Ю.А.Давыдов

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ТИПА СУПРЕМУМА В РЕШЕТЧАТОМ СЛУЧАЕ

Пусть $(\xi_n(t))$, $t\in[a,b]$, $n=1,2,\ldots$, - последовательность случайных процессов на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, реализации которых с вероятностью 1 принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}=\mathbb{D}[a,b]$. Предположим, что P_n - распределения этих процессов в $\mathbb{D}$, - слабо сходятся к P - распределению некоторого предельного процесса $\xi(t)$. Для измеримого функционала f на $\mathbb{D}$ символами $P_n f^{-1}$, Pf^{-1} обозначаются распределения случайных величин $f(\xi_n(\cdot))$, $f(\xi(\cdot))$.

В настоящей работе исследуется предельное поведение в смысле сходимости по вариации распределений $P_n f^{-1}$, $P_n g^{-1}$ в том случае, когда

$$f(x)=\sup_{[a,b]}\{x(t)\},\qquad g(x)=\sup_{[a,b]}|x(t)|, \tag{I}$$

а значения процессов $\xi_n(t)$ имеют решетчатые распределения.

Абсолютно непрерывный случай рассматривался ранее в [I], [2]. Интерес автора к данной ситуации возник главным образом под влиянием Н.Н.Ляшенко, который указал на возможность приложений к задачам вероятностной теории чисел, где случайные величины по самой своей природе имеют решетчатый распределения.

Приводимые ниже результаты представляют собой содержание первой части совместного с Н.Н.Ляшенко доклада (см. [3]), сделанного на семинаре по теории вероятностей и математической статистике в ЛОМИ АН СССР*).

Автор пользуется случаем, чтобы выразить Н.Н.Ляшенко свою благодарность за внимание к данной работе и полезные обсуждения.

§ I. Результаты

Мы будем предполагать, что $\forall t\in[a,b]$ значения величины $\xi_n(t)$ принадлежат решетке $A_n=\{a_{kn}\}$, $a_{kn}=kh_n$, $k=0,\pm1,\ldots$, причем $h_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$. Обозначим через $\mathbb{D}_n$ подмножество $\mathbb{D}$, состоящее из тех x, для которых $x([a,b])\subset A_n$.

Введем еще такие обозначения: j_n - отображение R^1 в R^1,

*) Результаты второй части доклада также публикуются в настоящем сборнике (см. [4]).

сопоставляющее точке s ближайшую к ней справа точку вида a_{kn} ; $\mathcal{P}_{\xi}$ - распределение случайной величины ξ ; $\|\mu\|$ - полная вариация меры μ .

Положим

$$\pi_n = P_n f^{-1} \ , \qquad \sigma_n = (Pf^{-1}) j_n^{-1} \ .$$

Распределение σ_n сосредоточено на решетке A_n и $\sigma_n(a_{kn}) = \mathbb{P}\{ \sup\limits_{[a,b]} \xi(t) \in (a_{k-1,n}, a_{kn}] \}$. Ниже, при различных условиях на процессы ξ_n и ξ , доказывается, что $\|\pi_n - \sigma_n\| \longrightarrow 0$. Если предельное распределение Pf^{-1} имеет достаточно регулярную плотность p , то сближение π_n и σ_n будет эквивалентно следующему свойству

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k | \pi_n(a_{kn}) - h_n p(a_{kn}) | = 0 \ ,$$

которое имеет форму локальной предельной теоремы.

Первые две теоремы относятся к случаю, когда ξ_n и ξ - процессы с независимыми приращениями.

ТЕОРЕМА I. Предположим, что распределение $\mathcal{P}_{\xi(a)}$ абсолютно непрерывно и при $n \to \infty$

$$\| \mathcal{P}_{\xi_n(a)} - \mathcal{P}_{\xi(a)} j_n^{-1} \| \longrightarrow 0 \ .$$

Тогда $\|\pi_n - \sigma_n\| \longrightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $\xi(a) = c$ с вероятностью 1 (c - постоянная). Предположим также, что выполняются условия:

I) $\forall \varepsilon > 0, \ 0 < \varepsilon < b - a, \ \mathcal{P}_{\xi(a+\varepsilon)}$ абсолютно непрерывно и $\| \mathcal{P}_{\xi_n(a+\varepsilon)} - \mathcal{P}_{\xi(a+\varepsilon)} \gamma_n^{-1} \| \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$,

2) при $n \to \infty$ $\pi_n(c_n) - \sigma_n(c_n) \longrightarrow 0$, где $c_n = j_n(c)$.

Тогда $\|\pi_n - \sigma_n\| \longrightarrow 0$.

Условие 2) является, очевидно, необходимым для сходимости $\|\pi_n - \sigma_n\|$ к нулю. Следующий пример показывает, что оно не вытекает, вообще говоря, из предыдущих условий.

ПРИМЕР. Пусть $w(t)$, $t \in [0,1]$ - стандартный процесс броуновского движения; $s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$, $t \in [0,1]$, где $S_k = \sum\limits_1^k \eta_i$, а η_i - независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие целые значения, причем $E\eta_i = 0$, $D\eta_i = 1$, а максимальный шаг их распределения равен 1 . Пусть $h(t) = t^{1/3}$,

$h_n(t)=j_n(h(t))$, где j_n - определенное выше отображение, связанное с решеткой $\{a_{kn}\}$, $a_{kn}=\frac{k}{\sqrt{n}}$.

Положим

$$\xi(t)= w(t)-h(t),$$

$$\xi_n(t)=\begin{cases} s_n(t), & t\in[0,\varepsilon_n],\\ s_n(t)-h_n(t)+h_n(\varepsilon_n), & t\in[\varepsilon_n,1],\end{cases}$$

где $\varepsilon_n \downarrow 0$ выбирается так, чтобы $\mathbb{P}\{\sup\limits_{[0,\varepsilon_n]}\{s_n(t)\}\leq 0\}\to 0$ (такой выбор осуществим, поскольку $\forall\varepsilon>0$ последовательность процессов $(s_n(t))$, $t\in[0,\varepsilon]$,слабо сходится к $W(t)$).

Процессы ξ_n , ξ будут иметь независимые приращения и ξ_n будет слабо сходиться к ξ . Условие 1) теоремы 2 легко проверяется с помощью локальной теоремы Б.В.Гнеденко (см. [5] , т.4.2.3). В то же время условие 2) не имеет места. Действительно, локальный закон повторного логарифма для броуновского движения (см. [7] , стр.381) дает:

$$\sigma_n(0)\geq\mathbb{P}\{\sup_{[0,1]}\{w(t)-h(t)\}=0\}=p>0.$$

С другой стороны,

$$\pi_n(0)=1-\mathbb{P}\{\sup_{[0,1]}\xi_n(t)>0\}\leq 1-\mathbb{P}\{\sup_{[0,\varepsilon_n]}s_n(t)>0\}=$$

$$=\mathbb{P}\{\sup_{[0,\varepsilon_n]}s_n(t)\leq 0\}\to 0$$

по выбору ε_n .

Таким образом, хотя распределение π_n и сходится слабо к распределению Pf^{-1} , тем не менее сближения по вариации между π_n и σ_n не наблюдается.

Приведем одно следствие из теоремы 2, относящееся к ступенчатым процессам, построенным по суммам независимых одинаково распределенных величин.

Пусть (η_k), $k=1,2,\ldots$ - последовательность независимых случайных величин с одинаковым целочисленным распределением, имеющим максимальный шаг 1 и принадлежащим области притяжения устойчивого закона L_α с показателем $\alpha\in(0,2]$. Пусть B_n - соответствующие нормирующие постоянные.

Положим $S_n=\sum_1^n \eta_k$, $S_n(t)=\frac{1}{B_n} S_{[n,t]}$, $t\in[0,1]$. Решетка A_n будет в этом случае образована точками $a_{kn}=\frac{k}{B_n}$, $k=0,\pm 1,\ldots$. Для функции $h\in \mathbb{D}$ через h_n будем обозначать функцию, определяемую равенством: $h_n(t)=j_n(h(t))$.

В качестве процессов $\xi_n(t)$ возьмем процессы $S_n(t)-h_n(t)$, а в качестве $\xi(t)$- процесс $S(t)-h(t)$, где $S(t)$ - устойчивый процесс на $[0,1]$, для которого $\mathcal{P}_{S(1)}=L_\alpha$.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы $\|\pi_n-\sigma_n\|\longrightarrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\pi_n(h_n(0))-\sigma_n(h_n(0))\longrightarrow 0, \quad n\longrightarrow\infty. \tag{2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Легко видеть, что соотношение (2) эквивалентно следующему:

$$\pi_n(h_n(0))\longrightarrow p,$$

где $p=\mathbb{P}\{\sup_{[0,1]}\{S(t)-h(t)\}=h(0)\}$ (см.ниже док-во т.5). В случае $p=0$ это свойство вытекает из слабой сходимости P_n к P.

Перейдем теперь к формулировкам общих теорем. Обозначим $\mathbb{D}^0=\mathbb{D}^0[a,b]$ подпространство тех $x\in\mathbb{D}$, для которых $x(a)=0$, и пусть отображение $J:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}^0$ определено равенством $Jx(t)=x(t)-x(a)$. Это отображение измеримо. Пусть ρ - измеримое разбиение $\mathbb{D}$, порожденное отображением J: $\rho=(\lambda_x)$, $\lambda_x=J^{-1}(\{x\})$, $x\in\mathbb{D}^0$. Пространство $\mathbb{D}^0$ можно отождествить с факторпространством $\mathbb{D}/\rho$. Так как $\mathbb{D}$ полно и сепарабельно, то существуют условные системы мер (см. [6]) для мер P_n и P. Обозначим их (α_x^n) и (α_x). Фактормеры будем обозначать μ_n и μ. Заметим, что элемент разбиения λ_x обладает линейной структурой, изоморфной R^1:

$$\lambda_x=\{x+c\mathbb{1}\},\quad c\in R^1,\quad \mathbb{1}(t)=1,\ t\in[a,b].$$

Поэтому удобно ввести отображение

$$I_x:\lambda_x\longrightarrow R^1,\quad I_x(x+c\mathbb{1})=c.$$

Образ меры α_x (или α_x^n) при этом отображении будет обозначаться $\tilde{\alpha}_x$ (или $\tilde{\alpha}_x^n$). Обозначим через $\mathbb{Z}(R^1)$ пространство всех конечных мер на σ-алгебре $\mathcal{B}^1$ борелевских подмножеств R^1 с полной вариацией в качестве нормы. Мера Лебега на $\mathcal{B}^1$ обозначается через m .

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что

I) для μ-почти всех $x \in \mathbb{D}^0$ мера $\tilde{\alpha}_x$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m ,

2) отображение $x \to \tilde{\alpha}_x$ из $\mathbb{D}^0$ в $\mathbb{Z}(R^1)$ μ-почти всюду непрерывно,

3) $\forall \delta > 0$ при $n \to \infty$

$$\mu_n\{x \in \mathbb{D}^0 \,|\, \|\tilde{\alpha}_x^n - \tilde{\alpha}_x j_n^{-1}\| > \delta\} \to 0 .$$

Тогда $\|\pi_n - \sigma_n\| \to 0$.

Следующая теорема относится к часто встречающемуся случаю, когда значение предельного процесса в начальный момент времени неслучайно. В формулировке этой теоремы символы $\tilde{\alpha}_x$, $\tilde{\alpha}_x^n$ используются для обозначения образов (под действием I_x) условных мер распределений P^ε , P_n^ε (в $\mathbb{D}[a+\varepsilon, b]$), соответствующих сужениям процессов ξ и ξ_n на интервал $[a+\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b-a$. Аналогичное замечание относится и к обозначениям фактормер μ и μ_n .

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что выполняются условия:

I) $\xi(a) = c$ с вероятностью I,

2) $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < b-a$ для μ-почти всех $x \in \mathbb{D}^0[a+\varepsilon, b]$ мера $\tilde{\alpha}_x$ абсолютно непрерывна относительно m ,

3) $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < b-a$ отображение $x \to \tilde{\alpha}_x$ из $\mathbb{D}^0[a+\varepsilon, b]$ в $\mathbb{Z}(R^1)$ μ-почти всюду непрерывно,

4) $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < b-a$ и $\forall \delta > 0$ при $n \to \infty$

$$\mu_n\{x \in \mathbb{D}^0[a+\varepsilon, b] \,|\, \|\tilde{\alpha}_x^n - \tilde{\alpha}_x j_n^{-1}\| > \delta\} \to 0 ,$$

5) при $n \to \infty$ $\pi_n(j_n(c)) - \sigma_n(j_n(c)) \to 0$.

Тогда $\|\pi_n - \sigma_n\| \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 4 и 5 имеют довольно громоздкие формулировки. Однако, именно они, как показано в [4] , применимы к процессам, возникающим при изучении сумм теоретико-числовых функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждения, аналогичные теоремам I-5 имеют место и для функционала g (см. (I)). Надо лишь под π_n понимать $\mathrm{P}_n q^{-1}$, под $\sigma_n - (\mathrm{P}q^{-1})\, j_n^{-1}$, где теперь j_n – отображение, определяемое соотношениями:

$$j_n(0)=0\,; \quad j_n(s)=a_{kn} \text{ при } s>0 \text{ и } s\in(a_{k-1,n}, a_{kn}]\,;$$

$$j_n(s)=a_{k-1,n} \qquad \text{ при } s<0 \text{ и } s\in[a_{k-1,n}, a_{kn}).$$

§ 2. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим $A_{n,x}$ множество точек вида $x+a_{kn}\mathbb{1}$, $x\in \mathrm{D}^\circ$. Пусть $j_{n,x}$ отображение прямой λ_x в $A_{n,x}$, определяемое равенством: $j_{n,x}(x+t\,\mathbb{1})=x+j_n(t)\,\mathbb{1}$. Положим

$$\pi_n^1=\int_{\mathrm{D}^\circ}(\alpha_x\, j_{n,x}^{-1})\, f^{-1}\mu_n(dx).$$

Покажем, что при $n\to\infty$

$$\|\pi_n-\pi_n^1\|\to 0\,. \tag{3}$$

Так как $\pi_n=\int_{\mathrm{D}^\circ}\alpha_x^n f^{-1}\,\mu_n(dx)$, то

$$\|\pi_n-\pi_n^1\|\leqslant\int_{\mathrm{D}^\circ}\|\alpha_x\, j_{n,x}^{-1}-\alpha_x^n\|\,\mu_n(dx)=$$

$$=\int_{\mathrm{D}^\circ}\|\tilde\alpha_x\, j_n^{-1}-\tilde\alpha_x^n\|\,\mu_n(dx)\leqslant$$

$$\leqslant\delta+2\mu_n\{x\subset\mathrm{D}^\circ\,|\,\|\tilde\alpha_x^n-\tilde\alpha_x\, j_n^{-1}\|>\delta\},$$

где δ – произвольное малое положительное число. По условию 3) второе слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$. В силу произвольности δ отсюда следует (3).

Покажем теперь, что

$$\|\pi_n^1-\sigma_n\|\to 0\,. \tag{4}$$

Заметим, что фактормера μ_n сосредоточена на множестве $\mathrm{D}^\circ\cap\mathrm{D}_n$. Если же $x\in\mathrm{D}^\circ\cap\mathrm{D}_n$, то $f(x)\in A_n$ и потому

$$j_n(f(x+t\mathbb{1}))=j_n(f(x)+t)=f(x)+j_n(t).$$

С другой стороны,

$$f(j_{n,x}(x+t\mathbb{1}))=f(x+j_n(t)\mathbb{1})=f(x)+j_n(t).$$

Значит, для $x\in\mathbb{D}^{\circ}\cap\mathbb{D}_n$ отображения $f\circ j_n$ и $j_{n,x}\circ f$, рассматриваемые на Λ_x, совпадают. Поэтому

$$(\alpha_x f^{-1})\,j_n^{-1}=(\alpha_x\,j_{n,x}^{-1})\,f^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_n^1=\int\limits_{\mathbb{D}^{\circ}\cap\mathbb{D}_n}(\alpha_x\,j_{n,x}^{-1})f^{-1}\mu_n(dx)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{D}^{\circ}\cap\mathbb{D}_n}\nu_x\,j_n^{-1}\mu_n(dx)=\Big(\int\limits_{\mathbb{D}^{\circ}}\nu_x\,\mu_n(dx)\Big)\,j_n^{-1};$$

здесь $\nu_x=\alpha_x f^{-1}$.

Так как $\sigma_n=\big(\int\limits_{\mathbb{D}^{\circ}}\nu_x\,\mu(dx)\big)\,j_n^{-1}$, то

$$\|\pi_n^1-\sigma_n\|\leqslant\Big\|\int_{\mathbb{D}^{\circ}}\nu_x\,\mu_n(dx)-\int_{\mathbb{D}^{\circ}}\nu_x\,\mu(dx)\Big\|.$$

Покажем, что в наших условиях отображение $x\longrightarrow\nu_x$ из $\mathbb{D}^{\circ}$ в $\mathbb{Z}(\mathbb{R}^1)$ μ-почти всюду непрерывно.

Пусть x принадлежит множеству μ-полной меры, для которого выполняются свойства 1) и 2). Обозначим через p плотность меры $\tilde{\alpha}_x$. Пусть $y\longrightarrow x$. Так как $f(x+t\mathbb{1})=f(x)+t$, то мера $\nu_x=\alpha_x f^{-1}$ совпадает с мерой $\tilde{\alpha}_x$, сдвинутой на $f(x)$: $\nu_x(A)=\tilde{\alpha}_x(A-f(x))$. Аналогично, ν_y есть $\tilde{\alpha}_y$, сдвинутая на $f(y)$. Обозначим ν_{xy} меру $\tilde{\alpha}_x$, сдвинутую на $f(y)$. Так как при $y\longrightarrow x$ $f(y)\longrightarrow f(x)$, то

$$\|\nu_x-\nu_{xy}\|=\int\limits_{\mathbb{R}^1}|p(t)-p(t+f(y)-f(x))|\,dt\longrightarrow 0.$$

По условию 2) при $y\longrightarrow x$

$$\|\nu_{xy}-\nu_y\|=\|\tilde{\alpha}_x-\tilde{\alpha}_y\|\to 0.$$

Таким образом, действительно при $y\to x$ $\|\nu_y-\nu_x\|\to 0$. Теперь, учитывая, что $\mu_n \Rightarrow \mu$ и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.I [I], получим

$$\left\|\int_{\mathbb{D}^0}\nu_x\,\mu_n(dx)-\int_{\mathbb{D}^0}\nu_x\,\mu(dx)\right\|\to 0,$$

что дает (4). Из (3) и (4) следует, очевидно, что $\|\pi_n-\sigma_n\|\to 0$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Обозначим i_ε отображение $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}[a+\varepsilon,b]$, сопоставляющее функции x ее сужение на интервал $[a+\varepsilon,b]$. Тогда $P^\varepsilon=Pi_\varepsilon^{-1}$, $P_n^\varepsilon=P_n i_\varepsilon^{-1}$. Введем еще такие обозначения: $f_\varepsilon(x)=\sup\limits_{[a+\varepsilon,b]}\{x(t)\}$, $x\in\mathbb{D}[a+\varepsilon,b]$,

$$\varphi_n(s)=\max\{s,j_n(c)\},\ s\in R^1;\quad f_n(x)=j_n(f(x)),\ x\in\mathbb{D};$$

$$\Lambda=\{x\in\mathbb{D}\mid f(x)=c\},\quad \Lambda_n=\{x\in\mathbb{D}\mid f_n(x)=j_n(c)\};$$

$$p=P(\Lambda),\quad p_n=P(\Lambda_n),\quad q_n=P_n(\Lambda_n).$$

Ясно, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}\Lambda_n=\Lambda$. Поэтому $p_n\to p$. Условие 5) доказываемой теоремы означает, что $p_n-q_n\to 0$. Следовательно, $P_n(\Lambda)=P_n(\Lambda_n)=q_n\to p$.

Положим

$$B=\{x\in\mathbb{D}\mid \sup_{[a+\varepsilon,b]}x(t)>c+\gamma\},$$

$$C=\{x\in\mathbb{D}\mid \sup_{[a,a+\varepsilon]}x(t)<c+\gamma\},$$

где γ некоторое положительное число.

Легко видеть, что по заданному $\delta>0$ можно отыскать $\gamma>0$ и $\varepsilon>0$, так чтобы

$$P(B) > 1-p-\delta, \qquad P(C) > 1-\delta .$$

Кроме того, γ и ε можно выбрать так, что B и C будут множествами P -непрерывности. Так как $P_n \Rightarrow P$, то при достаточно больших n, скажем при $n > n_0$, будут также выполняться неравенства

$$P_n(B) > 1-p-\delta, \quad P_n(C) > 1-\delta .$$

Обозначим через B_n множество $(B \cap C) \cup \Lambda_n$.

Пусть $n > n_0$ и столь велико, что

$$\Lambda_n \cap (B \cap C) = \emptyset, \quad |p_n - p| < \delta, \quad |q_n - p| < \delta .$$

Тогда будем иметь:

$$P(\mathcal{D} \setminus B_n) \leqslant P(\mathcal{D} \setminus B) + P(\mathcal{D} \setminus C) - p_n \leqslant 3\delta . \tag{5}$$

Аналогично,

$$P_n(\mathcal{D} \setminus B_n) \leqslant 3\delta . \tag{6}$$

Обозначим сужение мер P и P_n на множество B_n соответственно Q_n и R_n, а на $\mathcal{D} \setminus B_n$ – $\tilde{Q}_n$ и $\tilde{R}_n$. Тогда

$$\| \pi_n - \sigma_n \| = \| P_n f^{-1} - P f_n^{-1} \| = \Delta_1 + \Delta_2 ,$$

где $\Delta_1 = \| R_n f^{-1} - Q_n f_n^{-1} \|, \quad \Delta_2 = \| \tilde{R}_n f^{-1} - \tilde{Q}_n f_n^{-1} \| .$

В силу неравенств (5) и (6)

$$\Delta_2 \leqslant \| \tilde{R}_n f^{-1} \| + \| \tilde{Q}_n f_n^{-1} \| \leqslant P_n(\mathcal{D} \setminus B_n) + P(\mathcal{D} \setminus B_n) \leqslant 6\delta . \tag{7}$$

Если $x \in B_n$, то $f_n(x) = \varphi_n(j_n(f_\varepsilon(i_\varepsilon(x))))$.

Поэтому

$$Q_n f_n^{-1} = ((Q_n^\varepsilon f_\varepsilon^{-1}) j_n^{-1}) \varphi_n^{-1} ,$$

где Q_n^ε – сужение P^ε на множество $i_\varepsilon(B_n)$. Учитывая, что мера P_n сосредоточена на $\mathcal{D}_n$, аналогично получим

$$R_n f^{-1} = R_n f_n^{-1} = (R_n^\varepsilon f_\varepsilon^{-1})\varphi_n^{-1},$$

где R_n^ε - сужение P_n^ε на $i_\varepsilon(B_n)$.

Следовательно,

$$\Delta_1 \leqslant \| (Q_n^\varepsilon f_\varepsilon^{-1}) j_n^{-1} - R_n^\varepsilon f_\varepsilon^{-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant \| (P^\varepsilon f_\varepsilon^{-1}) j_n^{-1} - P_n^\varepsilon f_\varepsilon^{-1} \| .$$

Последнее выражение по теореме 4 (применяемой к мерам P_n^ε, P^ε и функционалу f_ε на $\mathcal{D}[a+\varepsilon, b]$) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда, с учетом неравенства (7), вытекает требуемая сходимость: $\|\pi_n - \sigma_n\| \to 0$.

Теорема 5 доказана.

Теоремы 1 и 2 являются простыми следствиями соответственно теорем 4 и 5. Покажем это для теоремы 1, теорема 2 выводится аналогично.

Из независимости приращений процесса ξ следует, что меры $\tilde{\alpha}_x$ совпадают с распределением $\mathcal{P}_{\xi(a)}$. Таким образом, условия 1) и 2) теоремы 4 выполняются. Поскольку процесс ξ_n также имеет независимые приращения, то $\tilde{\alpha}_x^n = \mathcal{P}_{\xi_n(a)}$. Но тогда из условия

$$\| \mathcal{P}_{\xi_n(a)} - \mathcal{P}_{\xi(a)} j_n^{-1} \| \to 0$$

сразу выводится условие 3) теоремы 4.

При выводе теоремы 3 из теоремы 2 в проверке нуждается только условие

$$\| \mathcal{P}_{\xi_n(a+\varepsilon)} - \mathcal{P}_{\xi(a+\varepsilon)} j_n^{-1} \| \longrightarrow 0 .$$

Оно вытекает из локальной предельной теоремы Б.В.Гнеденко (см. т.4.2.2 [5]).

Литература

1. Давыдов Ю.А. О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов. I. – Теория вероятностей и ее примен., в печати, 1980, XXУ, № 3.
2. Давыдов Ю.А. Локальные предельные теоремы для функционалов типа супремума (многомерный случай). – Теор.вероятн. и ее примен., 1980, XXУ, № 2.
3. Давыдов Ю.А., Лященко Н.Н. Локальные предельные теоремы для функционалов типа супремума в решетчатом случае и их применение в теории арифметических процессов. – Теор. вероятн. и ее примен., 1980, XXУ, № 1.
4. Лященко Н.Н. Об асимптотическом поведении арифметических процессов. – Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1980, т. 97 , с. –
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М., 1965.
6. Рохлин В.А. Об основных понятиях теории меры. – Матем. сб., 25(67), № 1 (1949), 107–150.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М., 1965.