A. L. Koldobskiy, The Fourier transform and convolution in the space l_∞, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 98–105

А. Л. Колдобский

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СВЕРТКА В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_1.

Рассмотрим сверточное уравнение $g(a)=(f*\mu)(a) = \int_E f(a-x)\,d\mu(x), \forall a\in E$, где f и g – заданные функции на сепарабельном банаховом пространстве E, а μ – неизвестная конечная борелевская мера на E. Мы считаем существование хотя бы одной такой меры μ заранее известным и хотим получить условия единственности решения, а также формулу для вычисления меры μ.

Если E – конечномерное пространство, а функции f и g можно рассматривать как распределения над пространством S быстро убывающих функций, то, как правило, удается доказать, что $\hat{g} = \hat{f}\cdot\hat{\mu}$ ($\hat{f}$ – преобразование Фурье распределения f). Тогда для проверки единственности решения достаточно убедиться в том, что $\hat{f}\neq 0$ на открытых множествах, а для получения формулы для вычисления $\hat{\mu}$ необходимо вычислить $\hat{f}$ и $\hat{g}$.

Нас, однако, будет интересовать бесконечномерный случай, когда преобразование Фурье непосредственно неприменимо. По аналогии с конечномерным случаем представляется естественным следующий подход. Пусть E_n – возрастающая последовательность подпространств в E, $\dim E_n = n$, $E = cl(\cup E_n)$. Пусть f_n, g_n и $\xi^{(n)}$ – сужения функций f, g и функционала $\xi\in E^*$ на подпространство E_n. Верно ли, что для любого $\xi\in E^*$

$$\hat{\mu}(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\hat{g}_n(\xi^{(n)})/\hat{f}_n(\xi^{(n)})), \qquad (1)$$

где $\hat{\mu}(\xi) = \int_E \exp(-i\langle\xi,x\rangle)\,d\mu(x)$ – характеристический функционал меры μ ?

В данной заметке мы дадим положительный ответ на этот вопрос в случае $E=\ell_1$, $f(x)=\|x\|^p$, $p\in\mathbb{R}$, $p\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ (в случае $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ решение уравнения может быть не единственным [1]).

Особый интерес к уравнению $g=\|x\|^p*\mu$ вызван связью с классическими обратными задачами теории потенциала (см., например, [2]), с задачей описания изометрий пространств L_p (см. [3 - 7]), и с задачей характеризации вероятностных распределений средними значениями некоторых статистик [8]

Оказалось, что для ряда банаховых пространств уравнение $g=\|x\|^p*\mu$ имеет единственное решение при всех $p>0$, кроме не более чем счетного числа исключительных показателей (см.обзор результатов в [9] или [10]). Например, в одномерном случае единственность имеет место при всех $p>0$, кроме четных [3-5] . Исключительными для бесконечномерных пространств L_q являются такие $p>0$, что $p/q\in\mathbb{N}$, [I] , [II] , а для конечномерных пространств ℓ_q^n - такие $p>0$, что $p/q\in\mathbb{N}$, и, кроме того, выполняется хотя бы одно из условий: $p/q<n$; q - четное число; q и $n+p$ - нечетные числа [I] .

При доказательстве теорем единственности для бесконечномерных пространств L_q и $C(K)$ в работах [I] и [II] использовались частные свойства норм в этих пространствах. Формул, позволяющих вычислять меру μ в этих работах получить не удалось. Подход, связанный с формулой (I), был впервые реализован в [I0] и [I2] для гильбертова пространства $E=\ell_2$. В этом случае сверточное уравнение $q=\|x\|^p*\mu$ имеет решение вида (I) при каждом $p\in\mathbb{R}$, $p\neq 0,2,4,\ldots$:

$$\hat{\mu}(\xi)=\lim_{n\to\infty}(\hat{q}_n(\xi^{(n)})\cdot\|\xi^{(n)}\|^{n+p}\Gamma(-p/2)/(2^{n+p}\pi^{n/2}\cdot\Gamma((n+p)/2)))$$

для каждого $\xi\in\ell_2^*=\ell_2$ (здесь в качестве E_n берется подпространство, порожденное первыми n координатами). Заметим, что при $p=0,2,4,\ldots$ единственности нет.

В [I3] этот результат обобщен на случай пространств $\ell_q, 1<q<2$: если $p\in\mathbb{R}$ и $p/q\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$, то

$$\hat{\mu}(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{q}_n(\xi^{(n)})\cdot\Gamma(-p/q)}{q\cdot(2\pi)^n\int_0^\infty t^{n+p-1}\prod_{k=1}^n\gamma_q(t\xi_k)\,dt} \qquad (2)$$

для любого $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\ell_q^*$ с ненулевыми координатами (здесь E_n выбираются так же, а γ_q - плотность стандартного q - устойчивого распределения на $\mathbb{R}$). Доказательство в [I3] использует то обстоятельство, что последовательность $((|x_1|^q+\ldots+|x_n|^q)^{p/q})^\wedge(\xi^{(n)})$ быстро растет для любого $\xi\in\ell_q^*$, $q>1$. Как мы покажем ниже, при $q=1$ эта последовательность при некоторых $\xi\in\ell_1^*=\ell_\infty$ может стремиться к бесконечности, а при некоторых - к нулю. Поэтому доказательство из [I3] не удалось применить в случае $q=1$. В данной заметке мы докажем, что формула (2) верна и в случае $q=1$ для любого $\xi\in\ell_\infty$ с ненулевыми координатами.

§ I. Преобразование Фурье нормы в пространстве ℓ_1^n .

Вычислим преобразование Фурье нормы в конечномерном пространстве ℓ_1^n .

Лемма I. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $p\in(-n,n)$, $p\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $\xi_k\neq 0$ для всех $k=1,\ldots,n$. Тогда

$$(\|x\|^p)^\wedge(\xi)=((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi)=\frac{2^n}{\Gamma(-p)}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}\,dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $-1<p<0$. Из определения Γ-функции следует, что

$$(|x_1|+\ldots+|x_n|)^p=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int_0^\infty y^{-1-p}\,e^{-y(|x_1|+\ldots+|x_n|)}\,dy\ .$$

При каждом фиксированном $y>0$

$$(e^{-y(|x_1|+\ldots+|x_n|)})^\wedge(\xi)=y^{-n}2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{y^2}{y^2+\xi_k^2}\ ,$$

поскольку $(e^{-|x|})^\wedge(t)=2/(1+t^2)$. Получаем теперь, что

$$((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi)=\frac{2^n}{\Gamma(-p)}\int_0^\infty\frac{y^{n-p-1}\,dy}{(y^2+\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(y^2+\xi_n^2)}=\qquad\text{(I.I)}$$

$$=\frac{2^n}{\Gamma(-p)}\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\ .$$

Последний интеграл сходится при $|p|<n$. Если мы допустим, что p принимает комплексные значения, то в обеих частях равенства (I.I) – аналитические функции от p в области $\{|\mathrm{Re}\,p|<n\ ,\ p\notin\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. В силу единственности аналитического продолжения формула (I.I), верна для всех $p\in(-n,n)$, $p\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ (детали применения аналитического продолжения при вычислении преобразования Фурье распределений см. в [I4, c.2I5]).

Пусть $\xi\in\ell_1^*=\ell_\infty$. Оценим поведение последовательности $((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi^{(n)})$ при $n\longrightarrow\infty$.

ЛЕММА 2. Пусть $p\in\mathbb{R}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\ell_\infty$ и $\xi_k\neq0$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда для любого числа $\delta\in(0,1/(\sqrt{2e}\,\|\xi\|))$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\delta^n\Big/\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}\,dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\right)=0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим элементарное неравенство $1/(1+z)\geqslant e^{-z}$ при $z\geqslant0$:

$$\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}\,dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\geqslant\int_0^\infty t^{n+p-1}\exp\Big(-t^2\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\,dt\ =$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{-(n+p)/2}\geq\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\cdot n^{-(n+p)/2}\cdot\|\xi\|^{-n-p}.$$

Остается использовать известную асимптотику для Γ - функции на бесконечности: $\lim \Gamma(z)/(z^{z-1/2}e^{-z})=\sqrt{2\pi}$.

ЛЕММА 3. Пусть $p\in\overrightarrow{\mathbb{R}}^{\infty}_{2}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\ell_\infty$, $\xi_k\neq 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда для любой последовательности неотрицательных чисел a_n, стремящейся к нулю при $n\longrightarrow\infty$, выполняется равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}e^{-a_n/t}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\Big/\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}=1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим отношение интегралов через b_n. Очевидно, что $b_n\leq 1$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Зафиксируем произвольное число $\delta\in(0,1/(\sqrt{2e}\,\|\xi\|))$. Тогда $\max\limits_{t>\delta}(1-\exp(-a_n/t))=$ $=1-\exp(-a_n/\delta)\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. Далее,

$$1-b_n\leq\left(\int_0^\delta\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\Big/\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\right)+$$

$$+\left((1-\exp(-a_n/\delta)\int_\delta^\infty\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\Big/\int_0^\infty\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}\right).$$

Числитель первой дроби не превосходит δ^{n+p}, и по лемме 2 первая дробь стремится к нулю. Вторая дробь не превосходит $1-\exp(-a_n/\delta)$ и, следовательно, при $n\longrightarrow\infty$ также стремится к нулю. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Покажем, что в зависимости от выбора функционала $\xi\in\ell_\infty$ последовательность $((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi^{(n)})$ может стремиться как к нулю, так и к бесконечности. Действительно, рассмотрим постоянную последовательность $\xi_k=a$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда из леммы I и формулы из [I5,c.I6I] следует, что

$$((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi^{(n)}) = \frac{2^n}{\Gamma(-p)}\int_0^\infty \frac{t^{n+p-1}\,dt}{(1+t^2a^2)^n} =$$

$$= a^{-n-p}\cdot\frac{2^{n-1}\,\Gamma((n+p)/2)\cdot\Gamma((n-p)/2)}{\Gamma(-p)\,\Gamma(n)} .$$

Из приведенной в лемме 2 ассимптотики для Γ -функции вытекает, что главным членом, определяющим поведение последовательности при $n\to\infty$, является a^{-n}. При $a>1$ последовательность стремится к нулю, а при $a<1$ – к бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выражение для преобразования Фурье степени нормы в пространстве ℓ_1^n можно привести к более удобному для вычислений виду. Пусть $n-1<p<n$, и предположим, что все координаты вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ различны и отличны от нуля. Тогда для любого $y>0$

$$\frac{1}{(y^2+\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(y^2+\xi_n^2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{y^2+\xi_k^2}\prod_{j\neq k}\frac{1}{\xi_j^2-\xi_k^2} .$$

Используя формулу из [I5,с.I6I] и равенство (I.I), получим:

$$((|x_1|+\ldots+|x_n|)^p)^\wedge(\xi) = \frac{2^n}{\Gamma(-p)}\int_0^\infty \frac{y^{n-p-1}\,dy}{(y^2+\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(y^2+\xi_n^2)} =$$

$$= \frac{2^n}{\Gamma(-p)}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod\limits_{j\neq k}(\xi_j^2-\xi_k^2)}\cdot\int_0^\infty \frac{y^{n-p-1}\,dy}{y^2+\xi_k^2} =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\Gamma(-p)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{n-p}{2}\right)\sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^{n-p-2}}{\prod\limits_{j\neq k}(\xi_j^2-\xi_k^2)} .$$

В силу единственности аналитического продолжения эта формула остается верной при всех значениях p, обеспечивающих аналитичность Γ - функции, а именно при таких p, что числа $-p$, $(n-p)/2$ и $1-(n-p)/2$ не равны $0, -1, -2, \ldots$.

§ 2. Решение сверточного уравнения.

Рассмотрим уравнение $q=\|x\|^p * \mu$ в пространстве ℓ_1. При $p>0$ мы предполагаем, что $\int_{\ell_1}(1+\|x\|^p)\,d\mu(x)<\infty$, а при $p<0$, что $\mu(\ell_1)<\infty$. Тогда при $p>0$ функция

q принимает конечные значения во всех точках пространства ℓ_1. При $p<0$ сужения функции q на подпространства размерности $n>-p$ являются локально суммируемыми функциями относительно меры Лебега на этих подпространствах.

Пусть e_i, $i\in\mathbb{N}$, – стандартный базис в пространстве ℓ_1, $E_n=span(e_1,\ldots,e_n)$. Для каждого $x=\sum\limits_1^\infty x_i e_i\in\ell_1$ мы обозначим через $x^{(n)}=\sum\limits_1^n x_i e_i$ проекцию x на E_n. Через $\xi^{(n)}$ обозначаем сужение функционала $\xi\in\ell_1^*=\ell_\infty$ на E_n, $q_n=q/E_n$.

При $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ решение уравнения $q=\|x\|^p*\mu$ может быть не единственным [I]. При всех остальных значениях $p\in\mathbb{R}$ решение единственно и определяется следующей формулой:

ТЕОРЕМА: Пусть $p\in\mathbb{R}$, $p\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда для любого функционала $\xi\in\ell_\infty$ с ненулевыми координатами

$$\hat{\mu}(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{q}_n(\xi^{(n)})}{(\|x^{(n)}\|^p)^\wedge(\xi^{(n)})}=\lim_{n\to\infty}\hat{q}_n(\xi^{(n)})\cdot\Gamma(-p)/(2^n\int\limits_0^\infty\frac{t^{n+p-1}dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^2\xi_n^2)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $x\in\ell_1$, число $n\in\mathbb{N}$ и предположим сначала, что $-1<p<0$. Вычислим преобразование Фурье функции $\|x-a\|^p$ от переменной $a\in E_n$.

Так же, как в лемме I, используем представление нормы:

$$\|x-a\|^p=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int\limits_0^\infty y^{-1-p}e^{-y\|x-a\|}\,dy\ .$$

Для каждого фиксированного $y>0$ преобразование Фурье функции $exp(-y\|x-a\|)$ от переменной a равно

$$(exp(-y\|x-a\|))^\wedge(\zeta)=y^{-n}2^n\prod_{k=1}^n\frac{y^2}{y^2+\zeta_k^2}\,e^{-y\|x-x^{(n)}\|}\cdot e^{-i<x^{(n)},\zeta>}$$

для каждого $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\mathbb{R}^n$. Далее, если $\zeta_k\neq 0$, $k=1$, ..., n, то

$$(\|x-a\|^p)^\wedge(\zeta)=\frac{2^n}{\Gamma(-p)}e^{-i<x^{(n)},\zeta>}\int\limits_0^\infty\frac{y^{n-p-1}e^{-y\|x-x^{(n)}\|}\,dy}{(y^2+\zeta_1^2)\cdot\ldots\cdot(y^2+\zeta_n^2)}= \tag{2.I}$$

$$= \frac{2^n}{\Gamma(-p)} e^{-i\langle x^{(n)},\zeta\rangle} \int\limits_0^\infty \frac{t^{n+p-1} e^{-\|x-x^{(n)}\|/t}\, dt}{(1+t^2\zeta_1^2)\cdot \ldots \cdot (1+t^2\zeta_n^2)} .$$

Как и в лемме I, в силу единственности аналитического продолжения равенство (2.I) верно для любого $p \in (-n, n)$, $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Интегрируя (2.I) по мере μ, получим

$$\hat{g}_n(\zeta) = \frac{2^n}{\Gamma(-p)} \int\limits_{\ell_1} e^{-i\langle x^{(n)},\zeta\rangle} \int\limits_0^\infty \frac{t^{n+p-1} e^{-\|x-x^{(n)}\|/t}\, dt}{(1+t^2\zeta_1^2)\cdot \ldots \cdot (1+t^2\zeta_n^2)} \cdot d\mu(x) . \qquad (2.2)$$

Рассмотрим теперь произвольное число $p \in \mathbb{R}$, $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, и произвольный элемент $\xi \in \ell_\infty$, $\xi_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Для каждого такого $n \in \mathbb{N}$, что $|p| < n$, положим $\zeta = \xi^{(n)}$ в формуле (2.2) и поделим обе части равенства (2.2) на число $(\|x^{(n)}\|^p)^\wedge(\xi^{(n)})$:

$$\frac{\hat{g}_n(\xi^{(n)}) \cdot \Gamma(-p)}{2^n \int\limits_0^\infty \frac{t^{n+p-1}\, dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot \ldots \cdot (1+t^2\xi_n^2)}} = \int\limits_{\ell_1} e^{-i\langle x^{(n)},\xi^{(n)}\rangle} \cdot \frac{\int\limits_0^\infty \frac{t^{n+p-1} e^{-\|x-x^{(n)}\|/t}\, dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot \ldots \cdot (1+t^2\xi_n^2)}}{\int\limits_0^\infty \frac{t^{n+p-1}\, dt}{(1+t^2\xi_1^2)\cdot \ldots \cdot (1+t^2\xi_n^2)}} d\mu(x).$$

Дробь под знаком интеграла в правой части не превосходит I и по лемме 3 стремится к I при $n \to \infty$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости правая часть стремится к $\hat{\mu}(\xi)$ при $n \to \infty$, что и доказывает теорему.

Литература

I. Горин Е.А., Колдобский А.Л. О потенциалах мер в банаховых пространствах. Сиб.мат.ж., 1987. т.28, № I, с.65–80.

2. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М., 1966.

3. Плоткин А.И. Продолжение L_p -изометрий. В кн.: Исследование по линейным операторам и теории функций. П. Зап. науч.семин.ЛОМИ, 1971, т.22. с.103–129.

4. Плоткин А.И. Алгебра, порожденная операторами сдвига, и L_p-нормы. Функциональный анализ. Ульяновск, 1976, № 12,

с.II2-I2I.

5. R u d i n W. L_p-isometries and equimeasurability. Indiana Univ.Math.J. 1976. vol.25, p.215-228.
6. H a r d i n C.D. Isometries on subspaces of L_p. Indiana Univ.Math.J., 1981, vol.30, p.449-465.
7. К о л д о б с к и й А.Л. Изометрии в пространствах $L_p(X;L_q)$ и равноизмеримость. Известия Вузов. Математика, I989, № 3, с.25-34.
8. З и н г е р А.А., К а к о с я н А.В., К л е б а н о в Л.Б. Характеризация распределений средними значениями статистик и некоторые вероятностные метрики. Проблемы устойчивости стохастических моделей: Труды семинара. М.: ВНИИСИ, I989, с.47-55.
9. K o l d o b s k i i A.L. Inverse problem for potentials of measures in Banach spaces. Prob.Theory and Math.Stat.Proc. of the Fifth Vilnius Conf. Vilnius: Mokslas. 1989, p.627-637.
IO. K o l d o b s k i i A.L. Convolution equations in certain Banach spaces. Proc.Amer.Math.Soc., 1991, v.111, p.755-765.
II. L i n d e W. Uniqueness theorems for measures in L_2 and $C_0(\Omega)$. Math.Ann., 1986, v.274, p.617-626.
I2. К о л д о б с к и й А.Л. Обратная задача для потенциалов мер в гильбертовом пространстве. В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. XI. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I989, т.I77, с.73-77.
I3. K o l d o b s k i i A.L. The Fourier transform technique for convolution equations in the infinite dimensional ℓ_q-spaces. Math.Ann., to appear.
I4. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., I959,
I5. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм. рядов и произведений. М., I95I.