имеет вид* $f = \varphi_d + \varphi_{d+1}, + \ldots$, *причем кривая* $\{\varphi_d = 0\} \subset \mathbf{C}P^2$ *имеет только изолированные особые точки, и ни одна из этих точек не принадлежит кривой* $\{\varphi_{d+1} = 0\}$. *Тогда число Милнора функции f равно* $(d-1)^3$ *плюс сумма чисел Милнора всех особых точек кривой* $\{\varphi_d = 0\}$.

В частности, если эта кривая — набор прямых, то каждая точка k-кратного их пересечения добавляет в $\mu(f)$ слагаемое $(k-1)^2$.

Эта лемма доказывается прямым применением метода А'Кампо вычисления числа Милнора через разрешение особенностей [13].

Нам остается доказать п. б) леммы 2.

ЛЕММА 4. *Вдоль страта* $\mu = \mathrm{const}$ *не изменяется степень функции (т. е. минимальная степень мономов, входящих в ее тейлоровское разложение с ненулевыми коэффициентами).*

Это доказано в [14], см. также [15, теорема 4].

ЛЕММА 5. *Множество особенностей* $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, *k-струи которых такие же, как у невырожденных однородных форм степени k, образует страт* $\mu = \mathrm{const}$ $(=(k-1)^2)$.

Это — частный случай более общего утверждения, доказанного в [7]: любой страт $\mu = \mathrm{const}$ особенностей плоских кривых состоит из всех кривых, имеющих одинаковое число локальных неприводимых компонент, одинаковые разложения Пюизе соответствующих компонент и одинаковые порядки касания соответствующих пар компонент.

Пусть теперь A — реализуемый над $\mathbf{C}$ матроид ранга 3 и мощности d без кратных элементов. Пусть $\{A\}$ — это множество однородных форм $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$, являющихся d-струями функций, принадлежащих A. Обозначим через $[A]$ множество однородных форм φ: $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ степени d таких, что множество особых точек кривой $\{\varphi = 0\} \subset \mathbf{C}P^2$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством кратных точек множества $\{\psi = 0\}$ для любого $\psi \in \{A\}$, причем это соответствие сохраняет страты $\mu = \mathrm{const}$: k-кратной точке $\{\psi = 0\}$ соответствует точка, вблизи которой кривая $\{\varphi = 0\}$ распадается на k локально неприводимых неособых компонент с разными касательными.

Из лемм 3, 4, 5 немедленно вытекает следующая

ЛЕММА 6. *Если f — функция, принадлежащая матроиду A ранга 3 без кратных компонент, то ее страт* $\mu = \mathrm{const}$ *принадлежит множеству функций вида* $\varphi_d + \varphi_{d+1} + \ldots$, *где* $\varphi_d \in [A]$.

ЛЕММА 7. *Пусть A — матроид ранга 3 без кратных компонент. Тогда в пространстве однородных форм степени d, вблизи любой точки $\psi \in \{A\}$ множество $[A]$ совпадает с множеством $\{A\}$.*

Действительно, легко видеть, что для любой формы $\varphi \in [A]$ достаточно близкой к $\psi \in \{A\}$ множество $\{\varphi = 0\} \subset \mathbf{C}P^2$ распадается в объединение d неприводимых компонент, находящихся во взаимно однозначном соответствии с прямыми множества $\{\psi = 0\}$ и имеющих такие же размерности взаимных пересечений. Но дивизор степени d в $\mathbf{C}P^n$ является суммой d дивизоров, только если все эти d дивизоров — гиперплоскости и лемма доказана.

Утверждение б) леммы 2) немедленно вытекает из этой леммы, это завершает доказательство теорем 1 и 2.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступило
01.08.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.

[2] Lê D. T., Ramanujam C. P. The invariance of Milnor numbers implies the invariance of the topological type // Amer. J. Math. 1976. V. 98. P. 67—68.
[3] Варченко А. Н. Комплексный показатель особости не меняется вдоль страта $\mu = \text{const}$ // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 1—12.
[4] Luengo I. The $\mu = \text{constant}$ stratum is not smooth. Preprint, 1985.
[5] Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
[6] Гельфанд И. М., Серганова В. В. Комбинаторные геометрии и страты тора на однородных компактных многообразиях // УМН. 1987. Т. 42, № 2. С. 107—134.
[7] Wahl J. Equinsingular deformations of plane algebraic curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 193. P. 143—170.
[8] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. Труды семинара С. Л. Соболева. 1976. № 1. С. 5—15.
[9] Габриэлов А. М. Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей // Функцион. анализ. 1974. Т. 8, № 2. С. 7—12.
[10] Гусейн-Заде С. И. Диаграммы Дынкина особенностей функций двух переменных // Функцион. анализ. 1974. Т. 8, № 4. С. 23—30.
[11] A'Campo N. Le groupe de monodromic du déploiement des singularités isolées de courbes planes // Math. Ann. 1975. V. 213, N 1. P. 1—32.
[12] Мнев Н. Е. О многообразиях комбинаторных типов проективных конфигураций и выпуклых многогранников // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 6. С. 1312—1314.
[13] A'Campo N. La fonction zeta d'une monodromie // Comm. Math. Helv. 1975. V. 50, N 2. P. 233—248.
[14] Teissier B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney // Astersque. 1973. N 7—8. P. 285—362.
[15] Габриэлов А. М., Кушниренко А. Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций // Функцион. анализ. 1974. Т. 9, № 4. С. 67—68.